EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Valószínűségszámítási gyakorlatok

Összeállította
Dr. Tómács Tibor
egyetemi docens

Utolsó módosítás
2020. augusztus 24.

Eger, 2020

Ez a jegyzet az alábbi címről szabadon letölthető:
https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitasi_gyakorlatok.pdf

Ez a feladatgyűjtemény az alábbi jegyzethez készült kiegészítésként:
https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas.pdf

A feladatok megoldását a ? jelre klikkelve keresheti meg.

Tartalomjegyzék

1. gyakorlat

Események

1.1. feladat. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Ha a dobott számok összege kettő, akkor feldobjuk még egyszer. Adjuk meg a biztos eseményt és két σ-algebrát!

1.2. feladat. Egy kockát addig dobunk, amíg hatost nem kapunk. Adjuk meg a biztos eseményt!

1.3. feladat. Az egész számok közül választunk egyet. Az A esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott szám öttel osztható, B pedig azt, hogy a szám nullára végződik. Mit jelentenek a következő események?

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$

1.4. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy dobókockával páros számot dobunk, B azt, hogy 4-nél kisebbet dobunk és C, hogy 2-nél nagyobbat dobunk. Mit jelent az

$$\big(A \setminus (B \cap C)\big) \cup \big((A \setminus B) \setminus C\big)$$

esemény?

1.5. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy magyar kártyából egy zöld lapot húzunk, B pedig azt, hogy királyt. Fogalmazzuk meg szavakban a következő eseményeket! Az egyes események hányféleképpen következhetnek be?

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $\overline{A} \cap B$
d) $\overline{A} \cup \overline{B}$
e) $A \cup \overline{B}$
f) $A \setminus B$
g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
h) $\overline{A \cup B}$
i) $\overline{A \cap B}$.

1.6. feladat. Jelöljön A_k minden $k \in \mathbb{N}$ esetén egy eseményt. Mit jelent a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

esemény?

1.7. feladat. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

a) csak az első romlik el;
b) mindhárom elromlik;
c) egyik sem romlik el;
d) az első és a második nem romlik el;
e) az első és a második elromlik, a harmadik nem;
f) csak egy gép romlik el;
g) legfeljebb egy gép romlik el;
h) legfeljebb két gép romlik el;
i) legalább egy gép elromlik.

1.8. feladat. Két számot húzunk egymás után az első ezer pozitív egész szám közül. Legyen A az az esemény, hogy az első páros, B pedig az, hogy a második szám páros. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy a két szám szorzata páros, D-vel pedig azt, hogy páratlan. Írjuk fel C-t és D-t az A és B eseményekkel!

1.9. feladat. Egy osztály létszáma 40, egy adott tantárgyból az átlaga 3,7. Jelentse A azt az eseményt, hogy az osztályban van jeles tanuló, és B, hogy pontosan öt tanuló bukott meg. Igaz-e, hogy $B \subset A$, azaz, hogy B maga után vonja A-t?

1.10. feladat. Egy gyár gépeket szállít külföldre. Háromféle gyártmányból kell az exporttervét teljesítenie. A gyártmányok darabára: I: 1000 euró, II: 1500 euró, III: 2500 euró. A külföldi cég I-ből és II-ből legfeljebb 1000-1000 darabot vesz át. Jelentse A azt az eseményt, hogy az 5 millió eurós exportterv teljesül, és B, hogy III-ból legalább 1000 darabot exportálnak. Igaz-e, hogy A maga után vonja B-t?

2. gyakorlat

Klasszikus valószínűségi mező

2.1. feladat. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege hét? Mikor számolhatunk klasszikus valószínűséggel, ha a két kockát megkülönböztetjük vagy sem?

2.2. feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy ötöslottón kettes találatot érünk el?

2.3. feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy ötöslottón kétszer egymásután ugyanazokat a számokat húzzák ki?

2.4. feladat. Egy dobozban 7 piros és 5 fekete golyó van. Ha visszatevés nélkül kivesszük mind a 12 golyót, mennyi annak a valószínűsége, hogy feketét húzunk utoljára?

2.5. feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan négy darab hatost dobunk?

2.6. feladat. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány feketét kell hozzátenni, hogy fekete golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

2.7. feladat. A számjegyeket véletlenszerűen egymásmellé írjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy két prímszám között nem lesz prímtől különböző?

2.8. feladat. Nyolc bástyát véletlenszerűen elhelyezünk egy sakktáblán. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

2.9. feladat. Hat dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

2.10. feladat. Öt dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

2.11. feladat. Totóban egy tipposzlopot véletlenszerűen kitöltve, mennyi a valószínűsége, hogy 10-es találatunk lesz?

2.12. feladat. Egy dobozban 15 papírlap van 1-től 15-ig megszámozva. Találomra kiveszünk 5 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

2.13. feladat. Mi valószínűbb, 6 kockával legalább egy darab egyest vagy 12 kockával legalább két darab egyest dobni?

2.14. feladat. Legalább hány pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legyen közöttük fej dobás?

2.15. feladat. A 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között mind a négy szín előfordul?

2.16. feladat. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős társaságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik?

2.17. feladat. Egy televíziós vetélkedőben három ajtó közül az egyik mögött autó, a másik kettő mögött kecske található. A játékos a becsukott ajtók közül kiválaszt egyet, majd a játékvezető a másik kettő közül kinyit egy olyat, ami mögött kecske van. A játékos ezután még egyszer dönthet. Az eredetileg kiválasztott ajtónál marad, vagy inkább a másik ajtóra tippel. Vajon mikor nagyobb a valószínűsége annak, hogy nyer a játékos? Ha változtat az első döntésén, vagy ha kitart mellette? Esetleg teljesen mindegy, mert maradnak az esélyek?

Ezt a játékot Monty Hall-dilemmának is nevezik, mert Monty Hall „Let's make a deal" című tévés vetélkedőjében játszották. Marilyn Savant – akinek az IQ-ja 228, ami a valaha mért legnagyobb érték – a váltás mellett érvelt. Azonban a legtöbb matematikus – köztük Erdős Pál – nem tartotta jónak a magyarázatot. Akkor hát mi az igazság?

2.18. feladat. Excel segítségével modellezzük a Monty Hall-dilemmát, majd számoljuk ki a nyert játékok relatív gyakoriságát mindkét stratégia esetén!

3. gyakorlat

Feltételes valószínűség, események függetlensége

3.1. feladat. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

3.2. feladat. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával hatost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

3.3. feladat. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jutott ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következő sem kapott?

3.4. feladat. Ha egyetlen szelvénnyel lottózunk az ötöslottón, továbbá a számaink között a nagyság szerinti középső szám a 40-es, akkor mi a valószínűsége, hogy ötös találatunk lesz, feltéve, hogy a kihúzott számok között is a nagyság szerinti középső a 40-es?

3.5. feladat. Két kockával addig dobunk, amíg legalább az egyik hatost nem mutat. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik is hatost mutat?

3.6. feladat. Részeges Rezső a nap harmadát kocsmában tölti. A faluban négy kocsma van, bármelyikben előfordulhat ugyanakkora eséllyel. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Három kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége, hogy a negyedikben lesz?

3.7. feladat. Két dobozból az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 4 piros és 5 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk egy golyót a másodikba, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal pirosat húzunk?

3.8. feladat. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$ és $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathrm{P}(A \mid B) \geq 0{,}625$!

3.9. feladat. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}3$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}6$. Mivel egyenlő $\mathrm{P}(A)$?

3.10. feladat. Legyen $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $\mathrm{P}(A \cup B)$ és a $\mathrm{P}(\overline{A} \mid \overline{B})$ valószínűségeket!

3.11. feladat. Mutassuk be, hogy ha az A és B események függetlenek, akkor az A és $\overline{B}$ is függetlenek!

3.12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B egymást kizáró események, A és C függetlenek, továbbá B és C is függetlenek, akkor $A \cap B$ és C függetlenek, illetve $A \cup B$ és C is függetlenek!

3.13. feladat. Egy dobozban 2 fehér és 4 fekete golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk négy golyót. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fekete. A B esemény jelentse azt, hogy az utolsónak kivett golyó fekete. Függetlenek-e A és B?

3.14. feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy kockával kétszer dobva másodikra hatost dobunk, feltéve, hogy elsőre hatost dobtunk? A két esemény független-e egymástól?

3.15. feladat. Egy urnában 4 egyforma papírlap található. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé. Az elsőn 000, a másodikon 011, a harmadikon 101 és a negyediken 110 olvasható. Húzzunk ki egy lapot. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik számjegye 1-es ($i = 1, 2, 3$). Mutassuk meg, hogy az A_1, A_2, A_3 események páronként függetlenek!

3.16. feladat. Az 52 lapos francia kártyából kihúzunk egy lapot. Független-e az ász húzása a kőr húzásától?

3.17. feladat. Húzzunk egy lapot a 32 lapos magyar kártyából. Legyen A az az esemény, hogy pirosat vagy zöldet húzunk, B az, hogy pirosat vagy tököt, illetve C az, hogy számozott lapot húzunk. Függetlenek-e ezek az események egymástól?

3.18. feladat. Egy kockát és két pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán 6-ost, az egyik pénzérmén írást a másikon pedig fejet dobunk?

3.19. feladat. Egy párbajban Antal és Béla felváltva lőnek egymásra első vérig. Antal 0,3 valószínűséggel talál célba, Béla pedig 0,9-del. Mennyi a valószínűsége, hogy Antal győz, ha ő kezdi a párbajt?

3.20. feladat. Dobókockával dobunk egymásután. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik ötös a nyolcadik dobásra jön ki?

3.21. feladat. Ha az A, B és C események függetlenek és $\mathrm{P}(A) = 2\,\mathrm{P}(B) = 2\,\mathrm{P}(C) = \frac{1}{4}$, akkor mennyi $\mathrm{P}(A \cup B \mid B \cup C)$?

4. gyakorlat

Teljes valószínűség tétele

4.1. feladat. Egy céllövöldében 6 puska van. Ezek közül 3 darab 0,5 valószínűséggel talál célba, 1 darab 0,7-del és 2 darab 0,8-del. Mi a valószínűsége, hogy célba találunk, ha a puskát találomra választjuk ki?

4.2. feladat. Két doboz mindegyikében 100-100 darab csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel kiválasztjuk valamelyiket, amelyből találomra kiveszünk egy csavart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a csavar jó?

4.3. feladat. Egy gyárban a legyártott termékeket százasával csomagolják dobozokba. A legyártott dobozok $\frac{1}{6}$ részében 0 darab termék hibás, $\frac{5}{12}$ részében 1 darab termék hibás, $\frac{1}{4}$ részében 2 darab termék hibás, $\frac{1}{12}$ részében 3 darab termék hibás, és a fennmaradó $\frac{1}{12}$ részében 4 darab termék hibás. A dobozok közül véletlenszerűen válasszunk ki egyet, majd abból emeljünk ki egy műszert. Mi a valószínűsége, hogy hibátlan műszert választottunk?

4.4. feladat. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mi a valószínűsége, hogy a harmadiknak kivett golyó piros?

4.5. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba egy golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy másodjára piros golyót húzunk ki?

4.6. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba két golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a második dobozból piros golyót húzunk ki?

4.7. feladat. Három doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban 2 piros és 3 fekete golyó van, a harmadikban pedig 5 piros és 4 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba egy golyót, majd a másodikból a harmadikba átteszünk egy golyót, végül a harmadikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik dobozból piros golyót húzunk ki?

4.8. feladat. Egy rab kap két egyforma dobozt, 10 fehér és 10 fekete golyót. A golyókat tetszőlegesen elrendezheti a dobozokban, de fel kell használnia az összeset. Ezután a két doboz valamelyikéből húznia kell. Hogy melyik dobozból, azt sorshúzással döntik el. Ha fehéret húz, akkor kiszabadul. Hogyan kell elrendezni a golyókat, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel szabaduljon ki?

4.9. feladat. 10 cetlire felírjuk 1-től 10-ig az egész számokat, majd betesszük őket egy dobozba. A dobozból kisorsolunk 5 cetlit, melyek közül a legnagyobb számot jelölje M. Ezután a dobozban maradt 5 cetliből egymásután sorsolunk ki cetliket. Ezt az első olyan cetli húzásáig folytatjuk, amíg M-nél nagyobb értékűt nem húzunk. Mi a valószínűsége, hogy így utolsónak a 10-es cetlit húztuk ki?

4.10. feladat. Néhány doboz mindegyikében 600-600 darab golyó van. Az elsőben 2 golyó piros, és a többi dobozban mindig 5-tel több a piros golyók száma, mint az előzőben volt. Az utolsó dobozban csak 3 golyó nem piros. Valamelyik dobozból egy golyót kiveszünk. Mi a valószínűsége, hogy pirosat választunk?

4.11. feladat. Az I. érme feldobásakor 0,4 valószínűséggel kapunk fejet, míg a II. érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0,7. A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és tízszer feldobunk.

a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás fej lesz?

b) Függetlenek-e ezen dobások kimenetelei egymástól?

4.12. feladat. Két egyforma gyufásdoboz egyikében 7 piros fejű és 4 fekete fejű gyufaszál van, míg a másikban 5 piros fejű és 6 fekete fejű. Véletlenszerűen választunk egy dobozt, majd abból egy gyufaszálat, amit átrakunk a másik dobozba. Ezután ismét választunk egy dobozt és abból egy gyufaszálat véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy ekkor piros fejűt húzunk ki?

4.13. feladat. Általánosítsuk a 2.17. feladatban ismertetett Monty Hall-dilemmát! Legyen $n \geq 1$ azon ajtók száma, melyek mögött autó van. Legyen $m \geq 2$ azon ajtók száma, melyek mögött kecske van. A játékos az $n + m$ csukott ajtóból választ egyet, majd a játékvezető k darab ajtót kinyit, melyek mögött kecske van. Ezután a játékos eldöntheti, hogy marad-e az eredeti választásánál vagy változtat. Érdemes-e változtatni?

5. gyakorlat

Bayes-tétel

5.1. feladat. Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25 %-át adja és 5 %-os selejt aránnyal dolgozik. A második 35 %-ot termel 4 %-os selejt aránnyal, végül a harmadik 2 %-os selejt aránnyal dolgozik. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

5.2. feladat. Morze adásnál a leadott pontok és vonalak aránya 5 : 3. A pontok $\frac{2}{5}$-ét vonalnak, a vonalak $\frac{1}{3}$-át pedig pontnak halljuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ha pontot vettünk, akkor valójában pontot adtak?

5.3. feladat. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 0,75 valószínűséggel első osztályú. A kikerült terméket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek 0,02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek 0,05.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton nem első osztályú minősítést kapott, valóban nem első osztályú?

5.4. feladat. Igazfalvában a lakosok 80 %-a mindig igazat mond, a többiek pedig mindig hazudnak. A mellette található Hazugfalvában a lakosok 90 %-a mindig hazudik, a többiek pedig mindig igazat mondanak. Egy vándor eltéved valamelyik faluba a kettő közül, de nem tudja melyikben van. Ezért az első lakost, akivel találkozik, megkérdezi, hogy ez melyik falu. Azt a választ kapja, hogy Igazfalvában vannak. Mi a valószínűsége, hogy a vándor valójában Hazugfalvába tévedt?

5.5. feladat. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Ha harmadiknak pirosat húzunk, akkor mi a valószínűsége, hogy az első két húzás mindegyike fehér volt?

5.6. feladat. Van két érmém, az egyik igazságos, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom megkülönböztetni őket egymástól. A cinkelt érme 0,75 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 0,5 valószínűséggel az igazságosat, 0,5 valószínűséggel a cinkeltet. Ezt feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

5.7. feladat. Az I. érme feldobásakor 0,4 valószínűséggel kapunk fejet, míg a II. érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0,7. A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és feldobunk. Feltéve, hogy fejet dobunk, mi a valószínűsége, hogy az I. érmével tettük ezt?

5.8. feladat. Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek közül rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra választott dobozból húzunk három golyót visszatevéssel, és azt tapasztaljuk, hogy mindhárom fehér. Mi a valószínűsége, hogy azt a dobozt választottuk, amelyben pontosan két fehér golyó van?

5.9. feladat. Egy tanár a vizsgán tesztet töltet ki a hallgatókkal. A tesztlapon minden kérdéshez három válasz van feltüntetve, melyek közül csak egy helyes. Tegyük fel, hogy a vizsgázó 0,8 valószínűséggel tudja a helyes választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor bármely választ egyforma eséllyel bejelölheti. Ha egy kérdésre helyesen válaszol a hallgató, akkor mi a valószínűsége, hogy ennek az az oka, hogy valóban tudta a választ?

5.10. feladat. Egy városban a lakosság 0,5 %-át megfertőzött egy ritka vírus. Egy teszt a vizsgálati személyek 99 %-ról helyesen el tudja dönteni, hogy fertőzött vagy egészséges, de 1 %-ban téved. Mekkora a valószínűsége, hogy egy megvizsgált személy egészséges, ha a teszt szerint fertőzött? Ha a teszt szerint fertőzött valaki, akkor letesztelik még egyszer. Ha a második teszt szerint is fertőzött az illető, akkor mi a valószínűsége, hogy valójában egészséges?

5.11. feladat. Három rab közül az egyik kegyelemben részesül, amit sorshúzással döntenek el. Az őr tudja ki a szerencsés, de nem árulhatja el. Az egyik rab meggyőzi az őrt arról, hogy legalább annyit áruljon el, ki nem kapott kegyelmet a másik két rab közül. Az őr azért egyezett bele, mert úgy gondolta, hogy a másik két rab egyike biztosan nem kap kegyelmet, így tulajdonképpen nem ad ki lényeges információt. A rab szerint viszont, mivel már csak ketten vannak az esélyesek között, ezért $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, hogy ő kap kegyelmet. Az őr vagy a rab gondolkodik helyesen?

5.12. feladat. Szimuláljuk az előző feladatot Excel segítségével! Számoljuk ki annak a relatív gyakoriságát, hogy a kérdező rab kap kegyelmet azzal a feltétellel, hogy az őr a másik két rab közül az elsőt nevezi meg!

6. gyakorlat

Geometriai valószínűségi mező

6.1. feladat. Egy egységsugarú körlapban vele koncentrikus 9 darab kört rajzolunk úgy, hogy a kapott 10 rész bármelyikébe egyforma valószínűséggel választhatunk ki pontot. Mekkorák a körök sugarai?

6.2. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy Q pontot egy $ABCD$ egységnégyzet belsejében. Tükrözzük az AC átlóra, a kapott pontot jelöljük R-rel. Legyen S a QR szakasz felezőpontja! Mi a valószínűsége annak, hogy az AS távolság kisebb, mint 1?

6.3. feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszú szakasznál?

6.4. feladat. Ketten találkoznak egy adott órában. Egyik a másikra maximum 10 percet vár. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?

6.5. feladat. Egy raktárhoz egy adott órában két szállítmány érkezik, de egyszerre csak az egyik szállítmányt tudják kipakolni, amely 20 percig tart. Mi a valószínűsége, hogy egyik szállítmánynak sem kell a másikra várni?

6.6. feladat. Kiválasztunk két valós számot, p-t és q-t a $[0, 1]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy az

$$x^2 + px + q = 0$$

egyenletnek van valós gyöke?

6.7. feladat. A $[0, 1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük 1-nél nagyobb?

6.8. feladat. A $[0, 1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük kisebb mint $\frac{4}{3}$?

6.9. feladat. Egy pálcát két helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög?

6.10. feladat. Egy pálcát eltörünk, majd a keletkezett két pálca közül a hosszabbat ismét eltörjük. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög?

6.11. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy x számot a $[0, 1]$ intervallumon és egy y számot a $[0, 2]$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy egy x, egy y és egy egységnyi hosszúságú szakaszból háromszög alkotható?

6.12. feladat. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy ezek távolsága kisebb mint 1,3?

6.13. feladat. (*Buffon-féle tűprobléma*) Egy vízszintes síkon párhuzamos egyeneseket húzunk egymástól egységnyi távolságra. Mi a valószínűsége, hogy egy h hosszúságú tűt ráejtve a síkra, az ráesik valamelyik egyenesre?

7. gyakorlat

Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

7.1. feladat. Határozzuk meg az ötöslottón a találatok számának eloszlását!

7.2. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg az eloszlását!

7.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok különbségének abszolút értéke legyen ξ. Határozzuk meg az eloszlását!

7.4. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását!

7.5. feladat. Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármat kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen ξ a kihúzott fehérek száma. Adjuk meg az eloszlását!

7.6. feladat. 10 szelvénnyel játszva az ötöslottón, határozzuk meg a két találatos szelvények számának eloszlását!

7.7. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg a dobások között három darab hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását!

7.8. feladat. Legyen a ξ valószínűségi változó értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza. A $\{\xi = k\}$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$-sal. Határozzuk meg az eloszlást!

7.9. feladat. Három kockával dobunk egyszerre. Számítsa ki a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét az $x = 5{,}2$ helyen!

7.10. feladat. Létezik-e olyan valószínűségi változó, amelynek az alábbi F az eloszlásfüggvénye?

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

7.11. feladat. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek az eloszlásfüggvénye az előző feladatban definiált F. Mutassuk meg, hogy ξ abszolút folytonos és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

7.12. feladat. Vizsgálja meg a következő függvényeket. Melyik lehet eloszlásfüggvény?

$$F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

7.13. feladat. Legyen

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ez egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

7.14. feladat. Ketten megbeszélik, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Mi a várakozási idő eloszlásfüggvénye? Bizonyítsuk be, hogy a várakozási idő abszolút folytonos valószínűségi változó és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

7.15. feladat. Legyen $\Omega := [a, b]$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\omega) := \omega$. Határozzuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7.16. feladat. Legyen Ω egy egységnyi sugarú körlap és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Jelölje ξ a kiválasztott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7.17. feladat. Az előző feladatban határozzuk meg ξ^2 eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7.18. feladat. Legyen $\Omega := [-1, 1]$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\omega) := \omega$. Határozzuk meg $|\xi|$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7.19. feladat. Egy téglalap alakú asztalra ejtsünk le egy ceruzát. Legyen α a ceruza és az asztal hosszabb éle által bezárt szög. Határozzuk meg $\xi = \operatorname{tg} \alpha$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét, feltételezve, hogy α egyenletes eloszlású a $[0, \pi/2]$ intervallumon!

7.20. feladat. Oldjuk meg úgy is az előző feladatot, ha α irányszöget jelent, és feltételezzük, hogy egyenletes eloszlású a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon!

7.21. feladat. Legyen ξ a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású és $\lambda > 0$ rögzített konstans. Határozzuk meg $\eta = -\frac{\ln \xi}{\lambda}$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7.22. feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e ez sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg az eloszlásfüggvényt!

7.23. feladat. Van-e olyan valószínűségi változó, melynek

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

a sűrűségfüggvénye? Ha igen, akkor számoljuk ki annak valószínűségét, hogy ez a valószínűségi változó a $[\pi/3, \pi/2]$ intervallumba esik, továbbá határozzuk meg az eloszlásfüggvényét!

7.24. feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a}{x^2 + 4}.$$

Milyen a paraméter esetén lesz ez sűrűségfüggvény? Ebben az esetben mi az eloszlásfüggvény, továbbá mi a valószínűsége, hogy az ilyen eloszlású ξ valószínűségi változó a $[0, 2]$ intervallumba esik?

7.25. feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez sűrűségfüggvény-e, és ha igen, mi a hozzátartozó eloszlásfüggvény? Ha ξ sűrűségfüggvénye f, akkor határozza meg a $\mathrm{P}(0{,}5 \le \xi < 1{,}5)$ értékét!

8. gyakorlat

Várható érték és szórásnégyzet

8.1. feladat. Ruletten 1000 eurót felteszünk a pirosra. Mennyi a nyereményünk várható értéke és szórásnégyzete?

8.2. feladat. Egy kockával dobva a dobott számnak határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

8.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

8.4. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét!

8.5. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg kétszer egymás után ugyanazt nem dobjuk. Határozzuk meg a dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét!

8.6. feladat. Feldobunk egy pénzérmét. Ha írás jön ki, akkor 10 eurót nyerünk, ellenkező esetben 10 eurót veszítünk és újat dobunk, de már 20 euró téttel. A dobásokat addig folytatjuk, amíg írást nem kapunk, de addig minden játékban megkétszerezzük a tétet. Mennyi a nyereményünk várható értéke és szórásnégyzete?

8.7. feladat. Az előző feladatban mi van akkor, ha a játékosnál csak 1300 euró van, így nem tudja biztosan addig folytatni a dobásokat, amíg írást nem dob? Ekkor mennyi a nyeremény várható értéke és szórásnégyzete?

8.8. feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Mi a két pont távolságának várható értéke és szórásnégyzete?

8.9. feladat. Legyen Ω egy egységnyi sugarú körlap és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Jelölje ξ a kiválasztott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórásnégyzetét!

8.10. feladat. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A 7.23. feladatban beláttuk, hogy van ilyen ξ. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórásnégyzetét!

9. gyakorlat

Binomiális és Poisson-eloszlás

9.1. feladat. Az ötöslottóban mi a valószínűsége, hogy a joker számban nincs 0? (A joker szám hatjegyű, melyben minden számjegy 0-tól 9-ig egyforma valószínűséggel bármi lehet.)

9.2. feladat. Ezer újszülött között átlagban 516 fiú. Mi a valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

9.3. feladat. Rezső nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsit dereng, ezért 0,6 valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Mekkora valószínűséggel megy át Rezső a vizsgán, ha ehhez minimum 8 jó válasz kell?

9.4. feladat. Egy gép által gyártott termékek között naponta átlagosan 12 darab lesz selejtes, szórása $\sqrt{11{,}88}$. Hány terméket készít a gép naponta?

9.5. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75. Mekkora a valószínűsége, hogy 6 napon keresztül csak 3 napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan? Mennyi lesz 6 nap alatt a zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

9.6. feladat. Egy játékban p valószínűséggel nyerünk 1 forintot és $1-p$ valószínűséggel veszítünk 1 forintot. Ha n-szer játszunk egymásután, akkor adja meg az össznyeremény eloszlást, várható értékét és szórásnégyzetét!

9.7. feladat. Két doboz gyufát zsebre teszünk. Mindkét dobozban 50-50 szál gyufa van. Ezután, mikor gyufát kell gyújtani, találomra vagy az egyik vagy a másik dobozból veszünk ki egy szálat. Ezt addig folytatjuk, míg egy olyan dobozt nem választunk, amely már üres. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan 13 szál gyufa van még?

9.8. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy lövés célba talál 0,001. Mi a valószínűsége, hogy 2000 lövés közül legalább két lövés célba talál?

9.9. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy kollégium valamelyik lakója egy adott napon megbetegszik 0,002. Ha 1200 lakója van a kollégiumnak, hány ágyas betegszobát kell berendezni, ha azt akarjuk, hogy legfeljebb 0,01 legyen annak a valószínűsége, hogy egy betegnek nem jut ágy?

9.10. feladat. Egy postahivatalban az egy év alatt feladott címezetlen levelek száma 1017. Mi a valószínűsége, hogy egy nap kettőnél több címezetlen levelet adnak fel?

9.11. feladat. Egy adott éjszakán 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt két csillaghullást látunk, ha feltételezzük, hogy a csillaghullások száma Poisson-eloszlású?

9.12. feladat. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba van. Mi a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott oldalon nincs sajtóhiba?

9.13. feladat. Egy félkilós kalácsban átlagban 80 mazsolaszem található. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 5 dekagrammos szeletben nincs mazsola?

9.14. feladat. Egy lemezből 25 darab egyenlő nagyságú idomot vágnak ki. Egy lemezen a hibák száma Poisson-eloszlású 3,5 várható értékkel. Hány lemezt kell beszerezni, ha félmillió hibátlan idomot kell előállítani?

10. gyakorlat

Exponenciális és normális eloszlás

10.1. feladat. Egy szövőgépen a fonal szakadásáig eltelt idő exponenciális eloszlású, átlagban 2,5 óra. Mi a valószínűsége, hogy 8 óra alatt nem szakad el a fonal?

10.2. feladat. Egy boltban a vevők egymásutáni érkezésének időbeli eloszlása exponenciális, átlagban 1 perc. Mi a valószínűsége, hogy egy vevő érkezése után 5 percig nem jön újabb vevő?

10.3. feladat. Egy boltban átlagosan 6 percet kell sorban állni. Mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

10.4. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 6 percnél többet kell várni 0,1. Mi a valószínűsége, hogy 3 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

10.5. feladat. Egy izzólámpa típus élettartamának eloszlása normális, 1000 óra várható értékkel és 100 óra szórással. Az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre? Mekkora a valószínűsége, hogy egy izzó nem megy tönkre az első 1200 órában?

10.6. feladat. Egy fafeldolgozó üzemben a deszkák hossza normális eloszlású, átlagban 4 méter, a szórásuk 3 cm.

a) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm és 401 cm között?

b) Mi a valószínűsége, hogy egy deszka hossza 4 m-től legfeljebb 2,5 cm-rel tér el?

10.7. feladat. Egy gép vegyszert tölt üvegekbe. Ez az anyagmennyiség normális eloszlású, átlagban 100 gramm. Mekkora lehet a szórás, ha azt akarjuk, hogy a töltött mennyiség 98 %-a 98 és 102 gramm közé essen?

10.8. feladat. Egy gyár elektromos alkatrészeket készít. Ezek élettartama normális eloszlású 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár azt szeretné, hogy legfeljebb csak 5 % garanciaigény lépjen fel?

10.9. feladat. Egy gép vegyszert tölt zacskókba. A betöltött vegyszer tömege normális eloszlású 100 gramm várható értékkel és 2 gramm szórással. Egy nap alatt 1000 zacskót tölt meg a gép. Mi a valószínűsége, hogy ezek között maximum kettő olyan van, amelyben a vegyszer tömege nem 95 és 105 gramm közé esik?

10.10. feladat. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Mennyi az A, ha $\mathrm{P}(2 < \xi < A) \geq 0{,}5$?

10.11. feladat. Egy vállalathoz beérkező megrendelések száma normális eloszlású 10 szórással. Mennyi a várható értéke, ha 0,1 annak a valószínűsége, hogy 20-nál kevesebb megrendelés érkezik?

11. gyakorlat

Nagy számok törvénye, Moivre – Laplace-tétel

11.1. feladat. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól minimum 0,95 valószínűséggel legfeljebb csak 0,01-dal térjen el?

11.2. feladat. Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nál kisebb hibával megközelítse? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, azaz a 6-os dobásának a valószínűségét nem ismerjük!

11.3. feladat. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni legalább 0,9 valószínűséggel a találatok száma?

11.4. feladat. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95 %-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt százezer darab terméket kell készíteni. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

11.5. feladat. Egy gyárból kikerülő gyártmányok 10 %-a hibás. Egy bizonyos számú gyártmányból álló tételt a minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak, ha abban legfeljebb 12 % hibás. Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, ha azt akarjuk, hogy legalább 0,95 valószínűséggel elfogadhatónak minősítsék?

11.6. feladat. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak a valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad, 0,008 minden szálra. Határozzuk meg, hogy minimum 0,95 valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt!

11.7. feladat. Egy csavargyártó gép esetében megvizsgálunk 5000 csavart. Összesen 80 selejteset találunk. Határozzuk meg, hogy mennyi lehet maximum a pontos selejt arány az összes legyártott csavarra vonatkozólag legalább 0,9 valószínűséggel!

11.8. feladat. 1000 lövést adunk le egy célra. Minden lövés egymástól függetlenül 0,11 valószínűséggel talál. Mi a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebbszer találunk célba?

11.9. feladat. Egy gyárból kikerülő termékek 1 %-a selejtes. Ha 500 darab terméket vásárolunk, mi a valószínűsége, hogy ezek között a selejtesek száma 7 és 14 között lesz?

11.10. feladat. Ha minden lövés egymástól függetlenül 0,1 valószínűséggel talál célba, akkor hány lövés után lesz 0,9918 annak a valószínűsége, hogy 200-nál kevesebbszer találjuk el a célt?

11.11. feladat. Egy gyár egyforma energiaigényű gépei közül átlagosan 210 üzemel, ami az összes gépek 70 %-a. A többi meghibásodás miatt javításra vár vagy éppen javítják. A gépek meghibásodása egymástól független. Mennyi energiát kell biztosítani akkor, ha 0,999 valószínűséggel szeretnénk azt elérni, hogy minden működőképes gép valóban működni tudjon?

Megoldások

1. Események

1.1. megoldás.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6),\\ &(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Legyen $A := \{(1,1,i) : i = 1,2,\ldots,6\}$ továbbá $B := \{(1,i) : i = 2,3,\ldots,6\}$. Ekkor $\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ és $\mathcal{F}_2 := \{\emptyset, \Omega, B, \overline{B}\}$ σ-algebrák. Az A esemény akkor következik be, ha egymás után kétszer egyest dobunk. A B esemény akkor következik be, ha az első dobás egyes, de a második nem.

1.2. megoldás. $\Omega = \{6\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\{1,2,3,4,5\}^n \times \{6\}\big)$

1.3. megoldás.
a) $A \cup B$: a kiválasztott szám öttel osztható.
b) $A \cap B$: a kiválasztott szám nullára végződik.
c) $A \setminus B$: a kiválasztott szám ötre végződik.

1.4. megoldás. A dobókockával páros számot dobunk.

1.5. megoldás.
a) $A \cup B$: Zöldet vagy királyt húzunk. (11)
b) $A \cap B$: Zöld királyt húzunk. (1)
c) $\overline{A} \cap B$: Zöldtől különböző királyt húzunk. (3)
d) $\overline{A} \cup \overline{B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)
e) $A \cup \overline{B}$: Zöldet vagy királytól különbözőt húzunk. (29)
f) $A \setminus B$: Zöldet húzunk, de nem királyt. (7)
g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: Zöldet vagy királyt, de nem zöld királyt húzunk. (10)
h) $\overline{A \cup B}$: Nem zöldet és nem is királyt húzunk. (21)
i) $\overline{A \cap B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)

1.6. megoldás. Ez pontosan akkor következik be, ha A_k végtelen sok k esetén bekövetkezik.

1.7. megoldás.

a) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
c) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
d) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$
e) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$
f) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
g) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$
h) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$
i) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

1.8. megoldás. $C = A \cup B$ és $D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

1.9. megoldás. Tegyük fel, hogy B igaz, de A nem teljesül. Ekkor a 35 nem bukott diák jegyeinek összege $40 \cdot 3{,}7 - 5 = 143$. De ez ellentmondás, hiszen ezeknek a diákoknak legfeljebb csak négyes jegyük lehet, azaz a jegyeik összege maximum $35 \cdot 4 = 140$. Tehát, ha B igaz, akkor A is az, vagyis $B \subset A$.

1.10. megoldás. Tegyük fel, hogy A teljesül, de B nem. Ekkor a III-ból befolyt összeg kevesebb mint 2,5 millió euró, azaz a többiből összesen több mint 2,5 millió eurónak kellett befolynia, ami ellentmondás. Így A teljesülése esetén B-nek is teljesülnie kell, azaz A maga után vonja B-t.

2. Klasszikus valószínűségi mező

2.1. megoldás. Akkor klasszikus a valószínűségi mező, ha a két kockát megkülönböztetjük. A valószínűség $\frac{6}{36}$.

2.2. megoldás. $\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

2.3. megoldás. Az első és a második héten is $\binom{90}{5}$ lottóötöst húzhatnak ki, így az Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}^2$. Ebből a kedvező esetek száma $\binom{90}{5} \cdot 1$, hiszen az első héten tetszőlegesen húzhatnak, de a következő héten már csak azt húzhatják, amit előtte. Így a megoldás

$$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}^2} = \frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

2.4. megoldás. $\frac{5}{12}$

2.5. megoldás. $\frac{\binom{10}{4} \cdot 1^4 \cdot 5^6}{6^{10}} = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6$

2.6. megoldás. $\frac{x}{x+5} > 0{,}9$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni, ahol x a feketék száma. Ennek megoldása $x > 45$, azaz legalább 46 feketét kell a dobozba tenni.

2.7. megoldás. A prím számjegyek: 2, 3, 5, 7. Ezeket írjuk egy lapra, a többit pedig külön lapokra. Így 7 darab cetli lesz, amiknek a kisorsolásával úgy tudunk egy véletlenszerű sorrendet előállítani, hogy két prím között nem lesz prímtől különböző. Ugyanakkor a prímeket tartalmazó cetlire 4!-féleképpen írhatjuk fel a számokat, sorrendjüket tekintve. Ezért az eredmény $\frac{4!7!}{10!}$.

2.8. megoldás. $\frac{8!}{\binom{64}{8}}$

2.9. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^6}$, így ennek ellenkezője $1 - \frac{6!}{6^6}$ valószínűséggel következhet be.

2.10. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^5}$, így ennek ellenkezője $1 - \frac{6!}{6^5}$ valószínűséggel következhet be.

2.11. megoldás. $\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3}{3^{14}}$

2.12. megoldás. $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}}$

2.13. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy 6 kockával nem dobunk egyest $\frac{5^6}{6^6}$, míg annak esélye, hogy 12 kockával maximum egy darab egyest dobunk $\frac{5^{12}+12\cdot 5^{11}}{6^{12}}$. Az utóbbi nagyobb, ezért az a valószínűbb, hogy 6 kockával legalább egy darab egyest dobunk.

2.14. megoldás. Annak valószínűsége, hogy n pénzérmét feldobva nincs közöttük fej, $\frac{1}{2^n}$. Így annak kell teljesülni, hogy

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0{,}9.$$

Ennek megoldása $n > \log_2 10 \approx 3{,}32$, melyből következik, hogy legalább 4 pénzérmét kell feldobni.

2.15. megoldás. A kihúzott 6 lap között mind a négy szín megjelenése kétféle módon valósulhat meg: vagy 3 lap van az egyik színből, a többiből pedig 1-1-1, vagy két színből van 2-2 lap, a többiből pedig 1-1. Tekintsük először a 3-1-1-1 eloszlást. Ez például 3 piros, 1 zöld, 1 tök, és 1 makk esetén

$$\binom{8}{3}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1} = \binom{8}{3}8^3$$

különböző módon valósulhat meg. Azonban 4 különböző módon lehet a színeket összeállítani ilyen eloszlásban, így ezen esetek száma

$$4\binom{8}{3}8^3.$$

A 2-2-1-1 eloszlás esetén, először például számoljuk össze azon eseteket, amikor 2 piros, 2 zöld, 1 tök, és 1 makk lesz:

$$\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1} = \binom{8}{2}^2 8^2.$$

De ez az eloszlás $\binom{4}{2} = 6$ módon valósulhat meg. Összegezve, az eredmény:

$$\frac{4\binom{8}{3}8^3 + 6\binom{8}{2}^2 8^2}{\binom{32}{6}} \approx 0{,}1384.$$

2.16. megoldás. $\frac{365\cdot 364\cdot \ldots \cdot 336}{365^{30}} = \frac{365!}{335!\cdot 365^{30}} \approx 0{,}29.$

2.17. megoldás. Ha nem változtat a játékos az első tippen, akkor abban az esetben nyer, ha eltalálta a nyerő ajtót, melynek $\frac{1}{3}$ a valószínűsége. De ha változtat, akkor pontosan abban az esetben nyer, ha elsőre nem találta el a nyerő ajtót, hiszen ekkor a játékvezető a másik rossz ajtót nyitja ki, így amire változtat a játékos, ott biztosan autó van. Ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$. Összegezve tehát, igaza volt Marilyn Savantnak, azaz megváltoztatva a tippünket, kétszeresére nő az esélyünk a nyerésre.

Amint látjuk, az ember első reakciójához képest (ami az, hogy a változtatás nem befolyásolhatja a valószínűséget) meglepő a valóság, ugyanakkor nagyon egyszerű a magyarázat. Akkor miért váltott ki Savant érvelése ekkora ellenállást a matematikusok körében? Nos Savant eredeti magyarázata meglehetősen körülményes és nehezen érthető volt, ugyanakkor a matematikusok első gondolata, miszerint nem változik a valószínűség, annyira nyilvánvalónak tűnt számukra, hogy nem vették a fáradtságot Savant magyarázatának értelmezésére.

2.18. megoldás. Az `A1` cellába írja a következőt:

```
=INT(3*VÉL()+1)
```

Ezután nyomjon Entert, majd lépjen vissza az `A1` cellára. Az ott megjelenő szám jelentse annak az ajtónak a számát, amely mögött az autó van. A cella jobb alsó sarkában található kitöltő jelet (egy kis négyzet) egérrel húzza át a `B1` cellára. Az ott megjelent szám fogja jelenteni annak az ajtónak a számát, amelyre a játékos tippel elsőre. Az `C1` cellába írja a következőt:

```
=HA(A1=B1;1;0)
```

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám aszerint 1 vagy 0, hogy változtatás nélkül nyerünk vagy veszítünk. A `D1` cellába írja a következőt:

```
=HA(C1=0;1;0)
```

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám aszerint 1 vagy 0, hogy változtatással nyerünk vagy veszítünk. Jelölje ki az `A1:D1` cellatartományt, majd annak kitöltőjelét húzza le addig a sorig, amennyi játékot akar szimulálni. Az `E1` cellába írja a következőt:

```
=SZUM(C:C)/DARAB(C:C)
```

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám a változtatás nélküli játékokban a nyert játékok relatív gyakorisága. Végül a `C1` cella kitöltőjelét húzza át a `D1` cellára. Az ott megjelenő szám a változtatással történő játékokban a nyert játékok relatív gyakorisága. Ha megnyomja az F9 billentyűt, akkor egy újabb játéksorozat generálódik.

3. Feltételes valószínűség, események függetlensége

3.1. megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7, B pedig azt, hogy páratlan. Ekkor $A \subset B$ miatt $A \cap B = A$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Mivel $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ és $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, ezért $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

3.2. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik kockán hatos van, és B azt, hogy a dobott számok összege 12. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{25}{6^3}} = \frac{3}{5}.$$

3.3. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a 2. játékosnál nincs ász és B azt, hogy az 1. játékosnál nincs ász. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{\binom{28}{8}\binom{20}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}}{\frac{\binom{28}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}} = \frac{\binom{20}{8}}{\binom{24}{8}}.$$

3.4. megoldás. $\frac{1}{\binom{39}{2}\binom{90-40}{2}}$.

3.5. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy mindkét kocka hatost mutat, míg B azt, hogy legalább az egyik kocka hatos. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}.$$

3.6. megoldás. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az általunk i-ediknek felkeresett kocsmában van Rezső. Ekkor $\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Így

$$\mathrm{P}(A_4 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}\,) = \frac{\mathrm{P}(A_4 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}\,)}{\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}\,)} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(\,\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\,)} =$$
$$= \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1) - \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_3)} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{12}} = \frac{1}{9}.$$

3.7. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy másodikra pirosat húzunk, B pedig azt, hogy elsőre pirosat húzunk. Ekkor a szorzattétel alapján

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{70}.$$

3.8. megoldás. $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 1{,}5 - \mathrm{P}(A \cup B) \geq 0{,}5$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{0{,}8} \geq \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$$

3.9. megoldás. A feltételek miatt

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) &= 0{,}7\,\mathrm{P}(B)\\
\mathrm{P}(A \cap \overline{B}\,) &= 0{,}3\,\mathrm{P}(\,\overline{B}\,)\\
\mathrm{P}(A \cap B) &= 0{,}6\,\mathrm{P}(A).
\end{aligned}$$

Ezekből $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}\,) = 0{,}7\,\mathrm{P}(B) + 0{,}3\,\mathrm{P}(\,\overline{B}\,) = 0{,}4\,\mathrm{P}(B) + 0{,}3$, továbbá

$0{,}7\,\mathrm{P}(B) = 0{,}6\,\mathrm{P}(A)$. Így

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}4 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}7}\,\mathrm{P}(A) + 0{,}3,$$

amiből $\mathrm{P}(A) = \frac{21}{46}$.

3.10. megoldás. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ miatt A és B függetlenek, így $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Ebből

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \frac{5}{8}.$$

Másrészt ekkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek, ezért $\mathrm{P}(\,\overline{A} \mid \overline{B}\,) = \mathrm{P}(\,\overline{A}\,) = \frac{3}{4}$.

3.11. megoldás. Ha A és B függetlenek, akkor $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(\,\overline{B}\,) = \mathrm{P}(A)\big(1 - \mathrm{P}(B)\big) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}\,)$. Tehát A és $\overline{B}$ is függetlenek.

3.12. megoldás. Egyrészt $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A \cap B)\,\mathrm{P}(C) = 0$, mert $A \cap B = \emptyset$, másrészt $\mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big) = \mathrm{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = \big(\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\big)\,\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cup B)\,\mathrm{P}(C)$.

3.13. megoldás. $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}$, azaz $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Így A és B események nem függetlenek.

3.14. megoldás. Jelölje A azt, hogy másodikra hatost dobunk, B pedig azt, hogy elsőre hatost dobunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6},$$

másrészt $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}$. Így $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$, azaz A és B függetlenek.

3.15. megoldás. Mivel $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ és $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, ezért igaz az állítás.

3.16. megoldás. Jelölje A azt, hogy ászt húzunk, B pedig azt, hogy kőrt húzunk. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{52}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{13}{52}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Ebből kapjuk, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, azaz A és B függetlenek.

3.17. megoldás. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ és $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$, amiből következik, hogy A, B és C függetlenek.

3.18. megoldás. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

3.19. megoldás. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy Antal i-edik lövése talál, B_i pedig azt, hogy Béla i-edik lövése talál, továbbá C jelölje azt, hogy Antal győz. Ekkor

$$C = A_1 \cup (\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) \cup (\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) \cup \ldots$$

Mivel ez C-nek diszjunkt felbontása és az $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ események függetlenek, ezért

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) + \cdots =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\overline{A_1})\,\mathrm{P}(\overline{B_1})\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(\overline{A_1})\,\mathrm{P}(\overline{B_1})\,\mathrm{P}(\overline{A_2})\,\mathrm{P}(\overline{B_2})\,\mathrm{P}(A_3) + \cdots = \\
&= 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}3 + \cdots = \\
&= 0{,}3 \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}07^n = \frac{0{,}3}{1-0{,}07} = \frac{10}{31}.
\end{aligned}
$$

3.20. megoldás. $\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}$

3.21. megoldás. A függetlenség miatt

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A \cup B \mid B \cup C) = \frac{\mathrm{P}\big((A\cup B)\cap(B\cup C)\big)}{\mathrm{P}(B\cup C)} = \frac{\mathrm{P}\big(B \cup (A\cap C)\big)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap A\cap C)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)} = \frac{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)} = \\
&= \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{39}{60}.
\end{aligned}
$$

4. Teljes valószínűség tétele

4.1. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy célba találunk, B_1, hogy 0,5-es, B_2, hogy 0,7-es, végül B_3, hogy 0,8-es puskát választunk. Ekkor

$$
\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = 0{,}5 \cdot \frac{3}{6} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}8 \cdot \frac{2}{6}.
$$

4.2. megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az első dobozból húzunk, míg B_2 azt, hogy a másodikból, illetve A azt, hogy a kiválasztott csavar jó. Ekkor B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot, így a teljes valószínűség tétele értelmében

$$
\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = \frac{90}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{94}{100}\cdot\frac{1}{2}.
$$

4.3. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy hibátlan műszert választottunk, B_i, hogy olyan dobozból választunk, amelyben 100-ból i darab rossz. Ekkor

$$
\mathrm{P}(A) = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{100}{100}\cdot\frac{1}{6} + \frac{99}{100}\cdot\frac{5}{12} + \frac{98}{100}\cdot\frac{1}{4} + \frac{97}{100}\cdot\frac{1}{12} + \frac{96}{100}\cdot\frac{1}{12}.
$$

4.4. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a harmadik húzás piros, B_1, hogy az első két húzás 2 darab fehér, B_2, hogy az első két húzás 2 darab piros, végül B_3, hogy az első két húzás egyike fehér a másik pedig piros. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3) = \\
&= \frac{2}{5}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{0}{5}\cdot\frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}.
\end{aligned}
$$

4.5. megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre pirosat, B_2, hogy elsőre feketét és A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{P}(A\mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7}.$$

4.6. megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre két pirosat, B_2, hogy elsőre két feketét, B_3, hogy elsőre egy pirosat és egy feketét, továbbá A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A\mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)=\frac{4}{7}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}+\frac{3}{7}\cdot\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}.$$

4.7. megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre pirosat, B_2, hogy elsőre feketét, A_1, hogy másodikra pirosat, A_2, hogy másodikra feketét és C, hogy harmadikra pirosat húzunk. Ekkor a 4.5. feladat megoldása szerint $\mathrm{P}(A_1)=\frac{17}{42}$, melyből $\mathrm{P}(A_2)=\frac{25}{42}$. Így

$$\mathrm{P}(C)=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{P}(C\mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i)=\frac{6}{10}\cdot\frac{17}{42}+\frac{5}{10}\cdot\frac{25}{42}.$$

4.8. megoldás. Ha az egyik doboz üres lenne, akkor a fehér húzásának a valószínűsége $0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. De ez nem lehet jó megoldás, mert például, ha az egyik dobozba csak egy fehéret rakunk a többit pedig a másik dobozba, akkor a fehér húzásának a valószínűsége $1\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{19}\cdot\frac{1}{2}=\frac{14}{19}$, ami nagyobb $\frac{1}{4}$-nél. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a maximális valószínűség.

Rakjunk az egyik dobozba n fehéret és m feketét, a többit pedig a másik dobozba. Az előzőek miatt feltehetjük, hogy mindkét dobozban van golyó. Így a fehér húzásának a valószínűsége

$$\frac{n}{n+m}\cdot\frac{1}{2}+\frac{10-n}{20-n-m}\cdot\frac{1}{2}.$$

Azt kell belátni, hogy

$$\frac{n}{n+m}\cdot\frac{1}{2}+\frac{10-n}{20-n-m}\cdot\frac{1}{2}\le\frac{14}{19},$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$m(14m-185+9n)\le 5n(n-1). \tag{$*$}$$

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $n\le 5$, így $(*)$ bal oldala maximum $140-185+{}+45=0$, jobb oldala pedig nemnegatív. Ezzel $(*)$ bizonyított. Tehát a rabnak akkor a legnagyobb az esélye, ha az egyik dobozba egy fehéret rak, a többit pedig a másikba.

4.9. megoldás. Miután kiválasztottuk a játékszabálynak megfelelő cetlit, folytassuk a cetlik húzását mindaddig, amíg el nem fogynak. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy i-ediknek húztuk ki a 10-es cetlit, A pedig azt, hogy a 10-es cetli lett kiválasztva. Az A pontosan akkor következik be, ha $i\ge 6$ és az első $i-1$ kihúzott cetli között a legnagyobb az első ötben volt. Így

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{P}(A\mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)=\sum_{i=6}^{10}\mathrm{P}(A\mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)=\sum_{i=6}^{10}\frac{5}{i-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\sum_{i=5}^{9}\frac{1}{i}\approx 0{,}373.$$

4.10. megoldás. Jelölje n a dobozok számát. Ekkor az utolsó dobozban a pirosak száma $2+(n-1)5=597$, melyből $n=120$. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy egy olyan dobozt választottunk, melyben a pirosak száma $2+(i-1)5$, A pedig azt, hogy a kiválasztott dobozból pirosat húzunk. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \sum_{i=1}^{120} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{120} \frac{2+(i-1)5}{600}\cdot\frac{1}{120} = \\ &= \frac{1}{600\cdot 120}\sum_{i=1}^{120}\bigl(2+(i-1)5\bigr) = \frac{1}{600\cdot 120}\cdot\frac{2+597}{2}\cdot 120 = \frac{599}{1200}.\end{aligned}$$

4.11. megoldás. *a)* Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével tízből hétszer dobunk fejet, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = \binom{10}{7}0{,}4^7\cdot 0{,}6^3\cdot\frac{1}{2} + \binom{10}{7}0{,}7^7\cdot 0{,}3^3\cdot\frac{1}{2}.$$

b) Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével elsőre fejet dobunk, A_2, hogy a kiválasztott érmével másodikra fejet dobunk, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = 0{,}4\cdot\frac{1}{2} + 0{,}7\cdot\frac{1}{2} = \frac{1{,}1}{2}.$$

Hasonlóan $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1{,}1}{2}$. Másrészt

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2) = \mathrm{P}(A_1\cap A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1\cap A_2 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = 0{,}4^2\cdot\frac{1}{2} + 0{,}7^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{0{,}65}{2}.$$

Így $\mathrm{P}(A_1\cap A_2) \neq \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)$ miatt a dobások eredményei nem függetlenek egymástól.

4.12. megoldás. Az I. jelű dobozban legyen 7 piros fejű és 4 fekete fejű gyufaszál, a másikat II. módon jelöljük, továbbá:
A_1: elsőre az I. dobozt választjuk;
A_2: elsőre a II. dobozt választjuk;
B_1: első húzás piros fejű;
B_2: első húzás fekete fejű;
C_1: másodikra az I. dobozt választjuk;
C_2: másodikra a II. dobozt választjuk;
D: második húzás piros fejű;
Tetszőleges $i,j,k\in\{1,2\}$ esetén az $A_i\cap B_j$ és C_k függetlensége, továbbá a szorzat tétel alapján

$$\mathrm{P}(A_i\cap B_j\cap C_k) = \mathrm{P}(A_i\cap B_j)\,\mathrm{P}(C_k) = \mathrm{P}(B_j \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(B_j \mid A_i).$$

Az $A_i\cap B_j\cap C_k$ $(i,j,k\in\{1,2\})$ teljes eseményrendszer, így a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{i,j,k=1}^{2} \mathrm{P}(D \mid A_i \cap B_j \cap C_k)\,\mathrm{P}(A_i \cap B_j \cap C_k) =$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^{2} \mathrm{P}(D \mid A_i \cap B_j \cap C_k)\,\mathrm{P}(B_j \mid A_i).$$

Ebből már könnyen számolható az eredmény, hiszen például

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_1) = \frac{7}{11} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(D \mid A_1 \cap B_1 \cap C_1) = \frac{6}{10}.$$

4.13. megoldás. Ha nem változtat, akkor el kell találni egy nyerő ajtót a nyeréshez, melynek esélye:

$$\frac{n}{n+m}.$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor változtat a játékos. Vezessük be a következő jelöléseket:
A: a játékos nyer,
B: elsőre nyerő ajtót választ,
$\overline{B}$: elsőre nem nyerő ajtót választ.
Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint:

$$\mathrm{P}(A) = \underbrace{\mathrm{P}(A \mid B)}_{\frac{n-1}{n+m-(k+1)}}\underbrace{\mathrm{P}(B)}_{\frac{n}{n+m}} + \underbrace{\mathrm{P}(A \mid \overline{B})}_{\frac{n}{n+m-(k+1)}}\underbrace{\mathrm{P}(\overline{B})}_{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m} \cdot \underbrace{\frac{n+m-1}{n+m-k-1}}_{S>1} > \frac{n}{n+m}.$$

Tehát nagyobb eséllyel nyer a játékos, ha változtat a döntésén. Speciálisan, ha $n = 1$ és $k = m - 1$, akkor $S = \frac{1+m-1}{1+m-m} = m$, azaz az eredeti valószínűség m-szeresével nyer, ha változtat. Másrészt, ha k rögzített, akkor $n + m$ növelésével S közelít 1-hez, vagyis a változtatással egyre kisebb mértékben nő a valószínűség a változtatással.

5. Bayes-tétel

5.1. megoldás. Jelölje B_i, hogy a kiválasztott terméket az i-edik gép gyártotta és A azt, hogy a kiválasztott termék selejtes. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}25}{0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}04 \cdot 0{,}35 + 0{,}02 \cdot 0{,}4}.$$

5.2. megoldás. Jelölje B_1 azt, hogy pontot adtak le, B_2 azt, hogy vonalat adtak le, és A azt, hogy pontot vettünk. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}.$$

5.3. megoldás. Jelölje B_1 azt, hogy a kiválasztott termék valójában első osztályú,

B_2 azt, hogy valójában nem első osztályú, és A azt, hogy a kiválasztott termék első osztályú minősítést kapott. Ekkor

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\, P(B_1)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}75}{0{,}98 \cdot 0{,}75 + 0{,}05 \cdot 0{,}25}$$

és

$$P(B_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid B_2)\, P(B_2)}{P(\overline{A} \mid B_1)\, P(B_1) + P(\overline{A} \mid B_2)\, P(B_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}25}{0{,}02 \cdot 0{,}75 + 0{,}95 \cdot 0{,}25}.$$

5.4. megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy a vándor Igazfalvában van, B_2, hogy Hazugfalvában van és A azt, hogy a lakos azt mondja, hogy Igazfalvában vannak. Ekkor

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)\, P(B_2)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2)} = \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{17}.$$

5.5. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a harmadik húzás piros, B_1, hogy az első két húzás 2 darab fehér, B_2, hogy az első két húzás 2 darab piros, végül B_3, hogy az első két húzás egyike fehér a másik pedig piros. Ekkor

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\, P(B_1)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{0}{5} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

5.6. megoldás. Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott érmével 30 dobásból 25-ször fejet dobtunk, B_1 jelölje, hogy a cinkelt érmét választottuk, és B_2, hogy az igazságosat választottuk. Ekkor

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\, P(B_1)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2)} =$$

$$= \frac{\binom{30}{25} \cdot 0{,}75^{25} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}5}{\binom{30}{25} \cdot 0{,}75^{25} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}5 + \binom{30}{25} \cdot 0{,}5^{25} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}9987.$$

5.7. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével fejet dobunk, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\, P(B_1)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2)} = \frac{0{,}4 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{11}.$$

5.8. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy mindhárom húzás fehér, B_i pedig azt, hogy egy olyan dobozt választottunk, amelyben pontosan i darab fehér golyó van. Ekkor

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)\, P(B_2)}{\sum_{i=1}^{6} P(A \mid B_i)\, P(B_i)} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^3 \frac{1}{6}}{\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i}{6}\right)^3 \frac{1}{6}} = \frac{8}{441}.$$

5.9. megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a hallgató helyesen válaszol az adott kérdésre, B_1, hogy a hallgató tudja a helyes választ, B_2 pedig azt, hogy nem. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}2} = \frac{12}{13}.$$

5.10. megoldás. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a vizsgált személy az első teszt szerint fertőzött, A_2, hogy mindkét teszt szerint fertőzött, B_1, hogy a vizsgált személy egészséges, B_2 pedig azt, hogy fertőzött. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_1) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}995}{0{,}01 \cdot 0{,}995 + 0{,}99 \cdot 0{,}005},$$

ami kb. 0,6678, ami azt jelenti, hogy ha az első teszt valakit fertőzöttnek talál, akkor nagyobb az esélye annak, hogy valójában egészséges. Másrészt

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_2 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01^2 \cdot 0{,}995}{0{,}01^2 \cdot 0{,}995 + 0{,}99^2 \cdot 0{,}005},$$

ami kb. 0,0199. Tehát azon személyeknek, akiknél mindkét teszt pozitív volt, már csak kb. 2 %-a egészséges. Három teszt esetén ugyanez az arány csak 0,2 ‰.

5.11. megoldás. A megoldás lényeges eleme, hogy amennyiben a kérdező rabot mentik fel, akkor a másik két rab közül az őr bárkit megnevezhet. Tegyük fel, hogy ebben az esetben az őr sorshúzással dönti el, kit nevezzen meg.

Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az őr a másik két rab közül az elsőt nevezi meg, B_2, hogy a második rabot nevezi meg, A_1, hogy a másik két rab közül az első kap kegyelmet, A_2, hogy a másik két rab közül a második kap kegyelmet, végül A_3, hogy a kérdező rab kap kegyelmet. Ekkor az őr szerint

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1}{3},$$

míg a rab szerint

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1}{2}.$$

Az igazság a Bayes-tétel értelmében

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) &= \frac{\mathrm{P}(B_1 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B_1 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B_1 \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(B_1 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_3 \mid B_2) &= \frac{\mathrm{P}(B_2 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B_2 \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(B_2 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Amint látható, feltettük, hogy $\mathrm{P}(B_1 \mid A_3) = \frac{1}{2}$ és $\mathrm{P}(B_2 \mid A_3) = \frac{1}{2}$, azaz, ha a másik két rab közül bárkit megnevezhet az őr, akkor azt egyenlő eséllyel teszi. Ilyen feltétellel tehát az őrnek van igaza. Általánosítva, $\mathrm{P}(B_1 \mid A_3) = x$ és $\mathrm{P}(B_2 \mid A_3) = 1 - x$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \frac{x}{1+x} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1-x}{2-x}.$$

5.12. megoldás. Az `A1` cellába írja a következőt:

```
=INT(3*VÉL()+1)
```

A kapott érték jelenti annak a rabnak a sorszámát, aki kegyelmet kap. Tegyük fel, hogy a 3. rab kérdezte az őrt. A `B1` cellába írja a következőt:

```
=HA(A1=1;2;HA(A1=2;1;HA(INT(2*VÉL()+1)=1;1;2)))
```

A kapott érték jelenti annak a rabnak a sorszámát, akit az őr megnevez. A `C1` cellába írja a következőt:

```
=HA(B1=1;1;0)
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy az első rabot nevezte-e meg az őr vagy sem. A `D1` cellába írja a következőt:

```
=HA(A1=3;1;0)
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy a 3. rab kap-e kegyelmet vagy sem. Az `E1` cellába írja a következőt:

```
=C1*D1
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy a B_1 feltétel mellett teljesül-e az A_3 esemény vagy sem. Jelölje ki az `A1:E1` cellatartományt, majd a kitöltő jelet húzza le addig a sorig, ahány szimulációt akar csinálni. Végül az `F1` cellába írja a következőt:

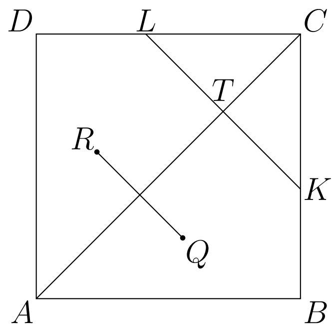
```
=SZUM(E:E)/SZUM(C:C)
```

A kapott érték az A_3 esemény B_1 feltétel melletti relatív gyakorisága.

6. Geometriai valószínűségi mező

6.1. megoldás. Ha az i. koncentrikus kör sugarát r_i jelöli, akkor $r_i^2\pi - r_{i-1}^2\pi = \frac{\pi}{10}$, azaz $r_i^2 - r_{i-1}^2 = 0{,}1$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 9$ és $r_0 = 0$. Ebből kapjuk, hogy $r_i = \sqrt{0{,}1i}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 9$.

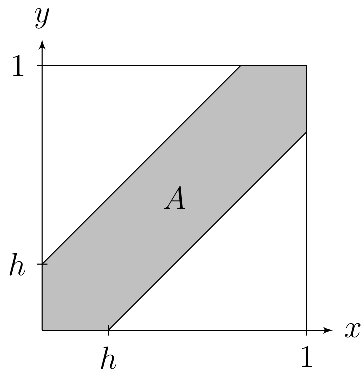
6.2. megoldás. Az AC átlóra mérjünk fel egységnyi távolságot az A ponttól. A kapott pontot jelöljük T-vel. A T pontban állítsunk merőlegest az AC átlóra, amely a DC oldalt az L pontban, a CB oldalt pedig K pontban metszi. Ekkor a keresett valószínűség az $ABKLD$ ötszög területe, ami $TC = \sqrt{2} - 1$ miatt $1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 2$.



6.3. megoldás. Legyen a szakasz a $[0,1]$ intervallum, a kiválasztott két pont pedig x és y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| < h\}$$

a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-h)^2 = 2h - h^2$.

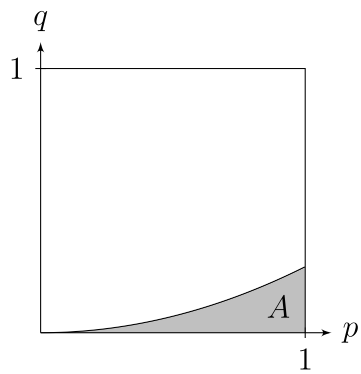
6.4. megoldás. Vegyük észre, hogy ez a 6.3. feladat speciális esete $h = \frac{1}{6}$ választással. Így a valószínűség $\frac{11}{36}$.

6.5. megoldás. Ez a 6.3. feladatban megfogalmazott esemény ellentettje $h = \frac{1}{3}$ választással. Így a valószínűség $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

6.6. megoldás. $p, q \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, továbbá a keresett halmaz

$$A = \{(p, q) \in \Omega : q \leq 0{,}25p^2\}$$

a következő ábrán látható:

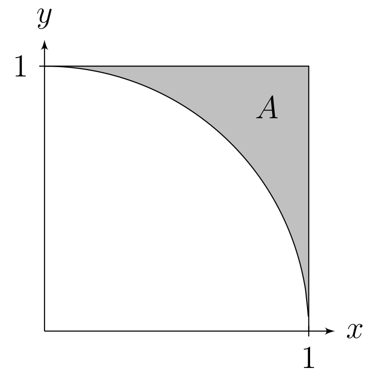


Így $\mathrm{P}(A) = \int\limits_0^1 0{,}25p^2 \, \mathrm{d}p = \frac{1}{12}$.

6.7. megoldás. Legyen a kiválasztott két szám x és y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 > 1\}$$

a következő ábrán látható:

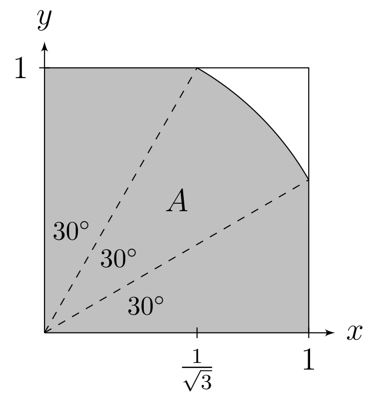


Így $\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

6.8. megoldás. Legyen a kiválasztott két szám x és y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. A keresett halmaz

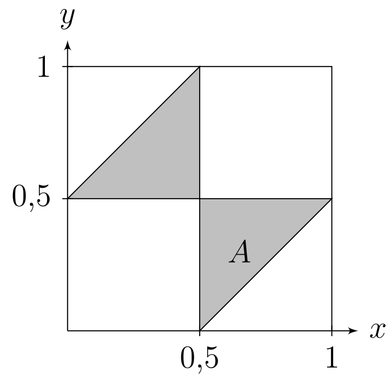
$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 < \frac{4}{3}\right\}$$

a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = \frac{\frac{4}{3}\pi}{12} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}{2} \cdot 2 = \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{9}$.

6.9. megoldás. A pálca legyen egységnyi hosszúságú, és a két töréspont távolsága az egyik végponttól legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Ha $x \leq y$, akkor a három pálca hossza x, $y - x$ és $1 - y$. Ezek közül bármely kettő összegének nagyobbnak kell lennie, mint a harmadik. Ezért az $y > 0{,}5$, $y < x + 0{,}5$ és $x < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülni. Ha $y < x$, teljesül, akkor az $x > 0{,}5$, $x < y + 0{,}5$ és $y < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek kell egyszerre teljesülni. Tehát a keresett A halmaz



Így $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$.

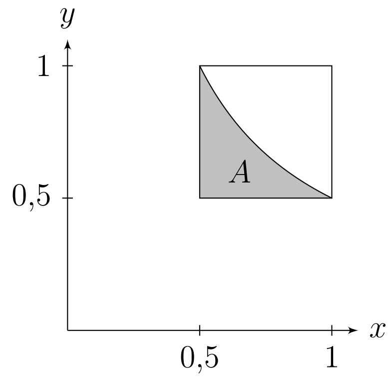
6.10. megoldás. A pálca legyen egységnyi hosszúságú. Az első törés után a hosszabb pálca hosszát jelöljük x-szel, a második törés után keletkező hosszabb pálca hosszát pedig xy-nal. Ekkor $x, y \in [0{,}5; 1]$ miatt $\Omega = [0{,}5; 1] \times [0{,}5; 1]$. A három pálca hossza $1 - x$, $x(1 - y)$ és xy. Ezekből háromszög pontosan akkor rakható ki, ha

$$1 - x + x(1 - y) > xy,$$

hiszen a másik két egyenlőtlenség mindig teljesül az adott jelölésekkel. Tehát a keresett halmaz

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega : y < \frac{1}{2x} \right\}$$

a következő ábrán látható:



Így

$$\mathrm{P}(A) = 4 \left(\int_{0{,}5}^{1} \frac{1}{2x} \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - 1.$$

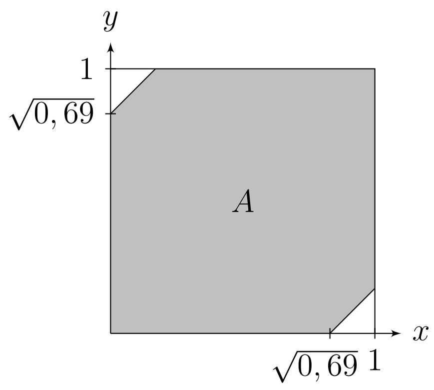
6.11. megoldás. Ekkor $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 2]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$. A következő három egyenlőtlenségnek kell teljesülni: $x + y > 1$, $x + 1 > y$ és $y + 1 > x$. A harmadik a feltételekkel mindig teljesül egy 0 területű helyet kivéve, így csak az első kettőt kell vizsgálni. Felrajzolva kapjuk, hogy az $A := \{(x, y) \in \Omega : x+y > 1, x+1 > y\}$ területe 1. Mivel Ω területe 2, ezért a valószínűség 0,5.

6.12. megoldás. Az $ABCD$ egység oldalú négyzeten az AB és DC oldalakon válasszuk ki a két pontot. Az AB oldalon lévő pontnak az A ponttól mért távolsága legyen x.

A DC oldalon lévő pontnak a D ponttól mért távolsága legyen y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x,y) \in \Omega : (x-y)^2 + 1 < 1{,}3^2\}$$

a következő ábrán látható:

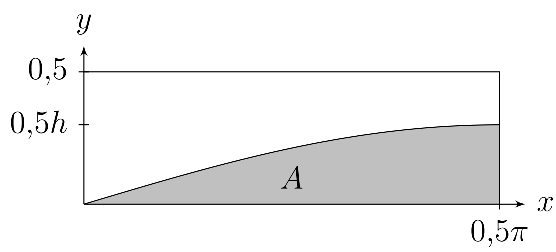


Így $\mathrm{P}(A) = 1 - (1 - \sqrt{0{,}69})^2 \approx 0{,}9713$.

6.13. megoldás. Jelölje x a tű és az egyenesek által bezárt szöget, y pedig a tű középpontjának és a hozzá legközelebb eső egyenesnek a távolságát. Ekkor $0 \leq x \leq$ $\leq 0{,}5\pi$ és $0 \leq y \leq 0{,}5$ miatt $\Omega = [0; 0{,}5\pi] \times [0; 0{,}5]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x,y) \in \Omega : y \leq 0{,}5h \sin x\}.$$

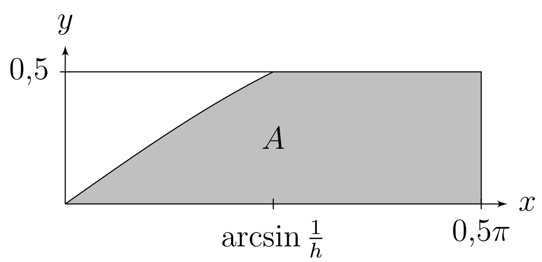
Ha $0 < h \leq 1$, akkor



Így

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{0{,}5\pi} 0{,}5h \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{2h}{\pi}.$$

Ha $h > 1$, akkor



Így ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{h}} 0{,}5h \sin x \,\mathrm{d}x + 0{,}5 \left(0{,}5\pi - \arcsin\frac{1}{h} \right) \right) =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left(h - h\cos\arcsin\frac{1}{h} + 0{,}5\pi - \arcsin\frac{1}{h} \right).$$

7. Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

7.1. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, ahol ξ a találatok számát jelöli. A kapott eloszlást hipergeometrikus eloszlásnak nevezzük.

7.2. megoldás. Jelölje xy azt, hogy az első kockán x, a második kockán pedig y az eredmény, továbbá $\xi := x + y$. Ekkor az Ω elemei

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Vegyük észre, hogy a ξ különböző értékeire a hozzá tartozó elemek átlósan helyezkednek el az előbbi elrendezésben. Például $\xi = 4$ a 31, 22 és 13 esetekben teljesül. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi = 2) &= \mathrm{P}(\xi = 12) = \frac{1}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 3) &= \mathrm{P}(\xi = 11) = \frac{2}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 4) &= \mathrm{P}(\xi = 10) = \frac{3}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 5) &= \mathrm{P}(\xi = 9) = \frac{4}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 6) &= \mathrm{P}(\xi = 8) = \frac{5}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 7) &= \frac{6}{36}.
\end{aligned}$$

7.3. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{10}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{8}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{4}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{2}{36}$.

7.4. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ahol ξ a dobások száma. A kapott eloszlást geometriai eloszlásnak nevezzük.

7.5. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{9 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot 6}{\binom{15}{3}} = \frac{216}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}$.

7.6. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$, ahol ξ a dobások száma és $p = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$ a kettes találat valószínűsége. A kapott eloszlást binomiális eloszlásnak nevezik.

7.7. megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{k-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-3} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$ $(k = 3, 4, \ldots)$, ahol ξ a dobások száma.

7.8. megoldás. Az arányossági tényező legyen λ, azaz $\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda}{k!}$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{k!} = \lambda e = 1,$$

melyből $\lambda = e^{-1}$.

7.9. megoldás. $F_\xi(5{,}2) = \mathrm{P}(\xi < 5{,}2) = \mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$, ahol ξ a dobott számok összege.

7.10. megoldás. Az F értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, másrészt $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ miatt az F monoton növekvő és ∞-ben 1 a határértéke. Mivel $F(x) = 0$, ha $x < 1$, ezért F-nek $-\infty$-ben 0 a határértéke. Könnyen látható, hogy F minden pontban folytonos. Tehát ez eloszlásfüggvény.

7.11. megoldás. Mivel F minden pontban folytonos és csak az $x = 1$ pontban nem differenciálható, ezért ξ abszolút folytonos, továbbá

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0' = 0, \text{ha } x < 1, \\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

7.12. megoldás. Egyik sem eloszlásfüggvény.

7.13. megoldás. Az F monoton növekvő, $-\infty$-ben 0, ∞-ben 1 a határértéke, folytonos és $x = 0$ pontot kivéve mindenütt differenciálható. Így ez egy abszolút folytonos ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, továbbá F deriválásával kapjuk a sűrűségfüggvényét:

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

7.14. megoldás. A 6.3. feladat szerint, ha ξ a várakozási idő, akkor

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 2x - x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Mivel ez folytonos és csak az $x = 1$ pontban nem differenciálható, ezért ξ abszolút folytonos, továbbá F_ξ deriválásával kapjuk, hogy

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

7.15. megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $x \in [a, b]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < a$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > b$. A kapott eloszlást az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásnak nevezik. Az eloszlásfüggvény folytonos és két pont kivételével mindenhol differenciálható, így ξ abszolút folytonos, továbbá a differenciálható pontokban a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja. Így $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}$, ha $x \in [a,b]$ és $f_\xi(x) = 0$, ha $x \notin [a,b]$.

7.16. megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2$, ha $x \in [0,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Könnyen látható, hogy ξ abszolút folytonos, továbbá $f_\xi(x) = 2x$, ha $x \in [0,1]$ és $f_\xi(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.17. megoldás. $F_{\xi^2}(x) = \mathrm{P}(\xi^2 < x) = \mathrm{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) = x$, ha $x \in [0,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Azaz ξ^2 a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Így a sűrűségfüggvény $f_{\xi^2}(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$ és $f_{\xi^2}(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.18. megoldás. Korábban láttuk, hogy ξ a $[-1,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, azaz $F_\xi(x) = \frac{x+1}{2}$, ha $x \in [-1,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < -1$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Ezért $F_{|\xi|}(x) = \mathrm{P}(|\xi| < x) = \mathrm{P}(-x < \xi < x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x) = \frac{x+1}{2} - \frac{-x+1}{2} = x$, ha $x \in [0,1]$, $F_{|\xi|}(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_{|\xi|}(x) = 1$, ha $x > 1$, azaz $|\xi|$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Ebből $f_{|\xi|}(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$ és $f_{|\xi|}(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.19. megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\operatorname{tg}\alpha < x) = \mathrm{P}(\alpha < \operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg} x - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$, ha $x \ge 0$ és $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$. Így $f_\xi(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$, ha $x \ge 0$ és $f_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$.

7.20. megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\operatorname{tg}\alpha < x) = \mathrm{P}(\alpha < \operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$. Így $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. A kapott eloszlást standard Cauchy-eloszlásnak nevezzük.

7.21. megoldás. $F_\eta(x) = \mathrm{P}\left(-\frac{\ln\xi}{\lambda} < x\right) = \mathrm{P}\left(\xi > e^{-\lambda x}\right) = 1 - F_\xi\left(e^{-\lambda x}\right) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, hiszen $0 < e^{-\lambda x} \le 1$ minden $x \ge 0$ esetén. Másrészt $F_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Így $f_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$ és $f_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. A kapott eloszlást λ paraméterű exponenciális eloszlásnak nevezzük.

7.22. megoldás. f nemnegatív, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tehát f sűrűségfüggvény. Így

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^x = \frac{x^2 + x}{2},$$

ha $0 \le x < 1$, illetve

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0,$$

ha $x < 0$ és

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \left(t + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t + \int_1^x 0 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^1 + 0 = 1,$$

ha $x \geq 1$.

7.23. megoldás. Az $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = 1$, vagyis ez sűrűségfüggvénye valamely ξ valószínűségi változónak. Ekkor

$$\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Másrészt $F_\xi(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[-\cos t]_0^x = \frac{1}{2}(1-\cos x)$, ha $0 < x < \pi$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x \geq \pi$.

7.24. megoldás. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1/2}{(x/2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\lim\limits_{t\to\infty}\,[\mathrm{arctg}(x/2)]_{-t}^{t} = \frac{a}{2}\pi = 1$, melyből $a = \frac{2}{\pi}$. Ekkor $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{2/\pi}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1/2}{(t/2)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\lim\limits_{h\to-\infty}\,[\mathrm{arctg}(t/2)]_h^x =$ $= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Ebből $\mathrm{P}(0 \leq \xi \leq 2) = F_\xi(2) - F_\xi(0) = \frac{1}{4}$.

7.25. megoldás. f nemnegatív és az integrálja egy olyan háromszög területe, melynek alapja 2 egység, magassága pedig 1 egység hosszú. Így f sűrűségfüggvény, másrészt

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2, & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

$\mathrm{P}(0{,}5 \leq \xi < 1{,}5) = F_\xi(1{,}5) - F_\xi(0{,}5) = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

8. Várható érték és szórásnégyzet

8.1. megoldás. Jelölje ξ a nyereményünk értékét euróban. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = 1000 \cdot \frac{18}{37} + (-1000) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1000}{37}$$
$$\mathrm{E}\,\xi^2 = 1000^2 \cdot \frac{18}{37} + (-1000)^2 \cdot \frac{19}{37} = 1000^2$$
$$\mathrm{D}^2\,\xi = 1000^2 - \frac{1000^2}{37^2} = \frac{1368}{1369} \cdot 10^6.$$

8.2. megoldás. Jelölje ξ a dobott számot. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$
$$\mathrm{E}\,\xi^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

8.3. megoldás. Jelölje ξ az összeget. A 7.2. feladat megoldása alapján

$$\mathrm{E}\,\xi = (2+12)\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\frac{3}{36} + (5+9)\frac{4}{36} + (6+8)\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} = 7$$

és

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = (2^2+12^2)\frac{1}{36}+(3^2+11^2)\frac{2}{36}+(4^2+10^2)\frac{3}{36}+(5^2+9^2)\frac{4}{36}+(6^2+8^2)\frac{5}{36}+7^2\cdot\frac{6}{36} = \frac{1974}{36},$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1974}{36} - 7^2 = \frac{35}{6}.$$

A 8.2. feladat alapján is megoldható, felhasználva a várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságait. Jelölje ξ_1 az első, ξ_2 pedig a második kocka eredményét. Ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}(\xi_1+\xi_2) = \mathrm{E}\,\xi_1 + \mathrm{E}\,\xi_2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$
$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{D}^2(\xi_1+\xi_2) = \mathrm{D}^2\,\xi_1 + \mathrm{D}^2\,\xi_2 = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.$$

8.4. megoldás. A megoldásban felhasználjuk, hogy $-1 < x < 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(kx^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = \left(x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Jelölje ξ a dobások számát. Így a 7.4. feladat alapján

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6$$
$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1+\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} = 66$$
$$\mathrm{D}^2\,\xi = 66 - 6^2 = 30.$$

8.5. megoldás. Jelölje ξ a dobások számát. Mivel az első dobást leszámítva minden dobásnál $\frac{1}{6}$ az esélye, hogy ugyanazt dobjuk, mint előtte, ezért $\xi-1$ eloszlása megegyezik az előző feladatban található valószínűségi változó eloszlásával. Így $\mathrm{E}(\xi-1) = \mathrm{E}\,\xi - 1 = 6$, azaz $\mathrm{E}\,\xi = 7$ és $\mathrm{D}^2(\xi-1) = \mathrm{D}^2\,\xi = 30$.

8.6. megoldás. Ha elsőre írást dobunk, akkor a nyereményünk 10 euró. Ha csak az n-edik dobás írás ($n \geq 2$), akkor a nyereményünk

$$-10 - 20 - \cdots - 2^{n-2}\cdot 10 + 2^{n-1}\cdot 10 = 10.$$

Tehát minden esetben 10 eurót nyerünk, vagyis a nyereményünket jelentő valószínűségi változó értéke konstans 10. Így a várható érték 10 euró, a szórásnégyzet pedig 0 euró. Vegyük észre, hogy nem használtuk ki azt, hogy mekkora valószínűséggel nyerünk n-edik dobásra. Ez azt jelenti, hogy ugyanezt kaptuk volna akkor is, ha például egy kockával játszunk és akkor nyerünk, ha hatost dobunk.

8.7. megoldás. Ha az első hét dobás mindegyike fej, akkor a veszteség $10+20+40+$ $+80+160+320+640=1270$ euró, azaz a nyolcadik dobásra már nem tud a játékos újabb dupla tétet feltenni, így abba kell hagynia a játékot. Tehát, az előző feladat alapján, ha az első hét dobás valamelyike írás, akkor 10 euró a nyeremény, de ha a hét dobás mindegyike fej, akkor 1270 euró a veszteség. Így

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi &= 10\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+10\cdot\frac{1}{2^7}+(-1270)\frac{1}{2^7}=0\\ \mathrm{D}^2\,\xi=\mathrm{E}\,\xi^2 &= 10^2\cdot\frac{1}{2}+10^2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+10^2\cdot\frac{1}{2^7}+(-1270)^2\frac{1}{2^7}=12700.\end{aligned}$$

8.8. megoldás. Jelölje ξ a két pont távolságát. A 6.3. feladat alapján $F_\xi(x)=2x-x^2$, ha $x\in[0,1]$, $F_\xi(x)=0$, ha $x<0$ és $F_\xi(x)=1$, ha $x>1$. Ebből $f_\xi(x)=2-2x$, ha $x\in[0,1]$ és $f_\xi(x)=0$, ha $x\notin[0,1]$. Így

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi &= \int_0^1 x(2-2x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\\ \mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_0^1 x^2(2-2x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{6}\\ \mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}.\end{aligned}$$

8.9. megoldás. A 7.16. feladat alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi &= \int_0^1 x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\\ \mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_0^1 x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}\\ \mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.\end{aligned}$$

8.10. megoldás. A feladatot parciális integrálással oldjuk meg.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,\xi &= \int_0^\pi \frac{1}{2}x\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x =\\ &= \left[-\frac{1}{2}x\cos x\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{2}\sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_0^\pi \frac{1}{2}x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos x\right]_0^\pi + [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2\cos x + x\sin x + \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - 2 \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2.
\end{aligned}
$$

9. Binomiális és Poisson-eloszlás

9.1. megoldás. Legyen ξ a kisorsolt nullák száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \binom{6}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}9^6.$$

9.2. megoldás. Legyen ξ a fiúk száma egy 6 gyermekes családban. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}516$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0{,}516^k \cdot 0{,}484^{6-k}.$$

9.3. megoldás. Legyen ξ a jó válaszok száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 10$ renddel és $p = 0{,}6$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} \approx 0{,}1673.$$

9.4. megoldás. Legyen ξ a selejtesek száma n darab termékből. Ekkor ξ n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású, ahol p annak a valószínűsége, hogy selejtes egy termék. Így

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}\,\xi &= np = 12 \\ \mathrm{D}^2\,\xi &= np(1-p) = 11{,}88 \end{aligned}\right\}$$

melyből $p = 0{,}01$ és $n = 1200$.

9.5. megoldás. Legyen 6 napból ξ a zavartalan napok száma. Ez $n = 6$ rendű és $p = 0{,}75$ paraméterű binomiális eloszlású, így $\mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{6}{3} 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3$ és $\mathrm{E}\,\xi = np = 6 \cdot 0{,}75$.

9.6. megoldás. Legyen ξ az össznyeremény értéke n játék után és η a nyerések száma ezekben a játékokban. Ekkor $n - \eta$ a veszített játékok száma, így $\xi = \eta - (n - \eta) = 2\eta - n$. Másrészt η egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó (hiszen a nyerések gyakorisága), így

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \mathrm{P}(2\eta - n = k) = \mathrm{P}\left(\eta = \frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{n-\frac{n+k}{2}},$$

ahol $\frac{n+k}{2} \in \{0, 1, \ldots, n\}$, azaz $k \in \{-n, -n+2, -n+4, \ldots, n\}$. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}(2\eta - n) = 2\,\mathrm{E}\,\eta - n = 2np - n = n(2p-1)$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{D}^2(2\eta - n) = 4\,\mathrm{D}^2\,\eta = 4np(1-p)$.

9.7. megoldás. Tegyünk mindkét dobozba még egy-egy szál gyufát, továbbá tegyük fel, hogy az egyik dobozban csupa piros fejű gyufaszál van, a másikban pedig csupa fekete fejű. Ezzel a kiegészítéssel a következőképpen fogalmazhatjuk át a feladatot: Mi a valószínűsége, hogy az első 87 húzásban pontosan 50 piros fejű gyufaszál van és a 88. húzás is piros fejű, vagy az első 87 húzásban pontosan 50 fekete fejű gyufaszál van és a 88. húzás is fekete fejű?

Legyen ξ az első 87 húzásban a pirosak száma. Ez binomiális eloszlású $n = 87$ renddel és $p = 0{,}5$ paraméterrel. Így $\mathrm{P}(\xi = 50) = \binom{87}{50} 0{,}5^{50} \cdot 0{,}5^{37} = \binom{87}{50} 0{,}5^{87}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az első 87 húzásban pontosan 50 piros fejű gyufaszál van és a 88. húzás is piros fejű

$$\binom{87}{50} 0{,}5^{87} \cdot 0{,}5.$$

Így a megoldás

$$\binom{87}{50} 0{,}5^{87} \cdot 0{,}5 \cdot 2 = \binom{87}{50} 0{,}5^{87} \approx 0{,}0325.$$

9.8. megoldás. Legyen ξ a találatok száma 2000 lövésből. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 2000$ renddel és $p = 0{,}001$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{2000}{k} 0{,}001^k \cdot 0{,}999^{2000-k} \approx 0{,}5941.$$

Mivel n nagy és p kicsi, ezért alkalmazhatjuk a Poisson-közelítést $\lambda = np = 2$ paraméterrel:

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{2^k}{k!} e^{-2} \approx 0{,}5939.$$

9.9. megoldás. Legyen ξ a betegek száma egy adott napon és x az ágyak száma a betegszobában. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 1200$ renddel és $p = 0{,}002$ paraméterrel. Mivel n nagy és p kicsi, ezért alkalmazhatjuk a Poisson-közelítést $\lambda = np = 2{,}4$ paraméterrel:

$$0{,}99 \leq \mathrm{P}(\xi \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{2{,}4^k}{k!} e^{-2{,}4}.$$

Ebből $x \geq 7$.

9.10. megoldás. Legyen ξ az egy nap alatt feladott címezetlen levelek száma. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{1017}{365}$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi > 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + 0{,}5\lambda^2) \approx 0{,}5273.$$

9.11. megoldás. Legyen ξ az észlelt csillaghullások száma negyed óra alatt. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{15}{10} = 1{,}5$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{1{,}5^2}{2!} e^{-1{,}5} \approx 0{,}2510.$$

9.12. megoldás. Legyen ξ a sajtóhibák száma a kiválasztott 10 oldalon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{200}{500} \cdot 10 = 4$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} \approx 0{,}0183.$$

9.13. megoldás. Egy szeletben a mazsolaszemek száma (jelöljük ξ-vel) Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Egy szeletben az átlagos számuk 8, tehát $\lambda = 8$. Így $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{8^0}{0!} e^{-8} = e^{-8}$.

9.14. megoldás. Legyen ξ a hibák száma egy idomon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{3{,}5}{25} = 0{,}14$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{0{,}14^0}{0!} e^{-0{,}14} = e^{-0{,}14}.$$

Emiatt $\frac{500000}{e^{-0{,}14}} = 500000 e^{0{,}14}$ darab idomból lesz félmillió hibátlan, azaz $\frac{500000 e^{0{,}14}}{25} = 20000 e^{0{,}14} \approx 23006$ darab lemezt kell feldolgozni.

10. Exponenciális és normális eloszlás

10.1. megoldás. Legyen ξ a fonal szakadásáig eltelt idő órában mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 2{,}5$, azaz $\lambda = 0{,}4$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 8) = 1 - F_\xi(8) = e^{-0{,}4 \cdot 8} = e^{-3{,}2}$.

10.2. megoldás. Legyen ξ két vevő érkezése között eltelt idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 1$, azaz $\lambda = 1$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 5) = 1 - F_\xi(5) = e^{-5}$.

10.3. megoldás. Legyen ξ a sorban állási idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 6$, azaz $\lambda = \frac{1}{6}$. Így $\mathrm{P}(\xi \leq 4) = F_\xi(4) = 1 - e^{-\frac{1}{6} \cdot 4}$.

10.4. megoldás. Legyen ξ a várakozási idő percben mérve. Ekkor $0{,}1 = \mathrm{P}(\xi \geq 6) = 1 - F_\xi(6) = e^{-6\lambda}$, melyből $\lambda = -\frac{1}{6} \ln 0{,}1$. Így $\mathrm{P}(\xi < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{0{,}1}$.

10.5. megoldás. Legyen ξ az izzó élettartama órában mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 1000$ és $\sigma = 100$ paraméterekkel. Így $\mathrm{P}(\xi < 900) = \Phi\left(\frac{900-m}{\sigma}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$, vagyis kb. 16 % megy tönkre. Másrészt $\mathrm{P}(\xi > 1200) = 1 - \Phi\left(\frac{1200-1000}{100}\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0{,}9772$.

10.6. megoldás. Legyen ξ egy deszka hossza centiméterben mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 400$ és $\sigma = 3$ paraméterekkel.

a) $\mathrm{P}(398 \leq \xi \leq 401) = F_\xi(401) - F_\xi(398) = \Phi\left(\frac{401-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{398-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 \approx 0{,}3747$.

b) $\mathrm{P}(397{,}5 \leq \xi \leq 402{,}5) = F_\xi(402{,}5) - F_\xi(397{,}5) = \Phi\left(\frac{402{,}5-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{397{,}5-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2{,}5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2{,}5}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) - 1 \approx 0{,}5934$.

10.7. megoldás. Legyen ξ egy üvegben levő anyag tömege grammban mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 100$ és σ paraméterekkel. Ekkor $0{,}98 = \mathrm{P}(98 \leq \xi \leq 102) = F_\xi(102) - F_\xi(98) = \Phi\left(\frac{102-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{98-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1$, azaz $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}99 \approx \Phi(2{,}32)$, melyből $\sigma \approx \frac{2}{2{,}32} \approx 0{,}862$.

10.8. megoldás. Legyen ξ egy elektromos alkatrész élettartama órában mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 1170$ és $\sigma = 100$ paraméterekkel. Jelölje g a garanciaidőt órában. Mivel $\mathrm{P}(\xi < g) \leq 0{,}05$, ezért $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95 \leq \mathrm{P}(\xi \geq g) = 1 - \Phi\left(\frac{g-1170}{100}\right) = \Phi\left(\frac{1170-g}{100}\right)$, azaz $1{,}64 \leq \frac{1170-g}{100}$. Így $g \leq 1006$.

10.9. megoldás. Legyen ξ egy zacskó tömege grammban mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 100$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Így $p := 1 - \mathrm{P}(95 \leq \xi \leq 105) = 1 - (F_\xi(105) - F_\xi(95)) = 1 - \Phi\left(\frac{105-100}{2}\right) + \Phi\left(\frac{95-100}{2}\right) = 2 - 2\Phi(2{,}5) \approx 0{,}0124$.

Legyen η azon csomagok száma, melyekre $95 \leq \xi \leq 105$ nem teljesül. Ekkor η binomiális eloszlású $n = 1000$ renddel és $p \approx 0{,}0124$ paraméterrel, illetve közelítőleg Poisson-eloszlású $\lambda = np \approx 12{,}4$ paraméterrel. Így $\mathrm{P}(\eta \leq 2) \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{12{,}4^k}{k!} e^{-12{,}4} \approx 0{,}0003718$.

10.10. megoldás. Mivel $0{,}5 \leq F_\xi(A) - F_\xi(2) = \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right)$, így $\Phi(0{,}87) \approx 0{,}8085 \leq \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right)$. Ebből $A \geq 4{,}74$.

10.11. megoldás. Legyen ξ a beérkező megrendelések száma. Ekkor ξ normális eloszlású m és $\sigma = 10$ paraméterekkel. Így $\Phi(1{,}28) \approx 0{,}9 = \mathrm{P}(\xi \geq 20) = 1 - \Phi\left(\frac{20-m}{10}\right) = \Phi\left(\frac{m-20}{10}\right)$, azaz $\frac{m-20}{10} \approx 1{,}28$. Így $m \approx 32{,}8$.

11. Nagy számok törvénye, Moivre–Laplace-tétel

11.1. megoldás. Jelölje n a megfigyelések számát, ϱ_n a megfigyelt személyek között a szeszfogyasztók számát, p pedig a valódi arányt. Ekkor a Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2}.$$

Így a feltétel teljesül, ha

$$0{,}95 \leq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2},$$

azaz $n \geq 50\,000$.

11.2. megoldás. Jelölje ϱ_n a 6-os dobásának gyakoriságát n dobás után. A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9.$$

Ebből $n \geq 13\,889$. Ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, akkor

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9,$$

ahol p a 6-os dobásának a valószínűsége. Ebből $n \geq 25\,000$.

11.3. megoldás. Legyen $n = 200$ a lövések száma, ϱ_n a találatok száma és $p = 0{,}4$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Ebből $\varepsilon \approx 0{,}1095$. Így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{200} - 0{,}04\right| < 0{,}1095\right) = \mathrm{P}(59 \leq \varrho_n \leq 101) \geq 0{,}9.$$

Tehát a találatok száma 59 és 101 között lesz legalább 0,9 valószínűséggel.

11.4. megoldás. Legyen $n = 100\,000$ a termékek száma, ϱ_n abból a hibátlan termékek száma és $p = 0{,}95$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}(93\,000 \leq \varrho_n \leq 97\,500) = \mathrm{P}\left(0{,}93 \leq \frac{\varrho_n}{n} \leq 0{,}975\right) = \mathrm{P}\left(-0{,}02 \leq \frac{\varrho_n}{n} - p \leq 0{,}025\right) \geq$$
$$\geq \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \leq 0{,}02\right) \geq \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{0{,}02^2 n} \approx 0{,}9998.$$

11.5. megoldás. Jelölje n a gyártmányok darabszámát a tételben, ϱ_n pedig a tételben található hibás darabok számát. A kérdés, milyen n esetén teljesül, hogy

$$\mathrm{P}\left(\frac{\varrho_n}{n} \leq 0{,}12\right) \geq 0{,}95? \qquad (*)$$

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n} \leq \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}02\right) = \mathrm{P}\left(0{,}08 < \frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\right) \leq$$
$$\leq \mathrm{P}\left(\frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\right) \leq \mathrm{P}\left(\frac{\varrho_n}{n} \leq 0{,}12\right).$$

Így $(*)$ teljesül, ha

$$0{,}95 \leq 1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n},$$

amelyből kapjuk, hogy $n \geq 4500$.

11.6. megoldás. Jelölje ϱ_{500} az elszakadt fonalak számát. A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_{500}}{500} - 0{,}008\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0{,}008(1-0{,}008)}{500\varepsilon^2}.$$

Így

$$0{,}95 = 1 - \frac{0{,}008(1-0{,}008)}{500\varepsilon^2}$$

esetén teljesül a feltétel. Ebből $\varepsilon = \sqrt{317{,}44} \cdot 10^{-3}$, azaz

$$\left|\frac{\varrho_{500}}{500} - 0{,}008\right| < \sqrt{317{,}44} \cdot 10^{-3}.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy $\varrho_{500} < 12{,}9$, azaz $\varrho_{500} \leq 12$.

11.7. megoldás. Jelölje p a pontos selejt arányt. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{80}{5000} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 5000\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Ebből $\varepsilon = \sqrt{0{,}0005}$ és $\left|\frac{80}{5000} - p\right| < \sqrt{0{,}0005}$. Ennek megoldása $p < 0{,}03836$.

11.8. megoldás. Jelölje ξ a találatok számát. Ez binomiális eloszlású $n = 1000$ renddel és $p = 0{,}11$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 0{,}1562.$$

11.9. megoldás. Jelölje ξ a selejtesek számát. Ez binomiális eloszlású $n = 500$ renddel és $p = 0{,}01$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(7 \leq \xi \leq 14) \approx \Phi\left(\frac{14 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) \approx 0{,}184.$$

11.10. megoldás. Jelölje ξ a találatok számát n lövésből. Ez binomiális eloszlású n renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < 200) \approx \Phi\left(\frac{200 - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) \approx 0{,}9918 \approx \Phi(2{,}4).$$

Ebből

$$\frac{200 - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \approx 2{,}4,$$

azaz $n \approx 1179$.

11.11. megoldás. Jelölje ξ a működőképes gépek számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = \frac{210}{0{,}7} = 300$ renddel és $p = 0{,}7$ paraméterrel. Jelölje x azon gépek maximális számát, amelyek működőképesek 0,999 valószínűséggel, azaz $\mathrm{P}(\xi < x) = 0{,}999$. Ekkor a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < x) \approx \Phi\left(\frac{x - 0{,}7 \cdot 300}{\sqrt{300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) = 0{,}999 \approx \Phi(3{,}1),$$

vagyis

$$\frac{x - 0{,}7 \cdot 300}{\sqrt{300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 3{,}1.$$

Ebből $x \approx 234{,}6$, azaz kb. 234 gép működéséhez szükséges energiát kell biztosítani, ha azt akarjuk, hogy 0,999 valószínűséggel minden működőképes gépnek jusson energia.

Standard normális eloszlás táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9982
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,10	0,9990
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,20	0,9993
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,30	0,9995
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,40	0,9997
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861	3,50	0,9998
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8078	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

Irodalomjegyzék

[1] Denkinger Géza: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[2] Ferenczy Miklós: *Valószínűségszámítás és alkalmazása feladatgyűjtemény*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

[3] Hortobágyi István (szerk.): *Elemi matematika V.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[4] Solt György: *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.

[5] Tómács Tibor: *Valószínűségszámítás*, https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas.pdf