# Valószínűségszámítás összefoglaló zárószigorlatra

Dr. Tómács Tibor
Eszterházy Károly Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű jelenségek illetve kísérletek matematikai modellezése. Ennek a modellnek az a megfigyelés az alapja, hogy a véletlen kimenetelű kísérletek számának növelésével a figyelt esemény relatív gyakorisága[1] egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül. Ezt a konstanst nevezzük a figyelt esemény valószínűségének.

**Definíció** (Kolmogorov-féle axiómák)**.** Legyen $\Omega$ nem üres halmaz, $\mathcal{F}$ részhalmaza az $\Omega$ hatványhalmazának[2] és $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ezekre teljesülnek a következők:
*1. axióma.* $\Omega \in \mathcal{F}$.
*2. axióma.* Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$, ahol $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
*3. axióma.* Ha $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

*4. axióma.* Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{P}(A) \geq 0$.
*5. axióma.* $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
*6. axióma.* Ha $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1,2,\ldots)$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Ekkor $\mathcal{F}$-et *$\sigma$-algebrának*[3], elemeit *eseményeknek*, $\Omega$-t *biztos eseménynek*, a P függvényt *valószínűségnek*, a $\mathrm{P}(A)$ számot az *$A$ esemény valószínűségének*, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ rendezett hármast *valószínűségi mezőnek*, a 6. axiómát pedig *$\sigma$-additivitásnak* nevezzük.

[1] Azaz az esemény bekövetkezései és a kísérletek számának hányadosa.
[2] $\Omega$ hatványhalmaza az $\Omega$ összes részhalmazából álló halmazrendszer.
[3] Ejtsd: szigma-algebra.

**Definíció** (klasszikus valószínűségi mező)**.** Legyen $\Omega$ egy $n$ elemű halmaz, $\mathcal{F}$ az $\Omega$ hatványhalmaza, továbbá $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}$, ahol $k$ az $A$ elemeinek a száma. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

**Tétel.** Legyen $\Omega$ véges halmaz és $\mathcal{F}$ az $\Omega$ hatványhalmaza. Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ pontosan abban az esetben klasszikus valószínűségi mező, ha az egy elemű események valószínűségei megegyeznek.

A következőkben egy olyan valószínűségi mezőt szeretnénk definiálni, amelyben geometriai mértékekkel lehet kiszámolni a valószínűséget. Azonban a középiskolában tanult hosszúság, terület illetve térfogat fogalmak – az ún. Jordan-mértékek – nem alkalmasak valószínűségi mező létrehozására, mert a Jordan-mérhető halmazok rendszere nem $\sigma$-algebra és a Jordan-mérték nem $\sigma$-additív. Ezért először a Jordan-mérhető halmazok rendszerét kiterjesztjük úgy, hogy az már $\sigma$-algebra legyen.

**Definíció** (Borel-mérhető halmazok)**.** Az $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ nyílt halmazai által generált $\sigma$-algebrát[4] *Borel-mérhető halmazok rendszerének* nevezzük.

**Tétel.** Minden Jordan-mérhető halmaz Borel-mérhető, viszont van olyan Borel-mérhető halmaz, amely nem Jordan-mérhető.

Minden Borel-mérhető halmazhoz rendelni fogunk egy számot, amit majd ezen halmaz Lebesgue-mértékének fogunk nevezni. Ennek érdekében először csak a legegyszerűbb típusú Borel-mérhető halmazhoz rendeljünk mértéket, a téglákhoz.

**Definíció** (tégla)**.** Az $I_1 \times \cdots \times I_k$ alakú halmazokat *$k$-dimenziós tégláknak* nevezzük, ahol $I_1, \ldots, I_k$ korlátos intervallumok. Egy ilyen *tégla mértéke* $h_1 \cdots h_k$, ahol $h_j$ az $I_j$ hosszát jelenti $(j = 1, \ldots, k)$.

Egy tetszőleges Borel-mérhető halmazhoz hasonlóan fogunk számot rendelni, mint ahogyan azt a Jordan-féle külső mértéknél tettük. A különbség annyi lesz, hogy itt a lefedéseket nem csak véges, hanem megszámlálhatóan végtelen sok alakzat segítségével is megtehetjük. Praktikussági okokból ezeket a lefedő alakzatokat most csak téglák közül válogatjuk ki.

**Definíció** (Lebesgue-mérték)**.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ Borel-mérhető, és tekintsük annak a halmaznak az infimumát, melynek elemei az $A$-t lefedő megszámlálhatóan sok $k$-dimenziós tégla mértékeinek összegeként állnak elő. Ezt az infimum értéket az *$A$ Lebesgue-mértékének* nevezzük és $\lambda^k(A)$ módon jelöljük.

**Tétel.** Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mértéke megegyezik a Jordan-mértékével, továbbá, a Borel-halmazokon értelmezett Lebesgue-mérték $\sigma$-additív.

[4] Azaz a legszűkebb olyan $\mathbb{R}^k$ részhalmazaiból álló $\sigma$-algebrát, amely tartalmazza $\mathbb{R}^k$ minden nyílt halmazát.

Így tehát, a Borel-mérhető halmazok és a Lebesgue-mérték alkalmas arra, hogy valószínűségi mezőt konstruáljunk.

**Definíció** (geometriai valószínűségi mező)**.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ olyan Borel-mérhető halmaz, melynek Lebesgue-mértéke pozitív valós szám. Az $\mathcal{F}$ legyen az $\Omega$ Borel-mérhető részhalmazainak a halmaza, továbbá $\mathrm{P}(A) := \frac{\lambda^k(A)}{\lambda^k(\Omega)}$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőt *$k$-dimenziós geometriai valószínűségi mezőnek* nevezünk.

**Definíció** (feltételes valószínűség)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, továbbá $A, B \in \mathcal{F}$, ahol $\mathrm{P}(B) \neq 0$. A

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

hányadost az *$A$ esemény $B$-re vonatkozó feltételes valószínűségének* nevezzük.

**Tétel** (teljes valószínűség tétele)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, továbbá $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer[5], ahol $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ekkor bármely $A \in \mathcal{F}$ eseményre

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\, \mathrm{P}(B_i).$$

**Tétel** (Bayes tétele)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(A) \neq 0$, akkor bármely $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\, \mathrm{P}(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_k)\, \mathrm{P}(B_k)}.$$

**Definíció** (események függetlensége)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy az $A$ és $B$ események *függetlenek*, ha

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\, \mathrm{P}(B).$$

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeket *függetleneknek* nevezzük, ha bármely részrendszerére teljesül, hogy a valószínűségeik szorzata megegyezik a metszetük valószínűségével.

**Definíció** (valószínűségi változó)**.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a $\xi$ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük.

[5] Azaz páronként diszjunktak és uniójuk az $\Omega$.

**Definíció** (eloszlásfüggvény)**.** A $\xi$ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \mathrm{P}(\xi < x)$$

függvényt nevezzük.[6]

**Tétel** (eloszlásfüggvény tulajdonságai)**.** Az $F_\xi$ monoton növekvő, $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, és $F_\xi$ balról folytonos.

**Definíció** (sűrűségfüggvény)**.** A $\xi$ valószínűségi változót *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha létezik olyan $f_\xi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $f_\xi$-t a $\xi$ *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

**Tétel** (sűrűségfüggvény tulajdonságai)**.** Ha $\xi$ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{továbbá} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

**Definíció** (nemnegatív valószínűségi változó várható értéke)**.** Legyen $\xi$ nemnegatív értékű valószínűségi változó,

$$\begin{aligned} D_n &:= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}, \\ m(\xi, x) &:= x_1\,\mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) + \cdots + x_{n-1}\,\mathrm{P}(x_{n-1} \le \xi < x_n) + x_n\,\mathrm{P}(x_n \le \xi), \end{aligned}$$

ahol $x = (x_1,\dots,x_n) \in D_n$, továbbá

$$\mathrm{E}\,\xi := \sup\{m(\xi, x) : n \in \mathbb{N}, x \in D_n\}.$$

Az $\mathrm{E}\,\xi$-t a $\xi$ *várható értékének* nevezzük. Minden nemnegatív értékű $\xi$ valószínűségi változó esetén $\mathrm{E}\,\xi \in \mathbb{R}$ vagy $\mathrm{E}\,\xi = \infty$ teljesül. Ha $\mathrm{E}\,\xi \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy $\xi$-nek *véges a várható értéke.*

Tetszőleges valószínűségi változó várható értékének definiálásához szükségünk lesz arra a tényre, hogy minden valós függvény felírható két nemnegatív függvény különbségeként.

[6] Itt $\xi < x$ az $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ halmazt jelöli.

**Tétel.** Ha $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, akkor $\xi = \xi^+ - \xi^-$, ahol

$$\xi^+\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi^+(\omega) := \begin{cases} \xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) > 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

a $\xi$ *pozitív része* és

$$\xi^-\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi^-(\omega) := \begin{cases} -\xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) < 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

a $\xi$ *negatív része.*

A $\xi = \xi^+ - \xi^-$ összefüggés szerint, természetes az ötlet, hogy egy tetszőleges valószínűségi változó várható értékét definiáljuk a pozitív és a negatív részek várható értékeinek különbségeként.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $\xi$ valószínűségi változónak létezik *véges várható értéke*, ha $\xi^+$-nak és $\xi^-$-nak véges a várható értéke, továbbá ekkor az

$$\mathrm{E}\,\xi := \mathrm{E}\,\xi^+ - \mathrm{E}\,\xi^-$$

értéket $\xi$ *várható értékének* nevezzük. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ = \infty$ és $\mathrm{E}\,\xi^- \in \mathbb{R}$, akkor legyen $\mathrm{E}\,\xi := \infty$. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ \in \mathbb{R}$ és $\mathrm{E}\,\xi^- = \infty$, akkor $\mathrm{E}\,\xi := -\infty$. Ha $\mathrm{E}\,\xi^+ = \mathrm{E}\,\xi^- = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy $\xi$-nek *nem létezik várható értéke.*

**Tétel.** Legyen $\xi$ olyan diszkrét valószínűségi változó, mely az $x_1, \ldots, x_n$ értékeket veheti fel. Ekkor $\xi$-nek létezik véges várható értéke, és

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k).$$

**Tétel.** Legyen $\xi$ olyan diszkrét valószínűségi változó, mely az $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ értékeket veheti fel. A $\xi$-nek pontosan akkor létezik véges várható értéke, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \,\mathrm{P}(\xi = x_k) \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k).$$

**Tétel.** Az abszolút folytonos $\xi$ valószínűségi változónak pontosan akkor létezik véges várható értéke, ha $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \, f_\xi(x) \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x.$$

**Definíció** (szórásnégyzet)**.** Legyen $\xi$ véges várható értékű valószínűségi változó. Ekkor $\xi$ *szórásnégyzete*

$$\mathrm{D}^2\,\xi := \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2.$$

**Tétel** (Bernoulli-féle nagy számok törvénye)**.** Legyen $\varrho_n$ egy esemény bekövetkezéseinek a száma $n$ kísérlet után (azaz az esemény gyakorisága). Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

amit úgy is szoktak mondani, hogy az esemény relatív gyakorisága *sztochasztikusan konvergál* az esemény valószínűségéhez.

**Definíció** (valószínűségi változók függetlensége)**.** A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat *függetleneknek* nevezzük, ha minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{\xi_k < x_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_k < x_k)$$

teljesül.[7] A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók *páronként függetlenek*, ha közülük bármely kettő független. Végtelen sok valószínűségi változót függetleneknek nevezzük, ha bármely véges részrendszere független.

**Tétel** (nagy számok gyenge törvénye)**.** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ szórással rendelkező azonos eloszlású páronként független valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n :=$ $= \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\,\xi_1\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

azaz $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál $\mathrm{E}\,\xi_1$-hez.

**Tétel** (nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye)**.** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, továbbá $S_n := \xi_1 +$ $+ \cdots + \xi_n$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathrm{E}\,\xi_1$$

majdnem biztosan (azaz 1 valószínűséggel) teljesül.

[7] Itt $\xi_k < x_k$ az $\{\omega \in \Omega : \xi_k(\omega) < x_k\}$ halmazt jelöli.