

Valószínűségszámítás összefoglaló zárószigorlatra

Dr. Tómacs Tibor
Eszterházy Károly Katolikus Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű jelenségek illetve kísérletek matematikai modellezése. Ennek a modellnek az a megfigyelés az alapja, hogy *a véletlen kimenetelű kísérletek számának növelésével a figyelt esemény relatív gyakorisága¹ egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül*. Ezt a konstanszt nevezzük a figyelt esemény valószínűségének.

Definíció (Kolmogorov-féle axiómák). Legyen Ω nem üres halmaz, \mathcal{F} részhalmaza az Ω hatványhalmazának² és $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ezekre teljesülnek a következők:

1. *axióma.* $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *axióma.* Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{F}$, ahol $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
3. *axióma.* Ha $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

4. *axióma.* Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $P(A) \geq 0$.
5. *axióma.* $P(\Omega) = 1$.
6. *axióma.* Ha $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$) páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ekkor \mathcal{F} -et σ -algebrának³, elemeit *eseményeknek*, Ω -t *biztos eseménynek*, a P függvényt *valószínűségnek*, a $P(A)$ számot az A *esemény valószínűségének*, az (Ω, \mathcal{F}, P) rendezett hármast *valószínűségi mezőnek*, a 6. axiómát pedig σ -*additivitásnak* nevezzük.

¹ Azaz az esemény bekövetkezései és a kísérletek számának hányadosa.

² Ω hatványhalmaza az Ω összes részhalmazából álló halmazrendszer.

³ Ejtstd: szigma-algebra.

Definíció (klasszikus valószínűségi mező). Legyen Ω egy n elemű halmaz, \mathcal{F} az Ω hatványhalmaza, továbbá $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(A) = \frac{k}{n}$, ahol k az A elemeinek a száma. Ekkor az (Ω, \mathcal{F}, P) -t *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Tétel. Legyen Ω véges halmaz és \mathcal{F} az Ω hatványhalmaza. Ekkor (Ω, \mathcal{F}, P) pontosan abban az esetben klasszikus valószínűségi mező, ha az egy elemű események valószínűségei megegyeznek.

A következőkben egy olyan valószínűségi mezőt szeretnénk definiálni, amelyben geometriai mértékekkel lehet kiszámolni a valószínűséget. Azonban a középiskolában tanult hosszúság, terület illetve térfogat fogalmak – az ún. Jordan-mértékek – nem alkalmasak valószínűségi mező létrehozására, mert a Jordan-mérhető halmazok rendszere nem σ -algebra és a Jordan-mérték nem σ -additív. Ezért először a Jordan-mérhető halmazok rendszerét kiterjesztjük úgy, hogy az már σ -algebra legyen.

Definíció (Borel-mérhető halmazok). Az \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$) nyílt halmazai által generált σ -algebrát⁴ *Borel-mérhető halmazok rendszerének* nevezzük.

Tétel. Minden Jordan-mérhető halmaz Borel-mérhető, viszont van olyan Borel-mérhető halmaz, amely nem Jordan-mérhető.

Minden Borel-mérhető halmazhoz rendelni fogunk egy számot, amit majd ezen halmaz Lebesgue-mértékének fogunk nevezni. Ennek érdekében először csak a legegyszerűbb típusú Borel-mérhető halmazhoz rendeljük mértéket, a téglákhoz.

Definíció (tégla). Az $I_1 \times \dots \times I_k$ alakú halmazokat *k-dimenziós téglának* nevezzük, ahol I_1, \dots, I_k korlátos intervallumok. Egy ilyen *tégla mértéke* $h_1 \cdot \dots \cdot h_k$, ahol h_j az I_j hosszát jelenti ($j = 1, \dots, k$).

Egy tetszőleges Borel-mérhető halmazhoz hasonlóan fogunk számot rendelni, mint ahogyan azt a Jordan-féle külső mértéknél tettük. A különbség annyi lesz, hogy itt a lefedéseket nem csak véges, hanem megszámlálhatóan végtelen sok alakzat segítségével is megtehetjük. Praktikussági okokból ezeket a lefedő alakzatokat most csak téglák közül válogatjuk ki.

Definíció (Lebesgue-mérték). Legyen $A \subset \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) Borel-mérhető, és tekintsük annak a halmaznak az infimumát, melynek elemei az A -t lefedő megszámlálhatóan sok k -dimenziós téglák mértékeinek összegeként állnak elő. Ezt az infimum értéket az A *Lebesgue-mértékének* nevezzük és $\lambda^k(A)$ módon jelöljük.

Tétel. Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mértéke megegyezik a Jordan-mértékével, továbbá, a Borel-halmazokon értelmezett Lebesgue-mérték σ -additív.

⁴ Azaz a legszűkebb olyan \mathbb{R}^k részhalmazából álló σ -algebrát, amely tartalmazza \mathbb{R}^k minden nyílt halmazát.

Így tehát, a Borel-mérhető halmazok és a Lebesgue-mérték alkalmas arra, hogy valószínűségi mezőt konstruáljunk.

Definíció (geometriai valószínűségi mező). Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ olyan Borel-mérhető halmaz, melynek Lebesgue-mértéke pozitív valós szám. Az \mathcal{F} legyen az Ω Borel-mérhető részhalmazainak a halmaza, továbbá $P(A) := \frac{\lambda^k(A)}{\lambda^k(\Omega)}$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén. Ekkor az (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mezőt *k-dimenziós geometriai valószínűségi mezőnek* nevezünk.

Definíció (feltételes valószínűség). Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mező, továbbá $A, B \in \mathcal{F}$, ahol $P(B) \neq 0$. A

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

hányadost az *A* esemény *B*-re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.

Tétel (teljes valószínűség tétele). Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mező, továbbá $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer⁵, ahol $P(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor bármely $A \in \mathcal{F}$ eseményre

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i).$$

Tétel (Bayes tétele). Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mező, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $P(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $P(A) \neq 0$, akkor bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i) P(B_i)}{\sum_{k=1}^n P(A | B_k) P(B_k)}.$$

Definíció (események függetlensége). Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy az *A* és *B* események *függetlenek*, ha

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Az A_1, A_2, \dots, A_n eseményeket *függetleneknek* nevezzük, ha bármely részrendszerére teljesül, hogy a valószínűségeik szorzata megegyezik a metszetük valószínűségével.

Definíció (valószínűségi változó). Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mező és $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ha

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a ξ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük.

⁵ Azaz páronként diszjunktak és uniójuk az Ω .

Definíció (eloszlásfüggvény). A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi < x)$$

függvényt nevezzük.⁶

Tétel (eloszlásfüggvény tulajdonságai). Az F_ξ monoton növekvő, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$, és F_ξ balról folytonos.

Definíció (sűrűségfüggvény). A ξ valószínűségi változót *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha létezik olyan $f_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor f_ξ -t a ξ *sűrűségfüggvényének* nevezzük.

Tétel (sűrűségfüggvény tulajdonságai). Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}(a \leq \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x) dx, \quad \text{továbbá} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1.$$

Definíció (nemnegatív valószínűségi változó várható értéke). Legyen ξ nemnegatív értékű valószínűségi változó,

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n\}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N},$$

$$m(\xi, x) := x_1 \mathbb{P}(x_1 \leq \xi < x_2) + \dots + x_{n-1} \mathbb{P}(x_{n-1} \leq \xi < x_n) + x_n \mathbb{P}(x_n \leq \xi),$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_n) \in D_n$, továbbá

$$E\xi := \sup\{m(\xi, x) : n \in \mathbb{N}, x \in D_n\}.$$

Az $E\xi$ -t a ξ *várható értékének* nevezzük. Minden nemnegatív értékű ξ valószínűségi változó esetén $E\xi \in \mathbb{R}$ vagy $E\xi = \infty$ teljesül. Ha $E\xi \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy ξ -nek *véges a várható értéke*.

Tetszőleges valószínűségi változó várható értékének definiálásához szükségünk lesz arra a tényre, hogy minden valós függvény felírható két nemnegatív függvény különbségeként.

⁶ Itt $\xi < x$ az $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ halmazt jelöli.

Tétel. Ha $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, akkor $\xi = \xi^+ - \xi^-$, ahol

$$\xi^+: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi^+(\omega) := \begin{cases} \xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) > 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

a ξ pozitív része és

$$\xi^-: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi^-(\omega) := \begin{cases} -\xi(\omega), & \text{ha } \xi(\omega) < 0, \\ 0, & \text{ha } \xi(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

a ξ negatív része.

A $\xi = \xi^+ - \xi^-$ összefüggés szerint, természetes az ötlet, hogy egy tetszőleges valószínűségi változó várható értékét definiáljuk a pozitív és a negatív részek várható értékeinek különbségéként.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változónak létezik *véges várható értéke*, ha ξ^+ -nak és ξ^- -nek véges a várható értéke, továbbá ekkor az

$$E\xi := E\xi^+ - E\xi^-$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük. Ha $E\xi^+ = \infty$ és $E\xi^- \in \mathbb{R}$, akkor legyen $E\xi := \infty$. Ha $E\xi^+ \in \mathbb{R}$ és $E\xi^- = \infty$, akkor $E\xi := -\infty$. Ha $E\xi^+ = E\xi^- = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy ξ -nek *nem létezik várható értéke*.

Tétel. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, mely az x_1, \dots, x_n értékeket veheti fel. Ekkor ξ -nek létezik véges várható értéke, és

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(\xi = x_k).$$

Tétel. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, mely az x_1, \dots, x_n, \dots értékeket veheti fel. A ξ -nek pontosan akkor létezik véges várható értéke, ha $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(\xi = x_k) \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k).$$

Tétel. Az abszolút folytonos ξ valószínűségi változónak pontosan akkor létezik véges várható értéke, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx.$$

Definíció (szórásnégyzet). Legyen ξ véges várható értékű valószínűségi változó. Ekkor ξ szórásnégyzete

$$D^2 \xi := E(\xi - E \xi)^2.$$

Tétel (Bernoulli-féle nagy számok törvénye). Legyen ϱ_n egy p valószínűségű esemény bekövetkezéseinek a száma n kísérlet után (azaz az esemény gyakorisága). Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

amit úgy is szoktak mondani, hogy az esemény relatív gyakorisága *sztochasztikusan konvergál* az esemény valószínűségéhez.

A Bernoulli-féle nagy számok törvénye az összefoglaló elején leírt tapasztalatot jelenti a Kolmogorov-féle axiómákkal megadott matematikai modellben.

Definíció (valószínűségi változók függetlensége). A ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változókat *függetleneknek* nevezzük, ha minden $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{\xi_k < x_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k < x_k)$$

teljesül.⁷ A ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók *páronként függetlenek*, ha közülük bármely kettő független. Végtelen sok valószínűségi változót függetleneknek nevezzük, ha bármely véges részrendszere független.

Tétel (nagy számok gyenge törvénye). Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots szórással rendelkező azonos eloszlású páronként független valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E \xi_1\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

azaz $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan konvergál $E \xi_1$ -hez.

Tétel (nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye). Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, továbbá $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = E \xi_1$$

majdnem biztosan (azaz 1 valószínűséggel) teljesül.

⁷ Itt $\xi_k < x_k$ az $\{\omega \in \Omega : \xi_k(\omega) < x_k\}$ halmazt jelöli.