EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY KATOLIKUS EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Valószínűségszámítás informatika szakosoknak

A jegyzet az alábbi címről szabadon letölthető:
https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Valoszinusegszamitas_informatika_szakosoknak.pdf

Eger, 2024. szeptember 3.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Események és valószínűség

Bizonyos jelenségeknél az összes körülmény figyelembe vétele nagyon nehéz vagy lehetetlen. Ennek oka lehet például, hogy a jelenség hátterében meghúzódó körülmények rendszere a tudomány mai állása szerint még nem teljesen feltárt, vagy nem tudjuk mérni őket, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg egy esemény bekövetkezésének elegendő okát. Az ilyen eseményeket *véletlen eseményeknek* nevezzük. Például dobókockával játszva csak azt a tényt vesszük figyelembe, hogy feldobtuk. Ez viszont nem határozza meg a dobás eredményét egyértelműen, így például a hatos dobása véletlen eseményt jelent számunkra.

Ha egy véletlen kimenetelű jelenség sokszor megismétlődhet, akkor *véletlen tömegjelenségről* beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Például a radioaktív bomlás esetén minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető, mégis sok milliárd atommag esetében már előre meg tudjuk mondani nagy pontossággal, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le.

A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű jelenségek illetve kísérletek matematikai modellezése.

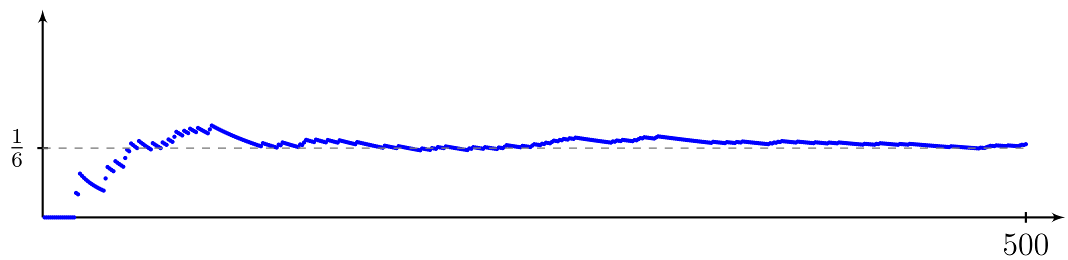
Egy kísérletben azt tekintjük *megfigyelhető eseménynek* (a továbbiakban röviden csak eseményt mondunk), melyről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e vagy sem. Így az, hogy egy bizonyos esemény bekövetkezett, matematikai értelemben logikai ítélet. Ebből a logika és a halmazelmélet kapcsolata alapján az eseményeket halmazokkal modellezhetjük.

Ha egy kísérletben A és B halmazok eseményeket modelleznek, akkor $A \cup B$ azt fogja jelenteni, hogy az A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Erről egyértelműen eldönthető a kísérlet elvégzése után, hogy bekövetkezett-e, ezért ez is eseményt modellez. Másrészt, ha A esemény, akkor az A ellenkezője is az. Jelöljük ezt $\overline{A}$-val. Az $A \cup \overline{A}$ biztosan bekövetkezik, ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük és Ω-val jelöljük. Ebből látható, hogy $\overline{A}$ az A-nak Ω-ra vonatkozó komplementere, továbbá minden esemény az Ω egy részhalmaza. A nem megfigyelhető események – vagyis amelyekről a kísérlet elvégzése után nem állapítható meg egyértelműen, hogy bekövetkezett-e – szintén részhalmazai az Ω-nak, de ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk. Az adott kísérletre vonatkozó események rendszerét jelöljük $\mathcal{F}$-fel, mely tehát az Ω hatványhalmazának egy részhalmaza.

Például amikor egy dobókockával játszunk, az egyes, kettes, hármas, négyes, ötös vagy a hatos oldal lehet felül. A nekik megfelelő halmazok legyenek a következők: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. De más események is vannak. Például hogy páros szám lesz felül: $\{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$, vagy nem egyes lesz felül: $\overline{\{1\}} = \{2,3,4,5,6\}$. Itt a biztos esemény $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Az Ω felírásánál azt is figyelembe kell venni, hogy egy kísérletet mikor tekintünk sikeresnek, illetve mikor sikertelen, azaz mikor kell helyette új kísérletet végrehajtani. Az előbbi példában, ha az élére esik a kocka, akkor azt sikertelen kísérletnek tekintjük, hiszen Ω elemei között egy sincs, ami ezt az esetet jelentené. Amennyiben mégis be akarjuk vonni a modellünkbe a kocka élére esését, akkor az Ω felírása módosul például erre: $\{1,2,3,4,5,6,\text{él}\}$.

A modellalkotás következő lépése valamilyen tapasztalati törvény megfigyelése az eseményekkel kapcsolatosan. Ilyet először *Jacob Bernoulli* (1654–1705) svájci matematikus publikált. Egy kísérletet hajtsunk végre egymás után többször egymástól függetlenül azonos körülmények között. Figyeljünk meg ebben a kísérletsorozatban egy bizonyos eseményt. Ezen esemény bekövetkezéseinek a számát az esemény *gyakoriságának*, míg a bekövetkezések számának és a kísérletek számának arányát az esemény *relatív gyakoriságának* fogjuk nevezni. Például egy dobókockával többször dobva, ábrázoljuk a hatos dobások relatív gyakoriságát a dobások számának függvényében:



Azt látjuk, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága a dobások számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik $\frac{1}{6}$ körül. Más véletlen kimenetelű kísérletek eseményeire is hasonló a tapasztalat:

A kísérletek számának növelésével a figyelt esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül.

Ezt a konstanst a figyelt esemény *valószínűségének* fogjuk nevezni. A továbbiakban $\mathrm{P}(A)$ jelölje az A esemény valószínűségét. Itt P egy függvény, amely minden eseményhez hozzárendel egy számot. Könnyen látható, hogy minden esemény valószínűsége nemnegatív valós szám, a biztos esemény valószínűsége 1, illetve egyszerre be nem következő események uniójának valószínűsége az események valószínűségeinek összege.

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) az előzőeket kiegészítve még azt is feltételezte, hogy megszámlálhatóan végtelen sok esemény uniója is esemény, továbbá, hogy megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt esemény uniójának valószínűsége, ezen események valószínűségeinek összegével egyenlő. Ezzel egy olyan elméletet kapott, amellyel már matematikailag bizonyíthatóvá válik Bernoulli megfigyelése. Ezt foglaltuk össze a következő definícióban, amely tehát a véletlen kimenetelű jelenségek matematikai modellje.

Definíció

Legyen Ω egy nem üres halmaz, az $\mathcal{F}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának, továbbá $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ezekre teljesülnek a következők:
1. axióma. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. axióma. Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$, ahol $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
3. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

4. axióma. Minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{P}(A) \geq 0$.
5. axióma. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
6. axióma. Ha $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Ekkor $\mathcal{F}$-et *σ-algebrának* (ejtsd: szigma-algebra), elemeit *eseményeknek*, Ω-t *biztos eseménynek*, a P függvényt *valószínűségnek*, a $\mathrm{P}(A)$ számot az A *esemény valószínűségének*, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ rendezett hármast *valószínűségi mezőnek*, a 6. axiómát pedig *σ-additivitásnak* nevezzük.

Definíció

Az 1. és 2. axiómák miatt $\emptyset \in \mathcal{F}$, amit a továbbiakban *lehetetlen eseménynek* nevezünk.

Tétel

Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i \in \mathcal{F}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$.

(1) Ha $A \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy az A *maga után vonja* B-t.

(2) $\overline{A}$-t az A *ellentett eseményének* nevezzük.

(3) Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor az A és B eseményeket *egymást kizáró eseményeknek* nevezzük.

$A \cup B$ akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. $A \cap B$ akkor következik be, ha A és B egyszerre bekövetkezik. $\overline{A}$ akkor következik be, ha az A nem következik be. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ akkor következik be, ha A bekövetkezik de B nem.

Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_i, A, B \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

(2) (*véges additivitás*) Ha $A_1, \ldots, A_n$ páronként egymást kizáró események, akkor $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$.

(3) $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

(4) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(5) (*monotonitás*) Ha $A \subset B$, akkor $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(6) $\mathrm{P}(A) \leq 1$.

Feladatok

1.1. feladat. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Ha a dobott számok összege kettő, akkor feldobjuk még egyszer. Adjuk meg az Ω-t!

Megoldás.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6),\\ &(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

1.2. feladat. Egy kockát addig dobunk, amíg hatost nem kapunk. Adjuk meg a biztos eseményt!

Megoldás. $\Omega = \{6\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1,2,3,4,5\}^n \times \{6\}$

1.3. feladat. Az egész számok közül választunk egyet. Az A esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott szám öttel osztható, B pedig azt, hogy a szám nullára végződik. Mit jelentenek a következő események?

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $A \setminus B$

Megoldás.

(1) $A \cup B$: a kiválasztott szám öttel osztható;
(2) $A \cap B$: a kiválasztott szám nullára végződik;
(3) $A \setminus B$: a kiválasztott szám ötre végződik;

1.4. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy dobókockával páros számot dobunk, B azt, hogy 4-nél kisebbet dobunk, és C, hogy 2-nél nagyobbat dobunk. Mit jelent az

$$\big(A \setminus (B \cap C)\big) \cup \big((A \setminus B) \setminus C\big)$$

esemény?

Megoldás. A dobókockával páros számot dobunk.

1.5. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy magyar kártyából egy zöld lapot húzunk, B pedig azt, hogy királyt. Fogalmazzuk meg szavakban a következő eseményeket! Az egyes események hányféleképpen következhetnek be?

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $\overline{A} \cap B$
(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$
(5) $A \cup \overline{B}$
(6) $A \setminus B$
(7) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
(8) $\overline{A \cup B}$
(9) $\overline{A \cap B}$.

Megoldás.

(1) $A \cup B$: Zöldet vagy királyt húzunk. (11)
(2) $A \cap B$: Zöld királyt húzunk. (1)
(3) $\overline{A} \cap B$: Zöldtől különböző királyt húzunk. (3)
(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)
(5) $A \cup \overline{B}$: Zöldet vagy királytól különbözőt húzunk. (29)
(6) $A \setminus B$: Zöldet húzunk, de nem királyt. (7)
(7) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: Zöldet vagy királyt, de nem zöld királyt húzunk. (10)
(8) $\overline{A \cup B}$: Nem zöldet és nem is királyt húzunk. (21)
(9) $\overline{A \cap B}$: Zöld királytól különbözőt húzunk. (31)

1.6. feladat. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

(1) csak az első romlik el;

(2) mindhárom elromlik;
(3) egyik sem romlik el;
(4) az első és a második nem romlik el;
(5) az első és a második elromlik, a harmadik nem;
(6) csak egy gép romlik el;
(7) legfeljebb egy gép romlik el;
(8) legfeljebb két gép romlik el;
(9) legalább egy gép elromlik.

Megoldás.
(1) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
(2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
(3) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
(4) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$
(5) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$
(6) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
(7) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$
(8) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$
(9) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

1.7. feladat. Két számot húzunk egymás után az első ezer pozitív egész szám közül. Legyen A az az esemény, hogy az első páros, B pedig az, hogy a második szám páros. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy a két szám szorzata páros, D-vel pedig azt, hogy páratlan. Írjuk fel C-t és D-t az A és B eseményekkel!

Megoldás. $C = A \cup B$ és $D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

1.8. feladat. Egy osztály létszáma 40, egy adott tantárgyból az átlaga 3,7. Jelentse A azt az eseményt, hogy az osztályban van jeles tanuló, és B, hogy pontosan öt tanuló bukott meg. Igaz-e, hogy $B \subset A$, azaz, hogy B maga után vonja A-t?

Megoldás. Tegyük fel, hogy B igaz, de A nem teljesül. Ekkor a 35 nem bukott diák jegyeinek összege $40 \cdot 3{,}7 - 5 = 143$. De ez ellentmondás, hiszen ezeknek a diákoknak legfeljebb csak négyes jegyük lehet, azaz a jegyeik összege maximum $35 \cdot 4 = 140$. Tehát, ha B igaz, akkor A is az, vagyis $B \subset A$.

1.9. feladat. Egy gyár gépeket szállít külföldre. Háromféle gyártmányból kell az exporttervét teljesítenie. A gyártmányok darabára: I: 1000 euró, II: 1500 euró, III: 2500 euró. A külföldi cég I-ből és II-ből legfeljebb 1000-1000 darabot vesz át. Jelentse A azt az eseményt, hogy az 5 millió eurós exportterv teljesül, és B, hogy III-ból legalább 1000 darabot exportálnak. Igaz-e, hogy A maga után vonja B-t?

Megoldás. Tegyük fel, hogy A teljesül, de B nem. Ekkor a III-ból befolyt összeg kevesebb mint 2,5 millió euró, azaz a többiből összesen több mint 2,5 millió eurónak kellett befolynia, ami ellentmondás. Így A teljesülése esetén B-nek is teljesülnie kell, azaz A maga után vonja B-t.

2. fejezet

Klasszikus valószínűségi mező

Most a legegyszerűbb valószínűségi mezőt mutatjuk be, melyben a biztos esemény egy véges halmaz és minden esemény valószínűsége arányos a számosságával. A gyakorlatban a szerencsejátékok kapcsán merült fel először ennek a vizsgálata.

Definíció

Legyen Ω egy n elemű halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{k}{n},$$

ahol k az A elemeinek a száma. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Tétel

Legyen Ω nem üres véges halmaz, $\mathcal{F}$ az Ω hatványhalmaza és $\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ valószínűség. Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ pontosan abban az esetben klasszikus valószínűségi mező, ha az egyelemű események valószínűségei megegyeznek.

A példák megoldásánál először a biztos eseményt határozzuk meg, hiszen csak az alapján lehet tudni, hogy mennyi az elemeinek a száma (n), amit úgy is szoktak nevezni, hogy az összes esetek száma. Ha ezt tudjuk, akkor már a figyelt A esemény elemeinek a száma (k) is meghatározható, amit kedvező esetek számának is neveznek. Fontos, hogy a biztos esemény minden egyelemű részhalmazának ugyanakkora legyen a valószínűsége, különben nem klasszikus a valószínűségi mező, így a valószínűség sem lesz egyenlő $\frac{k}{n}$-nel.

Az összes illetve kedvező esetek számát legtöbbször ún. kombinatorikai eszközökkel számolhatjuk ki. Először bevezetünk néhány jelölést, amire szükségünk lesz:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

(ejtsd: „n *faktoriális*”), ahol $n \in \mathbb{N}$. Kényelmi okokból még bevezetjük a

$$0! := 1$$

jelölést is. Szükségünk lesz még a *binomiális együttható* fogalmára is:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(ejtsd: „n alatt a k”), ahol $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. A kombinatorikai alapeseteket példákon mutatjuk be.

Ismétlés nélküli permutációk száma ♦ Hányféle ötjegyű számot lehet előállítani az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?

Megoldás. Az első számjegyet ötféleképpen, a következőt négy, aztán három, majd kettő, végül az utolsót már csak egyféleképpen lehet kiválasztani. Így a megoldás $5! = 120$.

Általánosan: n db elemet $n!$-féleképpen lehet sorba állítani úgy, hogy minden elemet pontosan egyszer használunk fel.

Ismétléses permutációk száma ♦ Hányféle hétjegyű számot lehet előállítani az 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?

Megoldás. Ezt a hét db számjegyet $7!$-féleképpen állíthatjuk sorba, de ezekben egy eset $2! \cdot 3! \cdot 2!$-szor ismétlődik. Így a megoldás $\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 210$.

Általánosan: Ha n db elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ db azonos van $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n)$, akkor ezek mindegyikének felhasználásával

$$\frac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r}$$

különböző sorba állítást kaphatunk.

Ismétlés nélküli kombinációk száma ♦ Ötöslottón hányféle számötöst sorsolhatnak ki?

Megoldás. Az első számot 90-féleképpen húzhatják, a következőt 89, majd 88 stb. az ötödiket 86-féleképpen húzhatják ki. Azonban így azokat az eseteket is beleszámoltuk, amikor ugyanazt a számötöst húzták, csak más sorrendben. Egy konkrét számötöst $5!$-féleképpen húzhatnak ki, így a megoldás $\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5!} = \binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \leq k \leq n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt

$$\binom{n}{k}$$

módon tehetjük meg.

Ismétléses kombinációk száma ♦ 10 db postaládába akarunk elhelyezni 15 db egyforma szórólapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Megoldás. A gondolatmenet hosszú, itt csak a végeredményt közöljük: $\binom{10+15-1}{15} = \binom{24}{15} = 1\,307\,504$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

módon tehetjük meg.

Ismétlés nélküli variációk száma ♦ Egy 8 fős brigádból 5 embert kell kiválasztani 5 különböző munkára. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha bármely munkára bárki kiválasztható?

Megoldás. Az első munkára 8 ember közül választhatunk, a másodikra 7 stb. az ötödikre 4 ember közül választhatunk. Így a megoldás $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \binom{8}{5} \cdot 5! = 6720$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \leq k \leq n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend is számít, akkor ezt

$$\binom{n}{k}k!$$

módon tehetjük meg.

Ismétléses variációk száma ♦ Totóban egy tipposzlopot hányféleképpen tölthetünk ki?

Megoldás. 14 db meccsre kell tippelni, egyre 3-féleképpen (1, 2, x). Így a megoldás $3^{14} = 4\,782\,969$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend számít, akkor ezt n^k módon tehetjük meg.

Feladatok

2.1. feladat. Totóban mi a valószínűsége a 10-es találatnak, ha feltesszük, hogy minden tipp bekövetkezésének a valószínűsége egyforma?

Megoldás. Az Ω legyen az 1, 2, x elemek összes 14-edosztályú ismétléses variációjának halmaza. Ekkor minden tippnek megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Ekkor egy klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, melyben a 10-es találat $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3$-féleképpen következhet be. Ugyanis a 10-es találatot az első 13 mérkőzésből kell elérni, ami

$\binom{13}{10} \cdot 2^3$-féleképpen lehetséges, és még a 14. mérkőzésre 3-féleképpen tippelhetünk. Az Ω elemeinek a száma, azaz az összes esetek száma 3^{14}. Így a valószínűség

$$\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3}{3^{14}}.$$

2.2. feladat. 52 lapos römi kártyát szétosztunk Antalnak, Bélának, Józsefnek és Imrének véletlenszerűen úgy, hogy mindenkinek 13 lapja legyen. Mi a valószínűsége annak, hogy a treff ászt Antal kapja meg?

Megoldás. Az $\{\omega_1\}$ reprezentálja azt az esetet, amikor a treff ászt Antal kapja meg, hasonlóan $\{\omega_2\}$ azt amikor Béla, $\{\omega_3\}$ azt amikor József, végül $\{\omega_4\}$ azt amikor Imre kapja meg. Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Egyik személyt sem tünteti ki a többihez képest a leosztás, így az $\{\omega_i\}$-k valószínűségei megegyeznek. Tehát ez klasszikus valószínűségi mező. Ekkor a kedvező esetek száma 1, míg az összes esetek száma 4. Vagyis a valószínűség $\frac{1}{4}$.

Másképpen is megoldhatjuk a feladatot. Az Ω legyen a kártya 52 lapjának összes 13-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának halmaza. Ekkor az Antalnak kiosztott lapok bármely kombinációjának megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Mivel ezek valószínűségei egyformák a szimmetria viszonyok miatt, ezért klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Azon esetek száma amikor a treff ász a kombinációban van, azaz a kedvező esetek száma, $\binom{51}{12}$. Az Ω elemeinek a száma $\binom{52}{13}$. Így a valószínűség $\binom{51}{12} : \binom{52}{13} = \frac{1}{4}$.

2.3. feladat. Két szabályos kockát feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Megoldás. Először azt tisztázzuk, hogy a két kockát meg kell-e különböztetni vagy sem? A válasz meglepő módon az, hogy mindegy. Ugyanis az szubjektív tény, hogy meg tudjuk-e különböztetni a kockákat vagy sem, míg a valószínűség értéke objektív.

Most tekintsük azt az esetet, amikor a két kockát megkülönböztetjük. Ekkor

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),\dots,(1,6),\\ &(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\\ &\vdots\\ &(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}$.

Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor a két kockát nem különböztetjük meg! Ebben az esetben

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),\dots,(1,6),\\ &\qquad\quad (2,2),\dots,(2,6),\\ &\qquad\qquad\qquad\vdots\\ &\qquad\qquad\qquad (6,6)\}.\end{aligned}$$

A kérdéses esemény $A = \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$, tehát $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{21}$. Ez viszont nem egyezik meg az előbbi eredménnyel, miközben azt mondtuk, hogy mindegy melyik esetet taglaljuk, az eredménynek ugyanannak kell lennie. Mi a látszólagos ellentmondás oka? A második esetbeli rossz számítás. Ugyanis az nem alkot klasszikus valószínűségi mezőt, hiszen például $\mathrm{P}\Big(\{(1,1)\}\Big) \neq \mathrm{P}\Big(\{(1,2)\}\Big)$. Tehát ebben az esetben a $\frac{3}{21}$ hányados nem egyenlő a $\mathrm{P}(A)$ értékével. Ekkor a következő számítás a helyes: Az első esetre visszavezetve (ami klasszikus valószínűségi mező) könnyen látható, hogy $\mathrm{P}\Big(\{(1,6)\}\Big) = \mathrm{P}\Big(\{(2,5)\}\Big) = \mathrm{P}\Big(\{(3,4)\}\Big) = \frac{2}{36}$, így $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{2}{36}$, ami már megegyezik az előző eredménnyel.

Összefoglalva tehát, mindegy, hogy a kockákat megkülönböztetjük vagy sem, de előbbi esetben klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, míg az utóbbiban nem. Ezért célszerűbb a kockák megkülönböztetése.

2.4. feladat. Ötöslottóban egy szelvénnyel játszva, mi a valószínűsége, hogy kettes találatunk lesz?

Megoldás. Legyen Ω az összes lottóötös halmaza, azaz lexikografikus elrendezésben

$$\Omega := \Big\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\ldots,\{86,87,88,89,90\}\Big\}.$$

Ekkor Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}$. Fontos kérdés, hogy ez klasszikus valószínűségi mező-e, azaz például az $\{1,2,3,4,5\}$ és az $\{13,25,41,72,86\}$ lottóötösök valószínűségei megegyeznek-e? Gyakran hallott válasz, hogy nem, mivel az első lottóötös „rendezett”, míg a második nem, továbbá a tapasztalat azt mutatja, hogy sokkal ritkábban húznak „rendezett” lottóötöst. Nos az valóban igaz, hogy ritkábban húznak „rendezett” lottóötöst, de ez azért van így, mert kevesebb van belőlük. De ettől egy konkrét „rendezett” lottóötösnek az esélye még ugyanakkora, mint egy konkrét „rendezetlené”. Hogy ezt megértsük gondoljon egy olyan kockára, melynek a hatos oldala piros, a többi fehér. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy nagyobb eséllyel dobunk fehér oldalt, mint pirosat, másrészt viszont a hatos és az egyes dobás valószínűségei megegyeznek, pedig a hatos oldal piros, míg az egyes oldal fehér.

Egy másik magyarázat arra, hogy miért kapunk klasszikus esetet: A számoknak itt csak annyi a jelentősége, hogy az egyes golyókat megkülönböztesse. Viszont a számoknak van egy olyan tulajdonsága, aminek a lottóban nincs szerepe, nevezetesen a rendezettség. Ebből fakadóan tűnik egy lottóötös „rendezettnek” vagy „rendezetlennek”.

Most már rátérhetünk a számolásra. Az általunk tippelt öt számból kettőt kell kihúzni, mely $\binom{5}{2}$ módon lehetséges, míg a többi 85-ből hármat, mely $\binom{85}{3}$ módon lehetséges. Így a megoldás

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}0225.$$

Ez azt jelenti, hogy hetenként egy szelvénnyel játszva, hosszú távon átlagosan, kb. 44 hetenként egyszer lesz kettesünk az ötöslottón.

2.5. feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy ötöslottón kétszer egymásután ugyanazokat a számokat húzzák ki?

Megoldás. Az első és a második héten is $\binom{90}{5}$ lottóötöst húzhatnak ki, így az Ω elemeinek a száma $\binom{90}{5}^2$. Ebből a kedvező esetek száma $\binom{90}{5} \cdot 1$, hiszen az első héten tetszőlegesen húzhatnak, de a következő héten már csak azt húzhatják, amit előtte. Így a megoldás

$$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}^2} = \frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

2.6. feladat. Egy dobozban 7 piros és 5 fekete golyó van. Ha visszatevés nélkül kivesszük mind a 12 golyót, mennyi annak a valószínűsége, hogy feketét húzunk utoljára?

Megoldás. $\dfrac{5}{12}$

2.7. feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan négy darab hatost dobunk?

Megoldás. $\dfrac{\binom{10}{4} \cdot 1^4 \cdot 5^6}{6^{10}} = \binom{10}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$

2.8. feladat. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány feketét kell hozzátenni, hogy fekete golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

Megoldás. $\frac{x}{x+5} > 0{,}9$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni, ahol x a feketék száma. Ennek megoldása $x > 45$, azaz legalább 46 feketét kell a dobozba tenni.

2.9. feladat. A számjegyeket véletlenszerűen egymásmellé írjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy két prímszám között nem lesz prímtől különböző?

Megoldás. A prím számjegyek: 2, 3, 5, 7. Ezeket írjuk egy lapra, a többit pedig külön lapokra. Így 7 darab cetli lesz, amiknek a kisorsolásával úgy tudunk egy véletlenszerű sorrendet előállítani, hogy két prím között nem lesz prímtől különböző. Ugyanakkor a prímeket tartalmazó cetlire 4!-féleképpen írhatjuk fel a számokat, sorrendjüket tekintve. Ezért az eredmény $\frac{4!7!}{10!}$.

2.10. feladat. Nyolc bástyát véletlenszerűen elhelyezünk egy sakktáblán. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

Megoldás. $\dfrac{8!}{\binom{64}{8}}$

2.11. feladat. Hat dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^6}$, így ennek ellenkezője $1 - \frac{6!}{6^6}$ valószínűséggel következhet be.

2.12. feladat. Öt dobókockát egyszerre feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy lesz közöttük legalább két egyforma értékű?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy minden kockán más érték van $\frac{6!}{6^5}$, így ennek ellenkezője $1-\frac{6!}{6^5}$ valószínűséggel következhet be.

2.13. feladat. Egy dobozban 15 papírlap van 1-től 15-ig megszámozva. Találomra kiveszünk 5 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

Megoldás. $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}}$

2.14. feladat. Mi valószínűbb, 6 kockával legalább egy darab egyest vagy 12 kockával legalább két darab egyest dobni?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy 6 kockával nem dobunk egyest $\frac{5^6}{6^6}$, míg annak esélye, hogy 12 kockával maximum egy darab egyest dobunk $\frac{5^{12}+12\cdot 5^{11}}{6^{12}}$. Az utóbbi nagyobb, ezért az a valószínűbb, hogy 6 kockával legalább egy darab egyest dobunk.

2.15. feladat. Legalább hány pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legyen közöttük fej dobás?

Megoldás. Annak valószínűsége, hogy n pénzérmét feldobva nincs közöttük fej, $\frac{1}{2^n}$. Így annak kell teljesülni, hogy

$$1-\frac{1}{2^n}>0{,}9.$$

Ennek megoldása $n>\log_2 10\approx 3{,}32$, melyből következik, hogy legalább 4 pénzérmét kell feldobni.

2.16. feladat. A 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között mind a négy szín előfordul?

Megoldás. A kihúzott 6 lap között mind a négy szín megjelenése kétféle módon valósulhat meg: vagy 3 lap van az egyik színből, a többiből pedig 1–1–1, vagy két színből van 2–2 lap, a többiből pedig 1–1. Tekintsük először a 3–1–1–1 eloszlást. Ez például 3 piros, 1 zöld, 1 tök, és 1 makk esetén

$$\binom{8}{3}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}=\binom{8}{3}8^3$$

különböző módon valósulhat meg. Azonban 4 különböző módon lehet a színeket összeállítani ilyen eloszlásban, így ezen esetek száma

$$4\binom{8}{3}8^3.$$

A 2–2–1–1 eloszlás esetén, először például számoljuk össze azon eseteket, amikor 2 piros, 2 zöld, 1 tök, és 1 makk lesz:

$$\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1}=\binom{8}{2}^2 8^2.$$

De ez az eloszlás $\binom{4}{2} = 6$ módon valósulhat meg. Összegezve, az eredmény:

$$\frac{4\binom{8}{3}8^3 + 6\binom{8}{2}^2 8^2}{\binom{32}{6}} \approx 0{,}1384.$$

2.17. feladat. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős társaságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik?

Megoldás. $\dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336}{365^{30}} = \dfrac{365!}{335! \cdot 365^{30}} \approx 0{,}29.$

2.18. feladat. Egy televíziós vetélkedőben három ajtó közül az egyik mögött autó, a másik kettő mögött kecske található. A játékos a becsukott ajtók közül kiválaszt egyet, majd a játékvezető a másik kettő közül kinyit egy olyat, ami mögött kecske van. A játékos ezután még egyszer dönthet. Az eredetileg kiválasztott ajtónál marad, vagy inkább a másik ajtóra tippel. Vajon mikor nagyobb a valószínűsége annak, hogy nyer a játékos? Ha változtat az első döntésén, vagy ha kitart mellette? Esetleg teljesen mindegy, mert maradnak az esélyek?

Ezt a játékot Monty Hall-dilemmának is nevezik, mert Monty Hall „Let's make a deal" című tévés vetélkedőjében játszották. Marilyn Savant – akinek az IQ-ja 228, ami a valaha mért legnagyobb érték – a váltás mellett érvelt. Azonban a legtöbb matematikus – köztük Erdős Pál – nem tartotta jónak a magyarázatot. Akkor hát mi az igazság?

Megoldás. Ha nem változtat a játékos az első tippen, akkor abban az esetben nyer, ha eltalálta a nyerő ajtót, melynek $\frac{1}{3}$ a valószínűsége. De ha változtat, akkor pontosan abban az esetben nyer, ha elsőre nem találta el a nyerő ajtót, hiszen ekkor a játékvezető a másik rossz ajtót nyitja ki, így amire változtat a játékos, ott biztosan autó van. Ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$. Összegezve tehát, igaza volt Marilyn Savantnak, azaz megváltoztatva a tippünket, kétszeresére nő az esélyünk a nyerésre.

Amint látjuk, az ember első reakciójához képest (ami az, hogy a változtatás nem befolyásolhatja a valószínűséget) meglepő a valóság, ugyanakkor nagyon egyszerű a magyarázat. Akkor miért váltott ki Savant érvelése ekkora ellenállást a matematikusok körében? Nos, Savant eredeti magyarázata meglehetősen körülményes és nehezen érthető volt, ugyanakkor a matematikusok első gondolata, miszerint nem változik a valószínűség, annyira nyilvánvalónak tűnt számukra, hogy nem vették a fáradtságot Savant magyarázatának értelmezésére.

2.19. feladat. Excel segítségével modellezzük a Monty Hall-dilemmát, majd számoljuk ki a nyert játékok relatív gyakoriságát mindkét stratégia esetén!

Megoldás. Az `A1` cellába írja a következőt:

```
=INT(3*VÉL()+1)
```

Ezután nyomjon Entert, majd lépjen vissza az `A1` cellára. Az ott megjelenő szám jelentse annak az ajtónak a számát, amely mögött az autó van. A cella jobb alsó sarkában található kitöltő jelet (egy kis négyzet) egérrel húzza át a `B1` cellára. Az ott megjelent szám fogja jelenteni annak az ajtónak a számát, amelyre a játékos tippel elsőre. Az `C1` cellába írja a következőt:

`=HA(A1=B1;1;0)`

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám aszerint 1 vagy 0, hogy változtatás nélkül nyerünk vagy veszítünk. A `D1` cellába írja a következőt:

`=HA(C1=0;1;0)`

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám aszerint 1 vagy 0, hogy változtatással nyerünk vagy veszítünk. Jelölje ki az `A1:D1` cellatartományt, majd annak kitöltőjelét húzza le addig a sorig, amennyi játékot akar szimulálni. Az `E1` cellába írja a következőt:

`=SZUM(C:C)/DARAB(C:C)`

Ezután nyomjon Entert. Az ott megjelenő szám a változtatás nélküli játékokban a nyert játékok relatív gyakorisága. Végül a `C1` cella kitöltőjelét húzza át a `D1` cellára. Az ott megjelenő szám a változtatással történő játékokban a nyert játékok relatív gyakorisága. Ha megnyomja az F9 billentyűt, akkor egy újabb játéksorozat generálódik.

3. fejezet

Geometriai valószínűségi mező

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olyan valószínűségi mező, melyben Ω pozitív véges mértékű k-dimenziós geometriai alakzat, továbbá

$$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

ahol m az adott halmaz mértékét jelenti. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$-t *$k$-dimenziós geometriai valószínűségi mezőnek* nevezzük.

A definícióban a geometriai alakzat mértéke a hosszúságot, területet vagy térfogatot jelenti aszerint, hogy egy-, kettő- vagy háromdimenziós.

Tétel

Ha két kísérletet hajtunk végre egymástól függetlenül, melyeket az $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$ egydimenziós geometriai valószínűségi mezők írnak le, akkor ezeket egyszerre modellezhetjük egy olyan kétdimenziós geometriai valószínűségi mezővel, melyben a biztos esemény $\Omega_1 \times \Omega_2$.

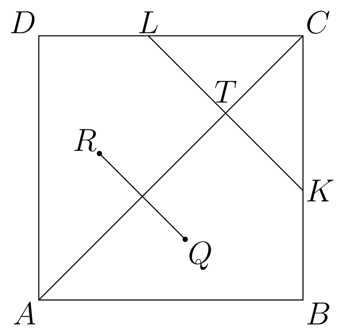
Feladatok

3.1. feladat. Egy egységsugarú körlapban vele koncentrikus 9 darab kört rajzolunk úgy, hogy a kapott 10 rész bármelyikébe egyforma valószínűséggel választhatunk ki pontot. Mekkorák a körök sugarai?

Megoldás. Ha az i. koncentrikus kör sugarát r_i jelöli, akkor $r_i^2\pi - r_{i-1}^2\pi = \frac{\pi}{10}$, azaz $r_i^2 - r_{i-1}^2 = 0{,}1$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 9$ és $r_0 = 0$. Ebből kapjuk, hogy $r_i = \sqrt{0{,}1i}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 9$.

3.2. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy Q pontot egy $ABCD$ egységnégyzet belsejében. Tükrözzük az AC átlóra, a kapott pontot jelöljük R-rel. Legyen S a QR szakasz felezőpontja! Mi a valószínűsége annak, hogy az AS távolság kisebb, mint 1?

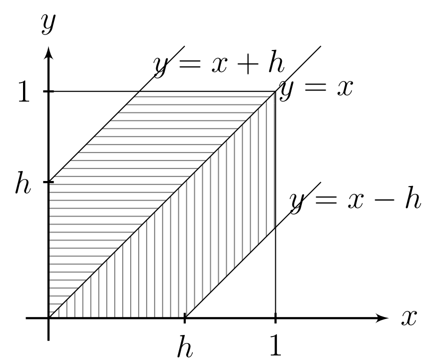
Megoldás. Az AC átlóra mérjünk fel egységnyi távolságot az A ponttól. A kapott pontot jelöljük T-vel. A T pontban állítsunk merőlegest az AC átlóra, amely a DC oldalt az L pontban, a CB oldalt pedig K pontban metszi.



Ekkor a keresett valószínűség az $ABKLD$ ötszög területe, ami $TC = \sqrt{2} - 1$ miatt $1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 2$.

3.3. feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszú szakasznál?

Megoldás. Tekintsük az egyik végpontját az egységnyi hosszúságú szakasznak. A választott P_1 illetve P_2 pontoknak ettől a végponttól való távolsága legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ teljesül. Feltételezzük, hogy egyetlen pont kiválasztása esetén geometriai valószínűségi mezőről van szó, így a két kísérlet egyszerre is leírható egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőben, ahol $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.



Kérdés a $B = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| < h\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az Ω-t, melyben a satírozott rész jelöli a B halmazt. Felírva a B és az Ω területeinek a hányadosát, azt kapjuk, hogy $\mathrm{P}(B) = 2h - h^2$.

3.4. feladat. Ketten találkoznak egy adott órában. Egyik a másikra maximum 10 percet vár. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?

Megoldás. Vegyük észre, hogy ez a 3.3. feladat speciális esete $h = \frac{1}{6}$ választással. Így a valószínűség $\frac{11}{36}$.

3.5. feladat. Egy raktárhoz egy adott órában két szállítmány érkezik, de egyszerre csak az egyik szállítmányt tudják kipakolni, amely 20 percig tart. Mi a valószínűsége, hogy egyik szállítmánynak sem kell a másikra várni?

Megoldás. Ez a 3.3. feladatban megfogalmazott esemény ellentettje $h = \frac{1}{3}$ választással. Így a valószínűség $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

3.6. feladat. Kiválasztunk két valós számot, p-t és q-t a $[0, 1]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy az

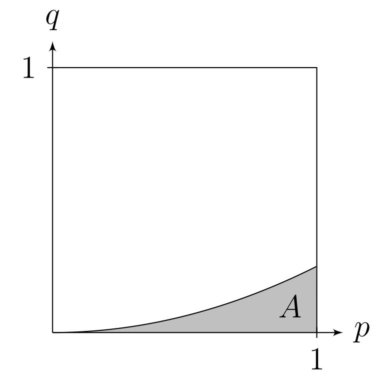
$$x^2 + px + q = 0$$

egyenletnek van valós gyöke?

Megoldás. $p, q \in [0, 1]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, továbbá a keresett halmaz

$$A = \{(p, q) \in \Omega : q \leq 0{,}25p^2\}$$

a következő ábrán látható:



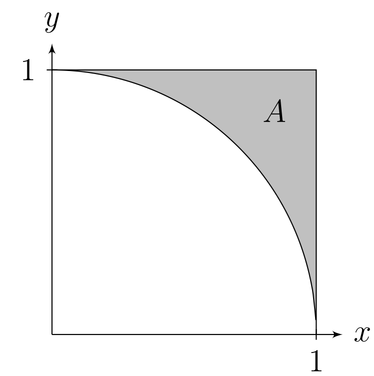
Így $\mathrm{P}(A) = \int\limits_0^1 0{,}25p^2 \,\mathrm{d}p = \dfrac{1}{12}$.

3.7. feladat. A $[0, 1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük 1-nél nagyobb?

Megoldás. Legyen a kiválasztott két szám x és y. Ekkor $x, y \in [0, 1]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times$ $\times [0, 1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 > 1\}$$

a következő ábrán látható:



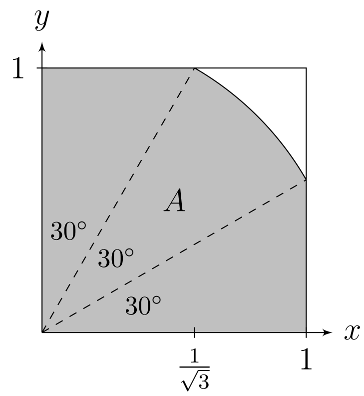
Így $\mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

3.8. feladat. A $[0,1]$ intervallumon kiválasztunk két számot. Mi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük kisebb mint $\frac{4}{3}$?

Megoldás. Legyen a kiválasztott két szám x és y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times$ $\times [0,1]$. A keresett halmaz

$$A = \left\{(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 < \frac{4}{3}\right\}$$

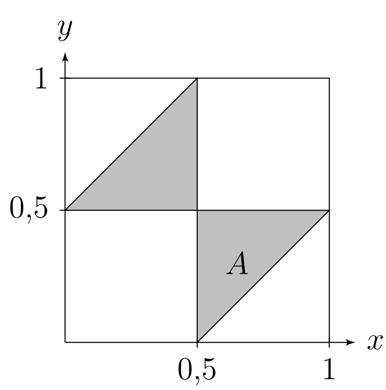
a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\frac{4}{3}\pi}{12} + \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}{2} \cdot 2 = \dfrac{\pi + 3\sqrt{3}}{9}$.

3.9. feladat. Egy pálcát két helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög?

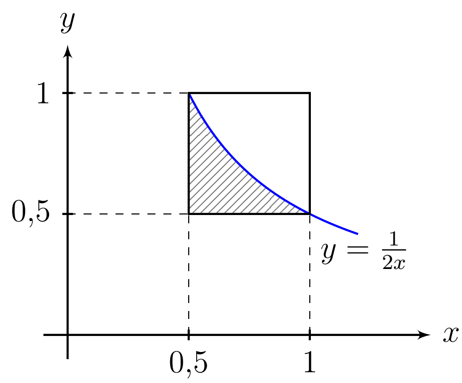
Megoldás. A pálca legyen egységnyi hosszúságú, és a két töréspont távolsága az egyik végponttól legyen x illetve y. Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Ha $x \le y$, akkor a három pálca hossza x, $y - x$ és $1 - y$. Ezek közül bármely kettő összegének nagyobbnak kell lennie, mint a harmadik. Ezért az $y > 0{,}5$, $y < x + 0{,}5$ és $x < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülni. Ha $y < x$, teljesül, akkor az $x > 0{,}5$, $x < y + 0{,}5$ és $y < 0{,}5$ egyenlőtlenségeknek kell egyszerre teljesülni. Tehát a keresett A halmaz



Így $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{4}$.

3.10. feladat. Egy pálcát eltörünk, majd a keletkezett két pálca közül a hosszabbat ismét eltörjük. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három pálcából kirakható egy háromszög?

Megoldás. Legyen a szakasz egységnyi hosszúságú. Az első pont kiválasztása után kapott szakaszok közül a hosszabbik hosszát jelöljük x-szel. Ebből a szakaszból a következő pont kiválasztásával ismét két szakaszt kapunk. Célszerűnek tűnik ezek közül megint a hosszabbiknak a hosszát eljelölni például y-nal. De ebben az esetben nem kaphatunk geometriai valószínűségi mezőt, mert y hossza nem független x-től. A helyes megoldásban az előbbi y-nal jelölt szakaszhosszt úgy kellene eljelölni, hogy a paraméter már független legyen x-től. Például ilyen lehetőség, hogy y ne magát a szakaszhosszt jelentse, hanem a szakaszhossz és x arányát. Vagyis a másodiknak választott hosszabb szakasz hossza legyen yx. Így már $x, y \in [0{,}5; 1]$. Ebből a kérdéses geometriai valószínűségi mezőben $\Omega = [0{,}5; 1] \times [0{,}5; 1]$.



Ebben az

$$A = \{(x, y) \in \Omega : (1 - x) + (x - yx) > yx\} = \left\{(x, y) \in \Omega : y < \frac{1}{2x}\right\}$$

esemény valószínűségét kell meghatározni, melyet a satírozott rész jelöl. Az ábra alapján az A területe

$$\int_{0{,}5}^{1} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x - 0{,}25 = 0{,}5[\ln x]_{0{,}5}^{1} - 0{,}25 = 0{,}5 \ln 2 - 0{,}25,$$

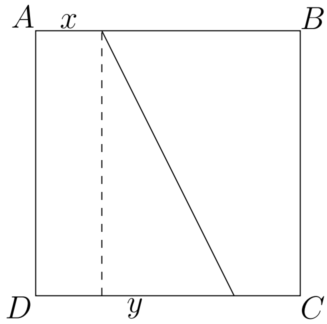
továbbá Ω területe 0,25. Így $\mathrm{P}(A) = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$.

3.11. feladat. Válasszunk véletlenszerűen egy x számot a $[0, 1]$ intervallumon, és egy y számot a $[0, 2]$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy egy x, egy y és egy egységnyi hosszúságú szakaszból háromszög szerkeszthető?

Megoldás. Ekkor $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 2]$ miatt $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$. A következő három egyenlőtlenségnek kell teljesülni: $x + y > 1$, $x + 1 > y$ és $y + 1 > x$. A harmadik a feltételekkel mindig teljesül egy 0 területű helyet kivéve, így csak az első kettőt kell vizsgálni. Felrajzolva kapjuk, hogy az $A := \{(x, y) \in \Omega : x + y > 1,\ x + 1 > y\}$ területe 1. Mivel Ω területe 2, ezért a valószínűség 0,5.

3.12. feladat. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy ezek távolsága kisebb mint 1,3?

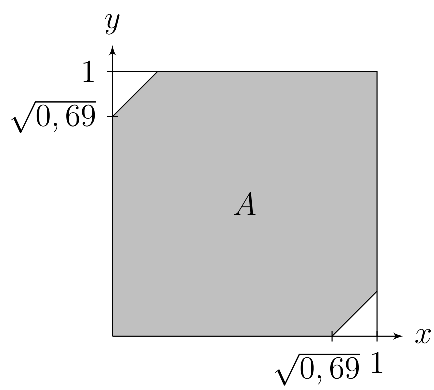
Megoldás. Az $ABCD$ egység oldalú négyzeten az AB és DC oldalakon válasszuk ki a két pontot. Az AB oldalon lévő pontnak az A ponttól mért távolsága legyen x. A DC oldalon lévő pontnak a D ponttól mért távolsága legyen y.



Ekkor $x, y \in [0,1]$ miatt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. A keresett halmaz

$$A = \{(x,y) \in \Omega : (x-y)^2 + 1 < 1{,}3^2\}$$

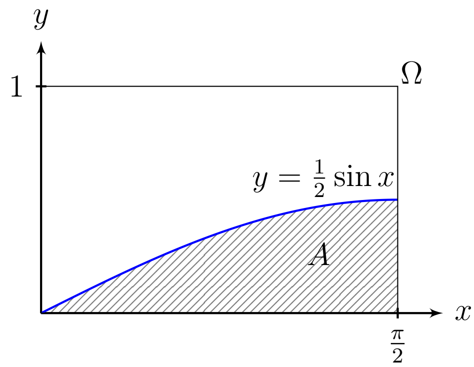
a következő ábrán látható:



Így $\mathrm{P}(A) = 1 - (1 - \sqrt{0{,}69})^2 \approx 0{,}9713$.

3.13. feladat (Buffon-féle tűprobléma)**.** Egy vízszintes síklapon párhuzamos egyeneseket húzunk egymástól 2 egységnyi távolságokra. Mi a valószínűsége, hogy egy egységnyi hosszúságú tűt ráejtve a síkra, az elmetszi valamelyik egyenest?

Megoldás. Legyen y a tű középpontjának a távolsága a hozzá legközelebb eső egyenestől, x pedig a tű és az egyenes által bezárt szög mértéke radiánban. Így $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $y \in [0,1]$. Az x és y kiválasztása egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mezőben is leírható, ahol $\Omega := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$. Mivel x szögnél pontosan $y \le \frac{1}{2}\sin x$ teljesülése esetén metszi az egyenest a tű, ezért a kérdés az $A := \{(x,y) \in \Omega : y \le \frac{1}{2}\sin x\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt.



Az Ω területe $\frac{\pi}{2}$, az A területe pedig

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2},$$

ezért $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{\pi}$.

4. fejezet

Feltételes valószínűség, események függetlensége

Szabályos kockával dobjunk 10-szer. Tegyük fel például, hogy a következő számokat kapjuk:

$$1, 5, 4, 5, 5, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Jelölje A azt az eseményt, hogy maximum hármast dobunk, és B azt, hogy páros számot dobunk. Az A, B és $A \cap B$ események relatív gyakoriságait jelöljük rendre $r(A)$, $r(B)$ és $r(A \cap B)$ módon. Ekkor

$$r(A) = \frac{3}{10},\ r(B) = \frac{6}{10},\ r(A \cap B) = \frac{2}{10}.$$

A valószínűség modellezésének bevezetésénél volt egy feltételünk a dobókocka kísérlet végrehajtásánál. Abban az esetben, amikor élére esik a kocka, a dobást ne vegyük számításba. Most ezt a feltételt tovább bővítjük. Akkor se vegyük számításba a dobást, ha nem páros számot dobunk, azaz nem a B következik be. Így már csak 6 érvényes dobásunk van:

$$\cancel{1}, \cancel{5}, 4, \cancel{5}, \cancel{5}, 6, 4, 2, 2, 6.$$

Ebben a módosított kísérletben az A esemény nem 3-szor, hanem csak kétszer következett be, így a relatív gyakorisága $\frac{2}{6}$. Ezt jelöljük $r(A \mid B)$-vel. Tehát most

$$r(A \mid B) = \frac{2}{6}.$$

Ez a relatív gyakoriság pontosan olyan tulajdonságot fog mutatni, mint az eredeti relatív gyakoriság, azaz sok kísérlet esetén egy bizonyos érték körül fog ingadozni. Ezt az értéket az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük, továbbá $\mathrm{P}(A \mid B)$ módon jelöljük.

Hogyan lehet ezt a feltételes valószínűséget kiszámolni az eredeti valószínűségi mezőben? Az $r(A \mid B)$ értéke úgy jött ki, hogy a nevezőben csak a B bekövetkezéseinek a számát, azaz B gyakoriságát írtuk, míg a számlálóba az A-nak azon bekövetkezéseit írtuk, amikor B is bekövetkezett, hiszen a többit töröltük. Így teljesül a következő:

$$r(A \mid B) = \frac{r(A \cap B)}{r(B)}.$$

A modellünkben tehát a feltételes valószínűség a következő módon definiálható:

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. A

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

számot, az A *esemény* B-re *vonatkozó feltételes valószínűségének* nevezzük.

Tétel Szorzattétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B).$$

Jelentse A azt, hogy dobókockával elsőre hatost, illetve B azt, hogy másodikra hatost dobunk, azaz $A := \{(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$ és $B := \{(1,6), (2,6), \ldots, (6,6)\}$. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{6}$, vagyis A-nak a valószínűsége, függetlenül attól, hogy a B feltétellel vizsgáljuk vagy anélkül, mindig $\frac{1}{6}$.

A továbbiakban, ha $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy A független B-től. Könnyű ellenőrizni, hogy B is független A-tól, hiszen $\mathrm{P}(B) = \frac{6}{36}$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{6}$, tehát megegyeznek. A függetlenségnek ez a szimmetria tulajdonsága általánosan is igaz, azaz A pontosan akkor független B-től, ha B független A-tól.

Vegyük észre, hogy $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \neq 0$ esetén a függetlenség fogalma ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Ez a képlet akkor is alkalmazható, ha $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = 0$, másrészt a szimmetria azonnal látható belőle. Ezért a továbbiakban ezt fogadjuk el a függetlenség definíciójának.

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy az A és B események *függetlenek*, ha

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Az A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

Tétel

Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben az A és B események akkor és csak akkor függetlenek, ha az A és $\overline{B}$ függetlenek.

Feladatok

4.1. feladat. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

Megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7, B pedig azt, hogy páratlan. Ekkor $A \subset B$ miatt $A \cap B = A$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Mivel $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ és $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, ezért $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

4.2. feladat. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával hatost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik kockán hatos van, és B azt, hogy a dobott számok összege 12. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{25}{6^3}} = \frac{3}{5}.$$

4.3. feladat. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jutott ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következő sem kapott?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a 2. játékosnál nincs ász, és B azt, hogy az 1. játékosnál nincs ász. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{\binom{28}{8}\binom{20}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}}{\frac{\binom{28}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}} = \frac{\binom{20}{8}}{\binom{24}{8}}.$$

4.4. feladat. Ha egyetlen szelvénnyel lottózunk az ötöslottón, továbbá a számaink között a nagyság szerinti középső szám a 40-es, akkor mi a valószínűsége, hogy ötös találatunk lesz, feltéve, hogy a kihúzott számok között is a nagyság szerinti középső a 40-es?

Megoldás. $\frac{1}{\binom{39}{2}\binom{90-40}{2}}$.

4.5. feladat. Két kockával addig dobunk, amíg legalább az egyik hatost nem mutat. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik is hatost mutat?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy mindkét kocka hatost mutat, míg B azt, hogy legalább az egyik kocka hatos. Ekkor $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$.

4.6. feladat. Részeges Rezső a nap harmadát kocsmában tölti. A faluban négy kocsma van, bármelyikben előfordulhat ugyanakkora eséllyel. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Három kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége, hogy a negyedikben lesz?

Megoldás. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az általunk i-ediknek felkeresett kocsmában van Rezső. Ekkor $\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Így

$$\mathrm{P}(A_4 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}) = \frac{\mathrm{P}(A_4 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2})}{\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2})} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})} =$$
$$= \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \frac{\mathrm{P}(A_4)}{1 - \mathrm{P}(A_1) - \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_3)} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{3}{12}} = \frac{1}{9}.$$

4.7. feladat. Két dobozból az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 4 piros és 5 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk egy golyót a másodikba, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét alkalommal pirosat húzunk?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy másodikra pirosat húzunk, B pedig azt, hogy elsőre pirosat húzunk. Ekkor a szorzattétel alapján

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{70}.$$

4.8. feladat. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}(A) = 0{,}7$ és $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathrm{P}(A \mid B) \geq 0{,}625$!

Megoldás. $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 1{,}5 - \mathrm{P}(A \cup B) \geq 0{,}5$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{0{,}8} \geq \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$$

4.9. feladat. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}3$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}6$. Mivel egyenlő $\mathrm{P}(A)$?

Megoldás. A feltételek miatt

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) &= 0{,}7\,\mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) &= 0{,}3\,\mathrm{P}(\overline{B}) \\
\mathrm{P}(A \cap B) &= 0{,}6\,\mathrm{P}(A).
\end{aligned}$$

Ezekből $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}7\,\mathrm{P}(B) + 0{,}3\,\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}4\,\mathrm{P}(B) + 0{,}3$, továbbá $0{,}7\,\mathrm{P}(B) = 0{,}6\,\mathrm{P}(A)$. Így

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}4 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}7}\,\mathrm{P}(A) + 0{,}3,$$

azaz $\mathrm{P}(A) = \frac{21}{46}$.

4.10. feladat. Legyen $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$ és $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $\mathrm{P}(A \cup B)$ és a $\mathrm{P}(\,\overline{A} \mid \overline{B}\,)$ valószínűségeket!

Megoldás. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ miatt A és B függetlenek, így $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Ebből

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \frac{5}{8}.$$

Másrészt ekkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek, ezért $\mathrm{P}(\,\overline{A} \mid \overline{B}\,) = \mathrm{P}(\,\overline{A}\,) = \frac{3}{4}$.

4.11. feladat. Egy dobozban 2 fehér és 4 fekete golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk négy golyót. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fekete. A B esemény jelentse azt, hogy az utolsónak kivett golyó fekete. Függetlenek-e A és B?

Megoldás. $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{4}{6}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}$, azaz $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Így A és B események nem függetlenek.

4.12. feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy kockával kétszer dobva másodikra hatost dobunk, feltéve, hogy elsőre hatost dobtunk? A két esemény független-e egymástól?

Megoldás. Jelölje A azt, hogy másodikra hatost dobunk, B pedig azt, hogy elsőre hatost dobunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6},$$

másrészt

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36}.$$

Így $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$, azaz A és B függetlenek.

4.13. feladat. Az 52 lapos francia kártyából kihúzunk egy lapot. Független-e az ász húzása a kőr húzásától?

Megoldás. Jelölje A azt, hogy ászt húzunk, B pedig azt, hogy kőrt húzunk. Ekkor $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{52}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{13}{52}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Ebből kapjuk, hogy $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, azaz A és B függetlenek.

4.14. feladat. Egy kockát és két pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán 6-ost, az egyik pénzérmén írást a másikon pedig fejet dobunk?

Megoldás. $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}.$

4.15. feladat. Egy párbajban Antal és Béla felváltva lőnek egymásra első vérig. Antal 0,3 valószínűséggel talál célba, Béla pedig 0,9-del. Mennyi a valószínűsége, hogy Antal győz, ha ő kezdi a párbajt?

Megoldás. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy Antal i-edik lövése talál, B_i pedig azt, hogy Béla i-edik lövése talál, továbbá C jelölje azt, hogy Antal győz. Ekkor

$$C = A_1 \cup (\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) \cup (\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) \cup \dots$$

Mivel ez C-nek diszjunkt felbontása és az $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ események függetlenek, ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) + \dots = \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1}\,)\,\mathrm{P}(\,\overline{B_1}\,)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(\,\overline{A_1}\,)\,\mathrm{P}(\,\overline{B_1}\,)\,\mathrm{P}(\,\overline{A_2}\,)\,\mathrm{P}(\,\overline{B_2}\,)\,\mathrm{P}(A_3) + \dots = \\ &= 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}3 + \dots = \\ &= 0{,}3 \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}07^n = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}07} = \frac{10}{31}. \end{aligned}$$

4.16. feladat. Dobókockával dobunk egymásután. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik ötös a nyolcadik dobásra jön ki?

Megoldás. $\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}$

4.17. feladat. Ha az A, B és C események függetlenek és $\mathrm{P}(A) = 2\,\mathrm{P}(B) = 2\,\mathrm{P}(C) = \frac{1}{4}$, akkor mennyi $\mathrm{P}(A \cup B \mid B \cup C)$?

Megoldás. A függetlenség miatt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B \mid B \cup C) &= \frac{\mathrm{P}\big((A \cup B) \cap (B \cup C)\big)}{\mathrm{P}(B \cup C)} = \frac{\mathrm{P}\big(B \cup (A \cap C)\big)}{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)} = \\ &= \frac{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap A \cap C)}{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)} = \frac{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)} = \\ &= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{39}{60}. \end{aligned}$$

5. fejezet

Teljes valószínűség tétele

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ *teljes eseményrendszer*, ha osztályozása Ω-nak, azaz $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i, j \in$ $\in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ esetén, továbbá $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. Másképpen fogalmazva, ekkor a $B_1, \dots, B_n$ események közül minden esetben pontosan egy teljesül.

Tétel Teljes valószínűség tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ekkor bármely $A \in \mathcal{F}$ eseményre

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\, \mathrm{P}(B_i).$$

Ha valamely A eseményt mint okozatot tekintjük, amit a $B_1, \dots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az okozat bekövetkezésére, azaz a $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ értékeket tudva, a teljes valószínűség tétele értelmében az okozat valószínűsége meghatározható.

Feladatok

5.1. feladat. Egy céllövöldében 6 puska van. Ezek közül 3 darab 0,5 valószínűséggel talál célba, 1 darab 0,7-del és 2 darab 0,8-del. Mi a valószínűsége, hogy célba találunk, ha a puskát találomra választjuk ki?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy célba találunk, B_1, hogy 0,5-es, B_2, hogy 0,7-es, végül B_3, hogy 0,8-es puskát választunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\, \mathrm{P}(B_i) = 0{,}5 \cdot \frac{3}{6} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}8 \cdot \frac{2}{6}.$$

5.2. feladat. Két doboz mindegyikében 100-100 darab csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel kiválasztjuk valamelyiket, amelyből találomra kiveszünk egy csavart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a csavar jó?

Megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az első dobozból húzunk, míg B_2 azt, hogy a másodikból, illetve A azt, hogy a kiválasztott csavar jó. Ekkor B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot, így a teljes valószínűség tétele értelmében

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{94}{100} \cdot \frac{1}{2}.$$

5.3. feladat. Egy gyárban a legyártott termékeket százasával csomagolják dobozokba. A legyártott dobozok $\frac{1}{6}$ részében 0 darab termék hibás, $\frac{5}{12}$ részében 1 darab termék hibás, $\frac{1}{4}$ részében 2 darab termék hibás, $\frac{1}{12}$ részében 3 darab termék hibás, és a fennmaradó $\frac{1}{12}$ részében 4 darab termék hibás. A dobozok közül véletlenszerűen válasszunk ki egyet, majd abból emeljünk ki egy műszert. Mi a valószínűsége, hogy hibátlan műszert választottunk?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy hibátlan műszert választottunk, B_i, hogy olyan dobozból választunk, amelyben 100-ból i darab rossz. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{100}{100} \cdot \frac{1}{6} + \frac{99}{100} \cdot \frac{5}{12} + \frac{98}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{97}{100} \cdot \frac{1}{12} + \frac{96}{100} \cdot \frac{1}{12}.$$

5.4. feladat. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mi a valószínűsége, hogy a harmadiknak kivett golyó piros?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a harmadik húzás piros, B_1, hogy az első két húzás 2 darab fehér, B_2, hogy az első két húzás 2 darab piros, végül B_3, hogy az első két húzás egyike fehér a másik pedig piros. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{0}{5} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

5.5. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba egy golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy másodjára piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre pirosat, B_2, hogy elsőre feketét és A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7}.$$

5.6. feladat. Két doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban pedig 2 piros és 3 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba két golyót, majd a másodikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a második dobozból piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre két pirosat, B_2, hogy elsőre két feketét, B_3, hogy elsőre egy pirosat és egy feketét, továbbá A, hogy másodikra pirosat húzunk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \frac{4}{7} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{3}{7} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}.$$

5.7. feladat. Három doboz közül az elsőben 3 piros és 4 fekete, a másodikban 2 piros és 3 fekete golyó van, a harmadikban pedig 5 piros és 4 fekete golyó van. Az első dobozból átteszünk a másodikba egy golyót, majd a másodikból a harmadikba átteszünk egy golyót, végül a harmadikból választunk ki egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik dobozból piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelölje B_1, hogy elsőre pirosat, B_2, hogy elsőre feketét, A_1, hogy másodikra pirosat, A_2, hogy másodikra feketét és C, hogy harmadikra pirosat húzunk. Ekkor az 5.5. feladat megoldása szerint $\mathrm{P}(A_1) = \frac{17}{42}$, melyből $\mathrm{P}(A_2) = \frac{25}{42}$. Így

$$\mathrm{P}(C) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(C \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i) = \frac{6}{10} \cdot \frac{17}{42} + \frac{5}{10} \cdot \frac{25}{42}.$$

5.8. feladat. Egy rab kap két egyforma dobozt, 10 fehér és 10 fekete golyót. A golyókat tetszőlegesen elrendezheti a dobozokban, de fel kell használnia az összeset. Ezután a két doboz valamelyikéből húznia kell. Hogy melyik dobozból, azt sorshúzással döntik el. Ha fehéret húz, akkor kiszabadul. Hogyan kell elrendezni a golyókat, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel szabaduljon ki?

Megoldás. Ha az egyik doboz üres lenne, akkor a fehér húzásának a valószínűsége $0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. De ez nem lehet jó megoldás, mert például, ha az egyik dobozba csak egy fehéret rakunk a többit pedig a másik dobozba, akkor a fehér húzásának a valószínűsége $1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{19}$, ami nagyobb $\frac{1}{4}$-nél. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a maximális valószínűség.

Rakjunk az egyik dobozba n fehéret és m feketét, a többit pedig a másik dobozba. Az előzőek miatt feltehetjük, hogy mindkét dobozban van golyó. Így a fehér húzásának a valószínűsége

$$\frac{n}{n+m} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10-n}{20-n-m} \cdot \frac{1}{2}.$$

Azt kell belátni, hogy

$$\frac{n}{n+m} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10-n}{20-n-m} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{14}{19},$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$m(14m - 185 + 9n) \leq 5n(n-1). \qquad (*)$$

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $n \le 5$, így $(*)$ bal oldala maximum $140 - 185 + 45 = 0$, jobb oldala pedig nemnegatív. Ezzel $(*)$ bizonyított. Tehát a rabnak akkor a legnagyobb az esélye, ha az egyik dobozba egy fehéret rak, a többit pedig a másikba.

5.9. feladat. 10 cetlire felírjuk 1-től 10-ig az egész számokat, majd betesszük őket egy dobozba. A dobozból kisorsolunk 5 cetlit, melyek közül a legnagyobb számot jelölje M. Ezután a dobozban maradt 5 cetliből egymásután sorsolunk ki cetliket. Ezt az első olyan cetli húzásáig folytatjuk, amíg M-nél nagyobb értékűt nem húzunk. Mi a valószínűsége, hogy így utolsónak a 10-es cetlit húztuk ki?

Megoldás. Miután kiválasztottuk a játékszabálynak megfelelő cetlit, folytassuk a cetlik húzását mindaddig, amíg el nem fogynak. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy i-ediknek húztuk ki a 10-es cetlit, A pedig azt, hogy a 10-es cetli lett kiválasztva. Az A pontosan akkor következik be, ha $i \ge 6$ és az első $i-1$ kihúzott cetli között a legnagyobb az első ötben volt. Így

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=6}^{10} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=6}^{10} \frac{5}{i-1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{9} \frac{1}{i} \approx 0{,}373.$$

5.10. feladat. Néhány doboz mindegyikében 600-600 darab golyó van. Az elsőben 2 golyó piros, és a többi dobozban mindig 5-tel több a piros golyók száma, mint az előzőben volt. Az utolsó dobozban csak 3 golyó nem piros. Valamelyik dobozból egy golyót kiveszünk. Mi a valószínűsége, hogy pirosat választunk?

Megoldás. Jelölje n a dobozok számát. Ekkor az utolsó dobozban a pirosak száma $2 + (n-1)5 = 597$, melyből $n = 120$. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy egy olyan dobozt választottunk, melyben a pirosak száma $2 + (i-1)5$, A pedig azt, hogy a kiválasztott dobozból pirosat húzunk. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \sum_{i=1}^{120} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{120} \frac{2+(i-1)5}{600} \cdot \frac{1}{120} = \\ &= \frac{1}{600 \cdot 120} \sum_{i=1}^{120} \big(2 + (i-1)5\big) = \frac{1}{600 \cdot 120} \cdot \frac{2+597}{2} \cdot 120 = \frac{599}{1200}.\end{aligned}$$

5.11. feladat. Az I. érme feldobásakor 0,4 valószínűséggel kapunk fejet, míg a II. érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0,7. A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és tízszer feldobunk.

(1) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás fej lesz?

(2) Függetlenek-e ezen dobások kimenetelei egymástól?

Megoldás. (1) Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével tízből hétszer dobunk fejet, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = \binom{10}{7} 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{10}{7} 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 \cdot \frac{1}{2}.$$

(2) Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével elsőre fejet dobunk, A_2, hogy a kiválasztott érmével másodikra fejet dobunk, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1{,}1}{2}.$$

Hasonlóan $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1{,}1}{2}$. Másrészt

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) = 0{,}4^2 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}7^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Így $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)$ miatt a dobások eredményei nem függetlenek egymástól.

5.12. feladat. Két egyforma gyufásdoboz egyikében 7 piros fejű és 4 fekete fejű gyufaszál van, míg a másikban 5 piros fejű és 6 fekete fejű. Véletlenszerűen választunk egy dobozt, majd abból egy gyufaszálat, amit átrakunk a másik dobozba. Ezután ismét választunk egy dobozt és abból egy gyufaszálat véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy ekkor piros fejűt húzunk ki?

Megoldás. Az I. jelű dobozban legyen 7 piros fejű és 4 fekete fejű gyufaszál, a másikat II. módon jelöljük, továbbá:
A_1: elsőre az I. dobozt választjuk;
A_2: elsőre a II. dobozt választjuk;
B_1: első húzás piros fejű;
B_2: első húzás fekete fejű;
C_1: másodikra az I. dobozt választjuk;
C_2: másodikra a II. dobozt választjuk;
D: második húzás piros fejű;
Tetszőleges $i, j, k \in \{1, 2\}$ esetén az $A_i \cap B_j$ és C_k függetlensége, továbbá a szorzat tétel alapján

$$\mathrm{P}(A_i \cap B_j \cap C_k) = \mathrm{P}(A_i \cap B_j)\,\mathrm{P}(C_k) = \mathrm{P}(B_j \mid A_i)\,\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(B_j \mid A_i).$$

Az $A_i \cap B_j \cap C_k$ $(i, j, k \in \{1, 2\})$ teljes eseményrendszer, így a teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \sum_{i,j,k=1}^{2} \mathrm{P}(D \mid A_i \cap B_j \cap C_k)\,\mathrm{P}(A_i \cap B_j \cap C_k) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^{2} \mathrm{P}(D \mid A_i \cap B_j \cap C_k)\,\mathrm{P}(B_j \mid A_i).\end{aligned}$$

Ebből már könnyen számolható az eredmény, hiszen például

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_1) = \frac{7}{11} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(D \mid A_1 \cap B_1 \cap C_1) = \frac{6}{10}.$$

6. fejezet

Bayes tétele

Tétel Bayes tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, és $\mathrm{P}(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{P}(A) \neq 0$, akkor bármely $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}.$$

Ha az A esemény bekövetkezik, amit a $B_1, \ldots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az A bekövetkezésére, azaz a $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ értékeket tudva, Bayes tételével következtethetünk arra, hogy egy kiválasztott ok milyen valószínűséggel szerepelt az A létrejöttében. Ilyen értelemben Bayes tétele megfordítása a teljes valószínűség tételének.

Feladatok

6.1. feladat. Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25 %-át adja és 5 %-os selejt aránnyal dolgozik. A második 35 %-ot termel 4 %-os selejt aránnyal, végül a harmadik 2 %-os selejt aránnyal dolgozik. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

Megoldás. Jelölje B_i, hogy a kiválasztott terméket az i-edik gép gyártotta és A azt, hogy a kiválasztott termék selejtes. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_1 \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3)} = \\ &= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}25}{0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}04 \cdot 0{,}35 + 0{,}02 \cdot 0{,}4}.\end{aligned}$$

6.2. feladat. Morze adásnál a leadott pontok és vonalak aránya 5 : 3. A pontok $\frac{2}{5}$-ét vonalnak, a vonalak $\frac{1}{3}$-át pedig pontnak halljuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ha pontot vettünk, akkor valójában pontot adtak?

Megoldás. Jelölje B_1 azt, hogy pontot adtak le, B_2 azt, hogy vonalat adtak le, és A azt, hogy pontot vettünk. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}.$$

6.3. feladat. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 0,75 valószínűséggel első osztályú. A kikerült terméket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek 0,02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek 0,05.

(1) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

(2) Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton nem első osztályú minősítést kapott, valóban nem első osztályú?

Megoldás. Jelölje B_1 azt, hogy a kiválasztott termék valójában első osztályú, B_2 azt, hogy valójában nem első osztályú, és A azt, hogy a kiválasztott termék első osztályú minősítést kapott. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}75}{0{,}98 \cdot 0{,}75 + 0{,}05 \cdot 0{,}25}$$

és

$$\mathrm{P}(B_2 \mid \overline{A}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)}{\mathrm{P}(\overline{A} \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(\overline{A} \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}25}{0{,}02 \cdot 0{,}75 + 0{,}95 \cdot 0{,}25}.$$

6.4. feladat. Igazfalvában a lakosok 80 %-a mindig igazat mond, a többiek pedig mindig hazudnak. A mellette található Hazugfalvában a lakosok 90 %-a mindig hazudik, a többiek pedig mindig igazat mondanak. Egy vándor eltéved valamelyik faluba a kettő közül, de nem tudja melyikben van. Ezért az első lakost, akivel találkozik, megkérdezi, hogy ez melyik falu. Azt a választ kapja, hogy Igazfalvában vannak. Mi a valószínűsége, hogy a vándor valójában Hazugfalvába tévedt?

Megoldás. Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy a vándor Igazfalvában van, B_2, hogy Hazugfalvában van és A azt, hogy a lakos azt mondja, hogy Igazfalvában vannak. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{17}.$$

6.5. feladat. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Ha harmadiknak pirosat húzunk, akkor mi a valószínűsége, hogy az első két húzás mindegyike fehér volt?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a harmadik húzás piros, B_1, hogy az első két húzás 2 darab fehér, B_2, hogy az első két húzás 2 darab piros, végül B_3, hogy az első két húzás egyike fehér a másik pedig piros. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A \mid B_3)\,\mathrm{P}(B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{0}{5} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}} = \frac{2}{3}.$$

6.6. feladat. Van két érmém, az egyik igazságos, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom megkülönböztetni őket egymástól. A cinkelt érme 0,75 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 0,5 valószínűséggel az igazságosat, 0,5 valószínűséggel a cinkeltet. Ezt feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

Megoldás. Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott érmével 30 dobásból 25-ször fejet dobtunk, B_1 jelölje, hogy a cinkelt érmét választottuk, és B_2, hogy az igazságosat választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} =$$

$$= \frac{\binom{30}{25} \cdot 0{,}75^{25} \cdot 0{,}25^{5} \cdot 0{,}5}{\binom{30}{25} \cdot 0{,}75^{25} \cdot 0{,}25^{5} \cdot 0{,}5 + \binom{30}{25} \cdot 0{,}5^{25} \cdot 0{,}5^{5} \cdot 0{,}5} \approx 0{,}9987.$$

6.7. feladat. Az I. érme feldobásakor 0,4 valószínűséggel kapunk fejet, míg a II. érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0,7. A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és feldobunk. Feltéve, hogy fejet dobunk, mi a valószínűsége, hogy az I. érmével tettük ezt?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott érmével fejet dobunk, B_1, hogy az I. érmét választottuk, B_2 pedig, hogy a II. érmét választottuk. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}4 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}7 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{11}.$$

6.8. feladat. Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek közül rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra választott dobozból húzunk három golyót visszatevéssel, és azt tapasztaljuk, hogy mindhárom fehér. Mi a valószínűsége, hogy azt a dobozt választottuk, amelyben pontosan két fehér golyó van?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy mindhárom húzás fehér, B_i pedig azt, hogy egy olyan dobozt választottunk, amelyben pontosan i darab fehér golyó van. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{6} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\sum\limits_{i=1}^{6} \left(\frac{i}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{8}{441}.$$

6.9. feladat. Egy tanár a vizsgán tesztet töltet ki a hallgatókkal. A tesztlapon minden kérdéshez három válasz van feltüntetve, melyek közül csak egy helyes. Tegyük fel, hogy a vizsgázó 0,8 valószínűséggel tudja a helyes választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor bármely választ egyforma eséllyel bejelölheti. Ha egy kérdésre helyesen válaszol a hallgató, akkor mi a valószínűsége, hogy ennek az az oka, hogy valóban tudta a választ?

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy a hallgató helyesen válaszol az adott kérdésre, B_1, hogy a hallgató tudja a helyes választ, B_2 pedig azt, hogy nem. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}2} = \frac{12}{13}.$$

6.10. feladat. Egy városban a lakosság 0,5 %-át megfertőzött egy ritka vírus. Egy teszt a vizsgálati személyek 99 %-ról helyesen el tudja dönteni, hogy fertőzött vagy egészséges, de 1 %-ban téved. Mekkora a valószínűsége, hogy egy megvizsgált személy egészséges, ha a teszt szerint fertőzött? Ha a teszt szerint fertőzött valaki, akkor letesztelik még egyszer. Ha a második teszt szerint is fertőzött az illető, akkor mi a valószínűsége, hogy valójában egészséges?

Megoldás. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a vizsgált személy az első teszt szerint fertőzött, A_2, hogy mindkét teszt szerint fertőzött, B_1, hogy a vizsgált személy egészséges, B_2 pedig azt, hogy fertőzött. Ekkor

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_1) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_1 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_1 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}995}{0{,}01 \cdot 0{,}995 + 0{,}99 \cdot 0{,}005}$$

ami kb. 0,6678, ami azt jelenti, hogy ha az első teszt valakit fertőzöttnek talál, akkor nagyobb az esélye annak, hogy valójában egészséges. Másrészt

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(A_2 \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_2 \mid B_2)\,\mathrm{P}(B_2)} = \frac{0{,}01^2 \cdot 0{,}995}{0{,}01^2 \cdot 0{,}995 + 0{,}99^2 \cdot 0{,}005}$$

ami kb. 0,0199. Tehát azon személyeknek, akiknél mindkét teszt pozitív volt, már csak kb. 2 %-a egészséges. Három teszt esetén ugyanez az arány csak 0,2 ‰.

6.11. feladat. Három rab közül az egyik kegyelemben részesül, amit sorshúzással döntenek el. Az őr tudja ki a szerencsés, de nem árulhatja el. Az egyik rab meggyőzi az őrt arról, hogy legalább annyit áruljon el, ki nem kapott kegyelmet a másik két rab közül. Az őr azért egyezett bele, mert úgy gondolta, hogy a másik két rab egyike biztosan nem kap kegyelmet, így tulajdonképpen nem ad ki lényeges információt. A rab szerint viszont, mivel már csak ketten vannak az esélyesek között, ezért $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, hogy ő kap kegyelmet. Az őr vagy a rab gondolkodik helyesen?

Megoldás. A megoldás lényeges eleme, hogy amennyiben a kérdező rabot mentik fel, akkor a másik két rab közül az őr bárkit megnevezhet. Tegyük fel, hogy ebben az esetben az őr sorshúzással dönti el, kit nevezzen meg.

Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az őr a másik két rab közül az elsőt nevezi meg, B_2, hogy a második rabot nevezi meg, A_1, hogy a másik két rab közül az első kap kegyelmet, A_2, hogy a másik két rab közül a második kap kegyelmet, végül A_3, hogy a kérdező rab kap kegyelmet. Ekkor az őr szerint

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1}{3},$$

míg a rab szerint

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1}{2}.$$

Az igazság a Bayes-tétel értelmében

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) &= \frac{\mathrm{P}(B_1 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B_1 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B_1 \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(B_1 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_3 \mid B_2) &= \frac{\mathrm{P}(B_2 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B_2 \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(B_2 \mid A_3)\,\mathrm{P}(A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Amint látható, feltettük, hogy $\mathrm{P}(B_1 \mid A_3) = \frac{1}{2}$ és $\mathrm{P}(B_2 \mid A_3) = \frac{1}{2}$, azaz, ha a másik két rab közül bárkit megnevezhet az őr, akkor azt egyenlő eséllyel teszi. Ilyen feltétellel tehát az őrnek van igaza.

Általánosítva, $\mathrm{P}(B_1 \mid A_3) = x$ és $\mathrm{P}(B_2 \mid A_3) = 1 - x$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B_1) = \frac{x}{1+x} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(A_3 \mid B_2) = \frac{1-x}{2-x}.$$

6.12. feladat. Szimuláljuk az előző feladatot Excel segítségével! Számoljuk ki annak a relatív gyakoriságát, hogy a kérdező rab kap kegyelmet azzal a feltétellel, hogy az őr a másik két rab közül az elsőt nevezi meg!

Megoldás. Az `A1` cellába írja a következőt:

```
=INT(3*VÉL()+1)
```

A kapott érték jelenti annak a rabnak a sorszámát, aki kegyelmet kap. Tegyük fel, hogy a 3. rab kérdezte az őrt. A `B1` cellába írja a következőt:

```
=HA(A1=1;2;HA(A1=2;1;HA(INT(2*VÉL()+1)=1;1;2)))
```

A kapott érték jelenti annak a rabnak a sorszámát, akit az őr megnevez. A `C1` cellába írja a következőt:

```
=HA(B1=1;1;0)
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy az első rabot nevezte-e meg az őr vagy sem. A `D1` cellába írja a következőt:

```
=HA(A1=3;1;0)
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy a 3. rab kap-e kegyelmet vagy sem. Az `E1` cellába írja a következőt:

```
=C1*D1
```

A kapott érték aszerint 1 vagy 0, hogy a B_1 feltétel mellett teljesül-e az A_3 esemény vagy sem. Jelölje ki az `A1:E1` cellatartományt, majd a kitöltő jelet húzza le addig a sorig, ahány szimulációt akar csinálni. Végül az `F1` cellába írja a következőt:

```
=SZUM(E:E)/SZUM(C:C)
```

A kapott érték az A_3 esemény B_1 feltétel melletti relatív gyakorisága.

7. fejezet

Valószínűségi változó

Egy játékban 10 forintot nyerünk, ha egy pénzérme a fej oldalára esik, ellenkező esetben pedig 5 forintot veszítünk. Ebben a kísérletben a biztos esemény $\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}$. Az előbbi játékszabály leírható egy olyan függvénnyel, amely a fejhez 10-et rendel, míg az íráshoz -5-öt. A továbbiakban azokat a függvényeket, melyek az Ω elemeihez valós számokat rendelnek – bizonyos feltétellel –, valószínűségi változónak fogunk nevezni. A definíció előtt vezessük be a következő jelöléseket:

Definíció

Legyen Ω nem üres halmaz, $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ és

$$\{\xi = x\} := \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\omega) = x\}.$$

Hasonlóan definiálhatjuk a $\{\xi < x\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi = \eta\}$, $\{\xi < \eta\}$ stb. halmazokat is, ahol $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha $\{\xi = x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ esemény az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben, akkor annak valószínűségét $\mathrm{P}(\{\xi = x\})$ helyett $\mathrm{P}(\xi = x)$-szel jelöljük.[1] Hasonlóan járunk el a többi előbb említett halmaz valószínűségeinek jelöléseinél is. A ξ függvény értékkészletét R_ξ-vel fogjuk jelölni.

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ha $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor ξ-t *valószínűségi változónak* nevezzük.

Definíció

Egy valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha az értékkészletének számossága megszámlálható.

[1] A ξ és η görög betűk kiejtése: *kszí* illetve *éta*.

Definíció

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor azt a függvényt, amely minden $k \in R_\xi$-hez hozzárendeli a $\mathrm{P}(\xi = k)$ valószínűséget, a ξ *eloszlásának* nevezzük.

Tétel

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor

$$\sum_{k \in R_\xi} \mathrm{P}(\xi = k) = 1.$$

Tétel

Ha $H \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmaz és $p\colon H \to [0,1]$ olyan függvény, melyre

$$\sum_{k \in H} p(k) = 1$$

teljesül, akkor létezik olyan ξ diszkrét valószínűségi változó, hogy $R_\xi = H$ és minden $k \in R_\xi$ esetén $\mathrm{P}(\xi = k) = p(k)$ teljesül.

Az eloszlás csak diszkrét esetben jellemzi megfelelően a valószínűségi változót. Általános esetben az úgynevezett eloszlásfüggvény ad elegendő információt.

Definíció

A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \mathrm{P}(\xi < x)$$

függvényt nevezzük.

A valószínűségi változó definíciója miatt minden valószínűségi változónak létezik eloszlásfüggvénye. Diszkrét esetben mégis az eloszlást használjuk, mert annak felírása egyszerűbb. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az értékkészlete megszámlálható.

Tétel

Legyen ξ valószínűségi változó. Ekkor teljesülnek a következők:

(F1) F_ξ monoton növekvő,

(F2) $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$,

(F3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$,

(F4) F_ξ minden pontban balról folytonos.

Tétel

Ha az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az (F1)–(F4) tulajdonságok, akkor van olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F.

Tétel

Ha ξ egy valószínűségi változó és $a < b$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Tétel

A ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénye akkor és csak akkor folytonos $a \in \mathbb{R}$-ben, ha $\mathrm{P}(\xi = a) = 0$. Emiatt, ha az F_ξ mindenütt folytonos, akkor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\begin{aligned} F_\xi(b) - F_\xi(a) = \mathrm{P}(a \le \xi < b) = \mathrm{P}(a < \xi < b) = \\ = \mathrm{P}(a < \xi \le b) = \mathrm{P}(a \le \xi \le b). \end{aligned}$$

A tömegsűrűség fogalmával már a középiskolában is találkoztunk. Ez egy homogén anyag esetében az egységnyi térfogatra jutó tömeget jelenti, ami egyetlen számadat. Inhomogén testnél már nem ilyen egyszerű a helyzet. Ebben az esetben pontról-pontra változhat ez az érték. Így ekkor sűrűségfüggvényről beszélünk. A valószínűségszámításban a sűrűség egy valószínűségi változóra fog vonatkozni, pontosabban arra, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel egy egységnyi intervallumbeli értéket. Nem konstans valószínűségi változó esetén, hasonlóan a tömegsűrűséghez, itt is egy függvényt kapunk. Ennek meghatározása érdekében vizsgáljuk meg, hogy ξ mekkora valószínűséggel lehet egy $[x, x + \varepsilon)$ intervallumban, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}(x \le \xi < x + \varepsilon) = F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x).$$

Ez az érték az adott ε hosszúságú intervallumra jutó valószínűség. Ebből erre az intervallumra vonatkozó átlagsűrűséget úgy kapjuk meg, ha elosztjuk az intervallum hosszával. Ha ε értékét ezután egyre kisebbre választjuk meg, akkor egyre jobban megközelítjük az x pontra vonatkozó sűrűséget. Tehát a sűrűségfüggvény az x pontban

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} = F'_\xi(x),$$

azaz az eloszlásfüggvény deriváltfüggvénye.

Definíció

A ξ valószínűségi változót *folytonosnak* nevezzük, ha az eloszlásfüggvénye folytonos és véges sok ponttól eltekintve differenciálható. Ekkor a ξ *sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) := F'_\xi(x)$$

azon x pontokban, ahol F_ξ differenciálható. A nem differenciálható pontokban a sűrűségfüggvény tetszőleges nemnegatív értéket felvehet.

Tétel

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}(a \le \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x)\,\mathrm{d}x,$$

továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha F_ξ nem folytonos, akkor ξ nem abszolút folytonos. Így ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor nem létezik sűrűségfüggvénye, azaz nem abszolút folytonos. Ha ξ abszolút folytonos, akkor az F_ξ folytonossága miatt az F_ξ értékkészlete nem megszámlálható, tehát nem diszkrét.

Abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Így mindegy, hogy írunk-e vagy sem egyenlőséget az előző tételben $\mathrm{P}(a \le \xi < b)$-ben.

Tétel

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Tétel

Ha $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

akkor létezik olyan ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f.

Feladatok

7.1. feladat. Határozzuk meg az ötöslottón a találatok számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, ahol ξ a találatok számát jelöli.

7.2. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg az eloszlását!

Megoldás. Jelölje xy azt, hogy az első kockán x, a második kockán pedig y az eredmény, továbbá $\xi := x + y$. Ekkor az Ω elemei

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Vegyük észre, hogy a ξ különböző értékeire a hozzá tartozó elemek átlósan helyezkednek el az előbbi elrendezésben. Például $\xi = 4$ a 31, 22 és 13 esetekben teljesül. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi = 2) = \mathrm{P}(\xi = 12) &= \frac{1}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 3) = \mathrm{P}(\xi = 11) &= \frac{2}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 4) = \mathrm{P}(\xi = 10) &= \frac{3}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 5) = \mathrm{P}(\xi = 9) &= \frac{4}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 6) = \mathrm{P}(\xi = 8) &= \frac{5}{36},\\
\mathrm{P}(\xi = 7) &= \frac{6}{36}.
\end{aligned}$$

7.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok különbségének abszolút értéke legyen ξ. Határozzuk meg az eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{10}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{8}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{6}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 4) =$ $= \frac{4}{36}$, $\mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{2}{36}$.

7.4. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$ $(k = 1, 2, \dots)$, ahol ξ a dobások száma. A kapott eloszlást geometriai eloszlásnak nevezik.

7.5. feladat. Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármat kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen ξ a kihúzott fehérek száma. Adjuk meg az eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{9 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot 6}{\binom{15}{3}} = \frac{216}{455}$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}$.

7.6. feladat. 10 szelvénnyel játszva az ötöslottón, határozzuk meg a két találatos szelvények számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$, ahol ξ a dobások száma és $p = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$ a kettes találat valószínűsége.

7.7. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg a dobások között három darab hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását!

Megoldás. $\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$ $(k = 3, 4, \ldots)$, ahol ξ a dobások száma.

7.8. feladat. Három kockával dobunk egyszerre. Számítsa ki a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét az $x = 5{,}2$ helyen!

Megoldás. $F_\xi(5{,}2) = \mathrm{P}(\xi < 5{,}2) = \mathrm{P}(\xi = 5) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$, ahol ξ a dobott számok összege.

7.9. feladat. Létezik-e olyan valószínűségi változó, amelynek az alábbi F az eloszlásfüggvénye?

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Megoldás. Az F értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, másrészt $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ miatt az F monoton növekvő és ∞-ben 1 a határértéke. Mivel $F(x) = 0$, ha $x < 1$, ezért F-nek $-\infty$-ben 0 a határértéke. Könnyen látható, hogy F minden pontban folytonos. Tehát ez eloszlásfüggvény.

7.10. feladat. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek az eloszlásfüggvénye az előző feladatban definiált F. Mutassuk meg, hogy ξ abszolút folytonos és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Mivel F minden pontban folytonos és csak az $x = 1$ pontban nem differenciálható, ezért ξ abszolút folytonos, továbbá

$$f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0' = 0, \text{ha } x < 1, \\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

7.11. feladat. Vizsgálja meg a következő függvényeket. Melyik lehet eloszlásfüggvény?

$$F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Megoldás. Egyik sem eloszlásfüggvény.

7.12. feladat. Legyen

$$F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x):=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0,\\ 1-\cos x, & \text{ha } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{ha } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ez egy abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Az F monoton növekvő, $-\infty$-ben 0, ∞-ben 1 a határértéke, folytonos és $x=0$ pontot kivéve mindenütt differenciálható. Így ez egy abszolút folytonos ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, továbbá F deriválásával kapjuk a sűrűségfüggvényét:

$$f_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_\xi(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{ha } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

7.13. feladat. Ketten megbeszélik, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Mi a várakozási idő eloszlásfüggvénye? Bizonyítsuk be, hogy a várakozási idő abszolút folytonos valószínűségi változó és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

Megoldás. A 3.3. feladat szerint, ha ξ a várakozási idő, akkor

$$F_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0,\\ 2x-x^2, & \text{ha } 0\le x\le 1,\\ 1, & \text{ha } x>1.\end{cases}$$

Mivel ez folytonos és csak az $x=1$ pontban nem differenciálható, ezért ξ abszolút folytonos, továbbá F_ξ deriválásával kapjuk, hogy

$$f_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_\xi(x)=\begin{cases}2-2x, & \text{ha } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

7.14. feladat. Legyen $\Omega:=[a,b]$, ahol $a,b\in\mathbb{R}$ és $a<b$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $\xi(\omega):=\omega$. Határozzuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. $F_\xi(x)=\mathrm{P}(\xi<x)=\frac{x-a}{b-a}$, ha $x\in[a,b]$, $F_\xi(x)=0$, ha $x<a$ és $F_\xi(x)=1$, ha $x>b$. A kapott eloszlást az $[a,b]$ intervallumon *egyenletes eloszlásnak* nevezzük. Az eloszlásfüggvény folytonos és két pont kivételével mindenhol differenciálható, így ξ abszolút folytonos, továbbá a differenciálható pontokban a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja. Így $f_\xi(x)=\frac{1}{b-a}$, ha $x\in[a,b]$ és $f_\xi(x)=0$, ha $x\notin[a,b]$.

7.15. feladat. Legyen Ω egy egységnyi sugarú körlap és $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Jelölje ξ a kiválasztott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2$, ha $x \in [0,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Könnyen látható, hogy ξ abszolút folytonos, továbbá $f_\xi(x) = 2x$, ha $x \in [0,1]$ és $f_\xi(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.16. feladat. Az előző feladatban határozzuk meg ξ^2 eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. $F_{\xi^2}(x) = \mathrm{P}(\xi^2 < x) = \mathrm{P}(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) = = F_\xi(\sqrt{x}) = x$, ha $x \in [0,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Azaz ξ^2 a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Így a sűrűségfüggvény $f_{\xi^2}(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$ és $f_{\xi^2}(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.17. feladat. Legyen $\Omega := [-1,1]$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\xi(\omega) := \omega$. Határozzuk meg $|\xi|$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Korábban láttuk, hogy ξ a $[-1,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, azaz $F_\xi(x) = \frac{x+1}{2}$, ha $x \in [-1,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < -1$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Ezért $F_{|\xi|}(x) = \mathrm{P}(|\xi| < x) = \mathrm{P}(-x < \xi < x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x) = \frac{x+1}{2} - \frac{-x+1}{2} = x$, ha $x \in [0,1]$, $F_{|\xi|}(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_{|\xi|}(x) = 1$, ha $x > 1$, azaz $|\xi|$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Ebből $f_{|\xi|}(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$ és $f_{|\xi|}(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$.

7.18. feladat. Legyen ξ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású és $\lambda > 0$ rögzített konstans. Határozzuk meg $\eta = -\frac{\ln \xi}{\lambda}$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. $F_\eta(x) = \mathrm{P}\Big(-\frac{\ln\xi}{\lambda} < x\Big) = \mathrm{P}\Big(\xi > e^{-\lambda x}\Big) = 1 - F_\xi\Big(e^{-\lambda x}\Big) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, hiszen $0 < e^{-\lambda x} \leq 1$ minden $x \geq 0$ esetén. Másrészt $F_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. Így $f_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$ és $f_\eta(x) = 0$, ha $x < 0$. A kapott eloszlást λ paraméterű exponenciális eloszlásnak nevezzük.

7.19. feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e ez sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg az eloszlásfüggvényt!

Megoldás. f nemnegatív, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(x + \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tehát f sűrűségfüggvény. Így

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(t + \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^x = \frac{x^2 + x}{2},$$

ha $0 \leq x < 1$, illetve

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0,$$

ha $x < 0$ és

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_{0}^{1} \Big(t + \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^1 + 0 = 1,$$

ha $x \geq 1$.

7.20. feladat. Van-e olyan valószínűségi változó, melynek

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

a sűrűségfüggvénye? Ha igen, akkor számoljuk ki annak valószínűségét, hogy ez a valószínűségi változó a $[\pi/3, \pi/2]$ intervallumba esik, továbbá határozzuk meg az eloszlásfüggvényét!

Megoldás. Az $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = 1$, vagyis ez sűrűségfüggvénye valamely ξ valószínűségi változónak. Ekkor

$$\mathrm{P}\Big(\frac{\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}\Big) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{4}.$$

Másrészt $F_\xi(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}\sin t\,dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_0^x = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$, ha $0 < x < \pi$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x \geq \pi$.

7.21. feladat. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez sűrűségfüggvény-e, és ha igen, mi a hozzátartozó eloszlásfüggvény? Ha ξ sűrűségfüggvénye f, akkor határozza meg a $\mathrm{P}(0{,}5 \leq \xi < 1{,}5)$ értékét!

Megoldás. f nemnegatív és az integrálja egy olyan háromszög területe, melynek alapja 2 egység, magassága pedig 1 egység hosszú. Így f sűrűségfüggvény, másrészt

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2, & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

$\mathrm{P}(0{,}5 \leq \xi < 1{,}5) = F_\xi(1{,}5) - F_\xi(0{,}5) = \frac{6}{8} = 0{,}75.$

8. fejezet

Várható érték és szórásnégyzet

Egy kockajátékban 2 forintot veszítünk, ha 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, 3 forintot veszítünk, ha 4-est vagy 5-öst dobunk, továbbá 6 forintot nyerünk, ha 6-ost dobunk. Kérdés, hogy hosszú távon nyerünk vagy vesztünk? Például, ha ötször játszunk és a dobássorozat eredménye 2, 6, 1, 2, 4, akkor egy játékban átlagban $(-2+6-2-2-3):5=-0{,}6$ forintot „nyertünk”, azaz 0,6 forintot veszítettünk. Ezt általánosítva, ha n dobásból k_1-szer veszítünk 2 forintot, k_2-ször veszítünk 3 forintot és k_3-szor nyerünk 6 forintot, akkor egy játékban az átlagos nyereményünk

$$\frac{-2\cdot k_1+(-3)\cdot k_2+6\cdot k_3}{n}=-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}.$$

A későbbiekben tárgyalt Bernoulli-féle nagy számok törvénye pontosan azt fejezi ki, mint a jegyzet bevezetésében leírt gyakorlati tapasztalat, vagyis nagy számú kísérlet esetén a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik. Így

$$\begin{aligned}-2\cdot\frac{k_1}{n}+(-3)\cdot\frac{k_2}{n}+6\cdot\frac{k_3}{n}&\approx -2\,\mathrm{P}(\xi=-2)+(-3)\,\mathrm{P}(\xi=-3)+6\,\mathrm{P}(\xi=6)=\\&=-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6}=-1,\end{aligned}$$

ahol ξ az egy játékbeli nyereményt jelenti. Ezt a számot a ξ várható értékének nevezzük. Nagy számú független megfigyelés esetén az átlag a várható érték körül ingadozik, ezért jogos az elnevezés. Mivel ez most negatív, ezért ezt a játékot hosszútávon nem éri meg játszani.

Általánosabban, ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei, $x_1,\dots,x_n$ és ξ_i az i-edik kísérletben mért értéke ξ-nek, akkor a kísérletek számának (n) növelésével a ξ átlagos értéke egy kísérletben, vagyis a

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n}$$

számtani közép értéke egyre kisebb mértékben ingadozik

$$\sum_{k=1}^{m} x_k\,\mathrm{P}(\xi=x_k)$$

körül.

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Ekkor az

$$\mathrm{E}\,\xi := \sum_{k=1}^{m} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k)$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük.

Tetszőleges ξ esetén úgy kaphatunk analóg formulát, ha ξ-t kis intervallumokon az intervallum alsó végpontjával helyettesítjük. Például $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ osztópontokkal megadott beosztás esetén a várható értéket közelítsük az

$$x_1 \,\mathrm{P}(x_1 \leq \xi < x_2) + \cdots + x_{m-1} \,\mathrm{P}(x_{m-1} \leq \xi < x_m) + x_m \,\mathrm{P}(x_m \leq \xi)$$

összeggel. A közelítés annál pontosabb, minél finomabb a beosztás. A beosztás finomításával kapott határérték

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k)$, ha $R_\xi = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \,\mathrm{P}(\xi = x_k) \in \mathbb{R}$,

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$, ha ξ abszolút folytonos és $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.

Így bevezethetjük a következő definíciókat:

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \,\mathrm{P}(\xi = x_k) \in \mathbb{R}$$

esetén az

$$\mathrm{E}\,\xi := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \,\mathrm{P}(\xi = x_k)$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük.

Definíció

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

esetén az

$$\mathrm{E}\,\xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

értéket ξ *várható értékének* nevezzük.

Tétel

Legyenek ξ és η tetszőleges valószínűségi változók és $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathrm{E}(a\xi + b\eta + c) = a\,\mathrm{E}\,\xi + b\,\mathrm{E}\,\eta + c.$$

Ezután egy valószínűségi változónak a várható értéke körüli ingadozását jellemezzük.

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó. Ekkor a

$$\mathrm{D}^2\,\xi := \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2$$

értéket ξ *szórásnégyzetének*, illetve

$$\mathrm{D}\,\xi := \sqrt{\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2}$$

értéket ξ *szórásának* nevezzük.

Tétel

Ha ξ valószínűségi változó, akkor

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 - \mathrm{E}^2\,\xi.$$

Tétel

Ha ξ valószínűségi változó, akkor ξ^2 várható értéke

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2\,\mathrm{P}(\xi = x_k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\,\mathrm{P}(\xi = x_k), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

aszerint, hogy $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $R_\xi = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ vagy ξ abszolút folytonos, feltéve, hogy ezek az értékek végesek.

Tétel

Ha ξ valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathrm{D}^2(a\xi + b) = a^2\,\mathrm{D}^2\,\xi \quad \text{illetve} \quad \mathrm{D}(a\xi + b) = |a|\,\mathrm{D}\,\xi.$$

Feladatok

8.1. feladat. Ruletten 1000 eurót felteszünk a pirosra. Mennyi a nyereményünk várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Jelölje ξ a nyereményünk értékét euróban. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= 1000 \cdot \frac{18}{37} + (-1000) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1000}{37} \\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= 1000^2 \cdot \frac{18}{37} + (-1000)^2 \cdot \frac{19}{37} = 1000^2 \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= 1000^2 - \frac{1000^2}{37^2} = \frac{1368}{1369} \cdot 10^6.
\end{aligned}$$

8.2. feladat. Egy kockával dobva a dobott számnak határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje ξ a dobott számot. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

8.3. feladat. Két kockával dobva a dobott számok összegének határozzuk meg a várható értékét és a szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje ξ az összeget. A 7.2. feladat megoldása alapján

$$\mathrm{E}\,\xi = (2+12)\frac{1}{36} + (3+11)\frac{2}{36} + (4+10)\frac{3}{36} + (5+9)\frac{4}{36} + (6+8)\frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} = 7$$

és

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi^2 = (2^2+12^2)\frac{1}{36} + (3^2+11^2)\frac{2}{36} + (4^2+10^2)\frac{3}{36} + \\
+ (5^2+9^2)\frac{4}{36} + (6^2+8^2)\frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1974}{36},
\end{aligned}$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1974}{36} - 7^2 = \frac{35}{6}.$$

A 8.2. feladat alapján is megoldható, felhasználva a várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságait. Jelölje ξ_1 az első, ξ_2 pedig a második kocka eredményét. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \mathrm{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{E}\,\xi_1 + \mathrm{E}\,\xi_2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \mathrm{D}^2(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}^2\,\xi_1 + \mathrm{D}^2\,\xi_2 = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

8.4. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. A megoldásban felhasználjuk, hogy $-1 < x < 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (kx^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = \left(x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Jelölje ξ a dobások számát. Így a 7.4. feladat alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6 \\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} = 66 \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= 66 - 6^2 = 30.
\end{aligned}$$

8.5. feladat. Egy kockát addig dobunk, míg kétszer egymás után ugyanazt nem dobjuk. Határozzuk meg a dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje ξ a dobások számát. Mivel az első dobást leszámítva minden dobásnál $\frac{1}{6}$ az esélye, hogy ugyanazt dobjuk, mint előtte, ezért $\xi - 1$ eloszlása megegyezik az előző feladatban található valószínűségi változó eloszlásával. Így $\mathrm{E}(\xi - 1) = \mathrm{E}\,\xi - 1 = 6$, azaz $\mathrm{E}\,\xi = 7$ és $\mathrm{D}^2(\xi - 1) = \mathrm{D}^2\,\xi = 30$.

8.6. feladat. Feldobunk egy pénzérmét. Ha írás jön ki, akkor 10 eurót nyerünk, ellenkező esetben 10 eurót veszítünk és újat dobunk, de már 20 euró téttel. A dobásokat addig folytatjuk, amíg írást nem kapunk, de addig minden játékban megkétszerezzük a tétet. Mennyi a nyereményünk várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Ha elsőre írást dobunk, akkor a nyereményünk 10 euró. Ha csak az n-edik dobás írás ($n \geq 2$), akkor a nyereményünk

$$-10 - 20 - \cdots - 2^{n-2} \cdot 10 + 2^{n-1} \cdot 10 = 10.$$

Tehát minden esetben 10 eurót nyerünk, vagyis a nyereményünket jelentő valószínűségi változó értéke konstans 10. Így a várható érték 10 euró, a szórásnégyzet pedig 0 euró. Vegyük észre, hogy nem használtuk ki azt, hogy mekkora valószínűséggel nyerünk n-edik dobásra. Ez azt jelenti, hogy ugyanezt kaptuk volna akkor is, ha például egy kockával játszunk, és akkor nyerünk, ha hatost dobunk.

8.7. feladat. Az előző feladatban mi van akkor, ha a játékosnál csak 1300 euró van, így nem tudja biztosan addig folytatni a dobásokat, amíg írást nem dob? Ekkor mennyi a nyeremény várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Ha az első hét dobás mindegyike fej, akkor a veszteség $10 + 20 + 40 + 80 + {} + 160 + 320 + 640 = 1270$ euró, azaz a nyolcadik dobásra már nem tud a játékos újabb dupla tétet feltenni, így abba kell hagynia a játékot. Tehát, az előző feladat alapján, ha az első hét dobás valamelyike írás, akkor 10 euró a nyeremény, de ha a hét dobás mindegyike fej, akkor 1270 euró a veszteség. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= 10 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 10 \cdot \frac{1}{2^7} + (-1270)\frac{1}{2^7} = 0 \\
\mathrm{D}^2\,\xi = \mathrm{E}\,\xi^2 &= 10^2 \cdot \frac{1}{2} + 10^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 10^2 \cdot \frac{1}{2^7} + (-1270)^2\frac{1}{2^7} = 12\,700.
\end{aligned}$$

8.8. feladat. Egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Mi a két pont távolságának várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Jelölje ξ a két pont távolságát. A 3.3. feladat alapján $F_\xi(x) = 2x - x^2$, ha $x \in [0,1]$, $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Ebből $f_\xi(x) = 2 - 2x$, ha $x \in [0,1]$ és $f_\xi(x) = 0$, ha $x \notin [0,1]$. Így

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \int_0^1 x(2-2x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_0^1 x^2(2-2x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

8.9. feladat. Legyen Ω egy egységnyi sugarú körlap és $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ geometriai valószínűségi mező. Jelölje ξ a kiválasztott pontnak a kör középpontjától mért távolságát. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. A 7.15. feladat alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\xi &= \int_0^1 x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \\
\mathrm{E}\,\xi^2 &= \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
\mathrm{D}^2\,\xi &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

8.10. feladat. Határozzuk meg az $[a,b]$ intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét (lásd a 7.14. feladatot)!

Megoldás. Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |x|\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

így

$$\mathrm{E}\,\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Másrészt

$$\mathrm{E}\,\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f_\xi(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)},$$

így

$$\mathrm{D}^2\,\xi=\mathrm{E}\,\xi^2-\mathrm{E}^2\,\xi=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

9. fejezet

Binomiális eloszlás

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, $n \in \mathbb{N}$, $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$ és $0 < p < 1$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

akkor ξ-t n-ed rendű p paraméterű *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Egy p valószínűségű esemény n kísérletben történő bekövetkezéseinek a száma, azaz a gyakorisága n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Például legyen egy urnában 3 darab golyó, egy piros és két fehér. Vegyünk ki az urnából véletlenszerűen egy golyót, majd tegyük vissza. Ezt ismételjük meg tízszer. Legyen ξ azon esetek száma, amikor pirosat vettünk ki. Ekkor ξ gyakoriságot jelöl, így ez 10-ed rendű $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tehát például annak a valószínűsége, hogy a 10 esetből pontosan kétszer választottunk piros golyót

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

Tétel

Ha ξ egy n-ed rendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\mathrm{E}\,\xi = np$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = np(1-p)$.

Feladatok

9.1. feladat. Az ötöslottóban mi a valószínűsége, hogy a joker számban nincs 0? (A joker szám hatjegyű, melyben minden számjegy 0-tól 9-ig egyforma valószínűséggel bármi lehet.)

Megoldás. Legyen ξ a kisorsolt nullák száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \binom{6}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}9^6.$$

9.2. feladat. Ezer újszülött között átlagban 516 fiú. Mi a valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

Megoldás. Legyen ξ a fiúk száma egy 6 gyermekes családban. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 6$ renddel és $p = 0{,}516$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0{,}516^k \cdot 0{,}484^{6-k}.$$

9.3. feladat. Rezső nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsit dereng, ezért 0,6 valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Mekkora valószínűséggel megy át Rezső a vizsgán, ha ehhez minimum 8 jó válasz kell?

Megoldás. Legyen ξ a jó válaszok száma. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 10$ renddel és $p = 0{,}6$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} \approx 0{,}1673.$$

9.4. feladat. Egy gép által gyártott termékek között naponta átlagosan 12 darab lesz selejtes, szórása $\sqrt{11{,}88}$. Hány terméket készít a gép naponta?

Megoldás. Legyen ξ a selejtesek száma n darab termékből. Ekkor ξ n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású, ahol p annak a valószínűsége, hogy selejtes egy termék. Így

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}\,\xi &= np = 12 \\ \mathrm{D}^2\,\xi &= np(1-p) = 11{,}88 \end{aligned}\right\}$$

melyből $p = 0{,}01$ és $n = 1200$.

9.5. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75. Mekkora a valószínűsége, hogy 6 napon keresztül csak 3 napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan? Mennyi lesz 6 nap alatt a zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

Megoldás. Legyen 6 napból ξ a zavartalan napok száma. Ez $n = 6$ rendű és $p = 0{,}75$ paraméterű binomiális eloszlású, így $\mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{6}{3} 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3$ és $\mathrm{E}\,\xi = np = 6 \cdot 0{,}75$.

9.6. feladat. Két doboz gyufát zsebre teszünk. Mindkét dobozban 50-50 szál gyufa van. Ezután, mikor gyufát kell gyújtani, találomra vagy az egyik vagy a másik dobozból veszünk ki egy szálat. Ezt addig folytatjuk, míg egy olyan dobozt nem választunk, amely már üres. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan 13 szál gyufa van még?

Megoldás. Tegyünk mindkét dobozba még egy-egy szál gyufát, továbbá tegyük fel, hogy az egyik dobozban csupa piros fejű gyufaszál van, a másikban pedig csupa fekete fejű. Ezzel a kiegészítéssel a következőképpen fogalmazhatjuk át a feladatot: Mi a valószínűsége, hogy az első 87 húzásban pontosan 50 piros fejű gyufaszál van és a 88. húzás is piros fejű, vagy az első 87 húzásban pontosan 50 fekete fejű gyufaszál van és a 88. húzás is fekete fejű?

Legyen ξ az első 87 húzásban a pirosak száma. Ez binomiális eloszlású $n = 87$ renddel és $p = 0{,}5$ paraméterrel. Így $\mathrm{P}(\xi = 50) = \binom{87}{50} 0{,}5^{50} \cdot 0{,}5^{37} = \binom{87}{50} 0{,}5^{87}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az első 87 húzásban pontosan 50 piros fejű gyufaszál van és a 88. húzás is piros fejű

$$\binom{87}{50} 0{,}5^{87} \cdot 0{,}5.$$

Így a megoldás

$$\binom{87}{50} 0{,}5^{87} \cdot 0{,}5 \cdot 2 = \binom{87}{50} 0{,}5^{87} \approx 0{,}0325.$$

10. fejezet

Poisson-eloszlás

A következő tételben a binomiális eloszlás határeloszlását adjuk meg bizonyos feltétellel.

Tétel

Legyen p_n olyan számsorozat, melyre np_n konvergens. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} np_n$ és $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és $R_\xi := \{0, 1, 2, \dots\}$. Ha minden $k \in R_\xi$ esetén

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor ξ-t λ paraméterű *Poisson-eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Tétel

Legyen ξ egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{D}^2\,\xi = \lambda$.

A fejezet első tétele szerint az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlást jól közelíti a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlás nagy n és kis p esetén. Másrészt egy adott esemény bekövetkezéseinek a száma Poisson-eloszlású adott időszakaszban vagy térrészben, ha az csak az időszakasz hosszától vagy a térrész nagyságától függ.

Feladatok

10.1. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy lövés célba talál 0,001. Mi a valószínűsége, hogy 2000 lövés közül legalább két lövés célba talál?

Megoldás. Legyen ξ a találatok száma 2000 lövésből. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 2000$ renddel és $p = 0{,}001$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{2000}{k} 0{,}001^k \cdot 0{,}999^{2000-k} \approx 0{,}5941.$$

Mivel n nagy és p kicsi, ezért alkalmazhatjuk a Poisson-közelítést $\lambda = np = 2$ paraméterrel:

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{2^k}{k!} e^{-2} \approx 0{,}5939.$$

10.2. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy kollégium valamelyik lakója egy adott napon megbetegszik 0,002. Ha 1200 lakója van a kollégiumnak, hány ágyas betegszobát kell berendezni, ha azt akarjuk, hogy legfeljebb 0,01 legyen annak a valószínűsége, hogy egy betegnek nem jut ágy?

Megoldás. Legyen ξ a betegek száma egy adott napon és x az ágyak száma a betegszobában. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = 1200$ renddel és $p = 0{,}002$ paraméterrel. Mivel n nagy és p kicsi, ezért alkalmazhatjuk a Poisson-közelítést $\lambda = np = 2{,}4$ paraméterrel:

$$0{,}99 \leq \mathrm{P}(\xi \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{2{,}4^k}{k!} e^{-2{,}4}.$$

Ebből $x \geq 7$.

10.3. feladat. Egy postahivatalban az egy év alatt feladott címezetlen levelek száma 1017. Mi a valószínűsége, hogy egy nap kettőnél több címezetlen levelet adnak fel?

Megoldás. Legyen ξ az egy nap alatt feladott címezetlen levelek száma. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{1017}{365}$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi > 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + 0{,}5\lambda^2) \approx 0{,}5273.$$

10.4. feladat. Egy adott éjszakán 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt két csillaghullást látunk, ha feltételezzük, hogy a csillaghullások száma Poisson-eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ az észlelt csillaghullások száma negyed óra alatt. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{15}{10} = 1{,}5$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{1{,}5^2}{2!} e^{-1{,}5} \approx 0{,}2510.$$

10.5. feladat. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba van. Mi a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott oldalon nincs sajtóhiba?

Megoldás. Legyen ξ a sajtóhibák száma a kiválasztott 10 oldalon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{200}{500} \cdot 10 = 4$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} \approx 0{,}0183.$$

10.6. feladat. Egy félkilós kalácsban átlagban 80 mazsolaszem található. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 5 dekagrammos szeletben nincs mazsola?

Megoldás. Egy szeletben a mazsolaszemek száma (jelöljük ξ-vel) Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Egy szeletben az átlagos számuk 8, tehát $\lambda = 8$. Így $\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{8^0}{0!} e^{-8} = e^{-8}$.

10.7. feladat. Egy lemezből 25 darab egyenlő nagyságú idomot vágnak ki. Egy lemezen a hibák száma Poisson-eloszlású 3,5 várható értékkel. Hány lemezt kell beszerezni, ha félmillió hibátlan idomot kell előállítani?

Megoldás. Legyen ξ a hibák száma egy idomon. Ekkor ξ Poisson-eloszlású $\mathrm{E}\,\xi = \lambda = \frac{3{,}5}{25} = 0{,}14$ paraméterrel. Így

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{0{,}14^0}{0!} e^{-0{,}14} = e^{-0{,}14}.$$

Emiatt $\frac{500000}{e^{-0{,}14}} = 500000 e^{0{,}14}$ darab idomból lesz félmillió hibátlan, azaz $\frac{500000 e^{0{,}14}}{25} = 20000 e^{0{,}14} \approx 23006$ darab lemezt kell feldolgozni.

11. fejezet

Exponenciális eloszlás

Vizsgáljuk egy üvegpohár élettartamát! Mivel az üveg nem öregszik, ezért csak a véletlen törések határozzák meg az élettartamot. Vagyis ha x ideig nem törik el a pohár, akkor további legalább y ideig ugyanakkora valószínűséggel marad ép, mintha akkor gyártották volna, azaz

$$\mathrm{P}(\xi \geq x + y \mid \xi \geq x) = \mathrm{P}(\xi \geq y) \quad \text{minden } x, y > 0 \text{ esetén,}$$

ahol ξ az élettartam. Ezt a tulajdonságot *örökifjú tulajdonságnak* nevezzük.

Definíció

Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó és $\lambda > 0$. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

akkor ξ-t λ paraméterű *exponenciális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Tétel

Egy folytonos eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változó pontosan akkor rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, ha exponenciális eloszlású.

Tétel

Legyen $\lambda > 0$ és ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Tétel

Legyen $\lambda > 0$ és ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda}$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

Feladatok

11.1. feladat. Egy szövőgépen a fonal szakadásáig eltelt idő exponenciális eloszlású, átlagban 2,5 óra. Mi a valószínűsége, hogy 8 óra alatt nem szakad el a fonal?

Megoldás. Legyen ξ a fonal szakadásáig eltelt idő órában mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 2{,}5$, azaz $\lambda = 0{,}4$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 8) = 1 - F_\xi(8) = e^{-0{,}4\cdot 8} = e^{-3{,}2}$.

11.2. feladat. Egy boltban a vevők egymásutáni érkezésének időbeli eloszlása exponenciális, átlagban 1 perc. Mi a valószínűsége, hogy egy vevő érkezése után 5 percig nem jön újabb vevő?

Megoldás. Legyen ξ két vevő érkezése között eltelt idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 1$, azaz $\lambda = 1$. Így $\mathrm{P}(\xi \geq 5) = 1 - F_\xi(5) = e^{-5}$.

11.3. feladat. Egy boltban átlagosan 6 percet kell sorban állni. Mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ a sorban állási idő percben mérve. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = \frac{1}{\lambda} = 6$, azaz $\lambda = \frac{1}{6}$. Így $\mathrm{P}(\xi \leq 4) = F_\xi(4) = 1 - e^{-\frac{1}{6}\cdot 4}$.

11.4. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál 6 percnél többet kell várni 0,1. Mi a valószínűsége, hogy 3 percen belül sorra kerülünk, ha a várakozási idő exponenciális eloszlású?

Megoldás. Legyen ξ a várakozási idő percben mérve. Ekkor $0{,}1 = \mathrm{P}(\xi \geq 6) = 1 - F_\xi(6) = e^{-6\lambda}$, melyből $\lambda = -\frac{1}{6}\ln 0{,}1$. Így $\mathrm{P}(\xi < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{0{,}1}$.

12. fejezet

Normális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó standardizáltján a

$$\frac{\xi - \mathrm{E}\,\xi}{\mathrm{D}\,\xi}$$

valószínűségi változót értjük. Legyen ξ_n egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a ξ_n sorozat standardizáltjának a határeloszlása egy olyan abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásával egyezik meg, melynek sűrűségfüggvénye

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ennek a határeloszlásnak kiemelt szerepe van a valószínűségszámításban.

Definíció

A ξ abszolút folytonos valószínűségi változót *standard normális eloszlásúnak* nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye φ.

Definíció

Standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük, azaz

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Tétel

A standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényére teljesülnek a következők:

(1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(2) $\Phi(0) = 0{,}5$.

(3) Φ szigorúan monoton növekedő és mindenhol differenciálható.

Tétel

Ha ξ standard normális eloszlású, akkor $\mathrm{E}\,\xi = 0$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = 1$.

Definíció

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a $\xi := \sigma\eta + m$ valószínűségi változót m és σ paraméterű *normális eloszlásúnak* nevezzük.

A standard normális eloszlású valószínűségi változó $m = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlású.

Tétel

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor ξ abszolút folytonos, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{és} \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Tétel

Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\mathrm{E}\,\xi = m$ és $\mathrm{D}^2\,\xi = \sigma^2$.

Számolásoknál a 76. oldalon található táblázatot fogjuk használni.

Feladatok

12.1. feladat. Egy izzólámpa típus élettartamának eloszlása normális, 1000 óra várható értékkel és 100 óra szórással. Az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre? Mekkora a valószínűsége, hogy egy izzó nem megy tönkre az első 1200 órában?

Megoldás. Legyen ξ az izzó élettartama órában mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 1000$ és $\sigma = 100$ paraméterekkel. Így $\mathrm{P}(\xi < 900) = \Phi\left(\frac{900-m}{\sigma}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$, vagyis kb. 16 % megy tönkre. Másrészt $\mathrm{P}(\xi > 1200) = 1 - \Phi\left(\frac{1200-1000}{100}\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0{,}9772$.

12.2. feladat. Egy fafeldolgozó üzemben a deszkák hossza normális eloszlású, átlagban 4 méter, a szórásuk 3 cm.

(1) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm és 401 cm között?

(2) Mi a valószínűsége, hogy egy deszka hossza 4 m-től legfeljebb 2,5 cm-rel tér el?

Megoldás. Legyen ξ egy deszka hossza centiméterben mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 400$ és $\sigma = 3$ paraméterekkel.

(1) $\mathrm{P}(398 \le \xi \le 401) = F_\xi(401) - F_\xi(398) = \Phi\left(\frac{401-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{398-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 \approx 0{,}3747$.

(2) $\mathrm{P}(397{,}5 \le \xi \le 402{,}5) = F_\xi(402{,}5) - F_\xi(397{,}5) = \Phi\left(\frac{402{,}5-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{397{,}5-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2{,}5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2{,}5}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) - 1 \approx 0{,}5934$.

12.3. feladat. Egy gép vegyszert tölt üvegekbe. Ez az anyagmennyiség normális eloszlású, átlagban 100 gramm. Mekkora lehet a szórás, ha azt akarjuk, hogy a töltött mennyiség 98 %-a 98 és 102 gramm közé essen?

Megoldás. Legyen ξ egy üvegben levő anyag tömege grammban mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 100$ és σ paraméterekkel. Ekkor $0{,}98 = \mathrm{P}(98 \le \xi \le 102) = F_\xi(102) - F_\xi(98) = \Phi\left(\frac{102-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{98-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1$, azaz $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}99 \approx \Phi(2{,}32)$, melyből $\sigma \approx \frac{2}{2{,}32} \approx 0{,}862$.

12.4. feladat. Egy gyár alkatrészeket készít. Ezek élettartama normális eloszlású valószínűségi változó 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár az alkatrészekre garanciát vállal. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5 % garanciaigényt kíván kielégíteni?

Megoldás. Ha t órára vállalnak garanciát, akkor a feladat szerint

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi < t) &\le 0{,}05\\
F_\xi(t) &\le 0{,}05\\
\Phi\left(\frac{t-1170}{100}\right) &\le 0{,}05\\
1 - \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right) &\le 0{,}05\\
0{,}95 &\le \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right).
\end{aligned}$$

Ebből Φ szigorúan monoton növekedése és $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95$ alapján

$$1{,}64 \le \frac{1170-t}{100},$$

melyből $t \le 1006$, azaz legfeljebb 1006 órára szóljon a garancia.

12.5. feladat. Egy gép vegyszert tölt zacskókba. A betöltött vegyszer tömege normális eloszlású 100 gramm várható értékkel és 2 gramm szórással. Egy nap alatt 1000 zacskót tölt meg a gép. Mi a valószínűsége, hogy ezek között maximum kettő olyan van, amelyben a vegyszer tömege nem 95 és 105 gramm közé esik?

Megoldás. Legyen ξ egy zacskó tömege grammban mérve. Ekkor ξ normális eloszlású $m = 100$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Így $p := 1 - \mathrm{P}(95 \leq \xi \leq 105) = 1 - (F_\xi(105) - F_\xi(95)) = 1 - \Phi\left(\frac{105-100}{2}\right) + \Phi\left(\frac{95-100}{2}\right) = 2 - 2\Phi(2{,}5) \approx 0{,}0124$.

Legyen η azon csomagok száma, melyekre $95 \leq \xi \leq 105$ nem teljesül. Ekkor η binomiális eloszlású $n = 1000$ renddel és $p \approx 0{,}0124$ paraméterrel, illetve közelítőleg Poisson-eloszlású $\lambda = np \approx 12{,}4$ paraméterrel. Így $\mathrm{P}(\eta \leq 2) \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{12{,}4^k}{k!} e^{-12{,}4} \approx 0{,}0003718$.

12.6. feladat. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Mennyi az A, ha $\mathrm{P}(2 < \xi < A) \geq 0{,}5$?

Megoldás. Mivel $0{,}5 \leq F_\xi(A) - F_\xi(2) = \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right)$, így $\Phi(0{,}87) \approx 0{,}8085 \leq \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right)$. Ebből $A \geq 4{,}74$.

12.7. feladat. Egy vállalathoz beérkező megrendelések száma normális eloszlású 10 szórással. Mennyi a várható értéke, ha 0,1 annak a valószínűsége, hogy 20-nál kevesebb megrendelés érkezik?

Megoldás. Legyen ξ a beérkező megrendelések száma. Ekkor ξ normális eloszlású m és $\sigma = 10$ paraméterekkel. Így $\Phi(1{,}28) \approx 0{,}9 = \mathrm{P}(\xi \geq 20) = 1 - \Phi\left(\frac{20-m}{10}\right) = \Phi\left(\frac{m-20}{10}\right)$, azaz $\frac{m-20}{10} \approx 1{,}28$. Így $m \approx 32{,}8$.

13. fejezet

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

A valószínűség fogalmának meghatározásakor a matematikai modellünkben feltételeztük a Bernoulli-féle tapasztalat alapján, hogy a valószínűség örökli a relatív gyakoriság legfontosabb tulajdonságait: az értéke nemnegatív, a biztos esemény valószínűsége 1 és σ-additív. Felmerül a kérdés, hogy elég-e csak ennyit feltételezni a valószínűségről? Azaz ez alapján megmutatható-e a modellünkben Bernoulli tapasztalata, miszerint egy esemény relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik az esemény valószínűsége körül? A modell akkor lesz jó, ha ez az eddigiek alapján bizonyítható tétel.

Tétel Bernoulli-féle nagy számok törvénye

Legyen egy esemény valószínűsége p és ϱ_n a gyakorisága n kísérlet után. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Ebből látható, hogy n növelésével egyre kisebb annak a valószínűsége (határértékben 0), hogy az esemény $\frac{\varrho_n}{n}$ relatív gyakorisága ε-nál jobban eltérjen a valószínűségtől. Vagyis a modellünkben a valószínűség és a relatív gyakoriság hasonló kapcsolatban van, mint amit a tapasztalat mutat.

A Bernoulli-féle nagy számok törvényében akkor is tudunk felső becslést adni, ha p értéke nem ismert. Ugyanis $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ mindig teljesül, így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

A feladatokban gyakran használható a következő becslés is:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Feladatok

13.1. feladat. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól minimum 0,95 valószínűséggel legfeljebb csak 0,01-dal térjen el?

Megoldás. Jelölje n a megfigyelések számát, ϱ_n a megfigyelt személyek között a szeszfogyasztók számát, p pedig a valódi arányt. Ekkor a Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \le 0{,}01\right) \ge \mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2}.$$

Így a feltétel teljesül, ha

$$0{,}95 \le 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2},$$

azaz $n \ge 50\,000$.

13.2. feladat. Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nál kisebb hibával megközelítse? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, azaz a 6-os dobásának a valószínűségét nem ismerjük!

Megoldás. Jelölje ϱ_n a 6-os dobásának gyakoriságát n dobás után. A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01^2} \ge 0{,}9.$$

Ebből $n \ge 13\,889$. Ha a kockáról nem tudjuk biztosan, hogy szabályos-e, akkor

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2} \ge 0{,}9,$$

ahol p a 6-os dobásának a valószínűsége. Ebből $n \ge 25\,000$.

13.3. feladat. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni legalább 0,9 valószínűséggel a találatok száma?

Megoldás. Legyen $n = 200$ a lövések száma, ϱ_n a találatok száma és $p = 0{,}4$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Ebből $\varepsilon \approx 0{,}1095$. Így

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\varrho_n}{200} - 0{,}04\right| < 0{,}1095\right) = \mathrm{P}(59 \le \varrho_n \le 101) \ge 0{,}9.$$

Tehát a találatok száma 59 és 101 között lesz legalább 0,9 valószínűséggel.

13.4. feladat. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95 %-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt százezer darab terméket kell készíteni. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

Megoldás. Legyen $n = 100\,000$ a termékek száma, ϱ_n abból a hibátlan termékek száma és $p = 0{,}95$. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(93\,000 \le \varrho_n \le 97\,500) = \\
&= \mathrm{P}\Big(0{,}93 \le \frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}975\Big) = \mathrm{P}\Big(-0{,}02 \le \frac{\varrho_n}{n} - p \le 0{,}025\Big) \ge \\
&\ge \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - p\Big| \le 0{,}02\Big) \ge \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - p\Big| < 0{,}02\Big) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{0{,}02^2 n} \approx 0{,}9998.
\end{aligned}$$

13.5. feladat. Egy gyárból kikerülő gyártmányok 10 %-a hibás. Egy bizonyos számú gyártmányból álló tételt a minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak, ha abban legfeljebb 12 % hibás. Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, ha azt akarjuk, hogy legalább 0,95 valószínűséggel elfogadhatónak minősítsék?

Megoldás. Jelölje n a gyártmányok darabszámát a tételben, ϱ_n pedig a tételben található hibás darabok számát. A kérdés, milyen n esetén teljesül, hogy

$$\mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}12\Big) \ge 0{,}95? \tag{$*$}$$

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\begin{aligned}
1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n} &\le \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_n}{n} - 0{,}1\Big| < 0{,}02\Big) = \mathrm{P}\Big(0{,}08 < \frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\Big) \le \\
&\le \mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} < 0{,}12\Big) \le \mathrm{P}\Big(\frac{\varrho_n}{n} \le 0{,}12\Big).
\end{aligned}$$

Így $(*)$ teljesül, ha

$$0{,}95 \le 1 - \frac{0{,}1(1-0{,}1)}{0{,}02^2 n},$$

amelyből kapjuk, hogy $n \ge 4500$.

13.6. feladat. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak a valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad, 0,008 minden szálra. Határozzuk meg, hogy minimum 0,95 valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt!

Megoldás. Jelölje ϱ_{500} az elszakadt fonalak számát. A Bernoulli-féle nagy számok törvénye alapján

$$\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\varrho_{500}}{500} - 0{,}008\Big| < \varepsilon\Big) \ge 1 - \frac{0{,}008(1-0{,}008)}{500\varepsilon^2}.$$

Így

$$0{,}95 = 1 - \frac{0{,}008(1-0{,}008)}{500\varepsilon^2}$$

esetén teljesül a feltétel. Ebből $\varepsilon = \sqrt{317{,}44} \cdot 10^{-3}$, azaz

$$\left|\frac{\varrho_{500}}{500} - 0{,}008\right| < \sqrt{317{,}44} \cdot 10^{-3}.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy $\varrho_{500} < 12{,}9$, azaz $\varrho_{500} \leq 12$.

13.7. feladat. Egy csavargyártó gép esetében megvizsgálunk 5000 csavart. Összesen 80 selejteset találunk. Határozzuk meg, hogy mennyi lehet maximum a pontos selejt arány az összes legyártott csavarra vonatkozólag legalább 0,9 valószínűséggel!

Megoldás. Jelölje p a pontos selejt arányt. Ekkor a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{80}{5000} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 5000\varepsilon^2} = 0{,}9.$$

Ebből $\varepsilon = \sqrt{0{,}0005}$ és $\left|\frac{80}{5000} - p\right| < \sqrt{0{,}0005}$. Ennek megoldása $p < 0{,}03836$.

14. fejezet

Moivre – Laplace-tétel

Korábban láttuk, hogy a binomiális eloszlás bizonyos feltételekkel jól közelíthető Poisson-eloszlással. A Moivre – Laplace-tétel azt állítja, hogy n-edrendű binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye nagy n-re jól közelíthető normális eloszlással.

Tétel Moivre – Laplace-tétel

Legyen ξ_n egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó minden $n \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor a ξ_n sorozat standardizáltjának a határeloszlása standard normális, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Ezek szerint nagy n esetén

$$\mathrm{P}(\xi_n < x) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a binomiális eloszlást közelíti a normális eloszlás.

Feladatok

14.1. feladat. 1000 lövést adunk le egy célra. Minden lövés egymástól függetlenül 0,11 valószínűséggel talál. Mi a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebbszer találunk célba?

Megoldás. Jelölje ξ a találatok számát. Ez binomiális eloszlású $n = 1000$ renddel és $p = 0{,}11$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 0{,}1562.$$

14.2. feladat. Egy gyárból kikerülő termékek 1 %-a selejtes. Ha 500 darab terméket vásárolunk, mi a valószínűsége, hogy ezek között a selejtesek száma 7 és 14 között lesz?

Megoldás. Jelölje ξ a selejtesek számát. Ez binomiális eloszlású $n = 500$ renddel és $p = 0{,}01$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(7 \leq \xi \leq 14) \approx \Phi\left(\frac{14 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) \approx 0{,}184.$$

14.3. feladat. Ha minden lövés egymástól függetlenül 0,1 valószínűséggel talál célba, akkor hány lövés után lesz 0,9918 annak a valószínűsége, hogy 200-nál kevesebbszer találjuk el a célt?

Megoldás. Jelölje ξ a találatok számát n lövésből. Ez binomiális eloszlású n renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel. Így a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < 200) \approx \Phi\left(\frac{200 - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) \approx 0{,}9918 \approx \Phi(2{,}4).$$

Ebből

$$\frac{200 - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \approx 2{,}4,$$

azaz $n \approx 1179$.

14.4. feladat. Egy gyár egyforma energiaigényű gépei közül átlagosan 210 üzemel, ami az összes gépek 70 %-a. A többi meghibásodás miatt javításra vár vagy éppen javítják. A gépek meghibásodása egymástól független. Mennyi energiát kell biztosítani akkor, ha 0,999 valószínűséggel szeretnénk azt elérni, hogy minden működőképes gép valóban működni tudjon?

Megoldás. Jelölje ξ a működőképes gépek számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású $n = \frac{210}{0{,}7} = 300$ renddel és $p = 0{,}7$ paraméterrel. Jelölje x azon gépek maximális számát, amelyek működőképesek 0,999 valószínűséggel, azaz $\mathrm{P}(\xi < x) = 0{,}999$. Ekkor a Moivre – Laplace-tétel alapján

$$\mathrm{P}(\xi < x) \approx \Phi\left(\frac{x - 0{,}7 \cdot 300}{\sqrt{300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) = 0{,}999 \approx \Phi(3{,}1),$$

vagyis

$$\frac{x - 0{,}7 \cdot 300}{\sqrt{300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 3{,}1.$$

Ebből $x \approx 234{,}6$, azaz kb. 234 gép működéséhez szükséges energiát kell biztosítani, ha azt akarjuk, hogy 0,999 valószínűséggel minden működőképes gépnek jusson energia.

Standard normális eloszlás táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9982
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,10	0,9990
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,20	0,9993
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,30	0,9995
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,40	0,9997
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861	3,50	0,9998
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8078	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		