Mértékelmélet
összefoglaló zárószigorlatra

Dr. Tómács Tibor
Eszterházy Károly Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

A geometriában tanult mértékek (hosszúság, terület, térfogat) fogalmát általánosítjuk úgy, hogy az elvezessen egy olyan integrálfogalomhoz, amely a Riemann-integrálnál jóval általánosabb és kedvezőbb tulajdonságú. Ehhez azt kell feltenni, hogy a mérték nem csak véges sok, hanem megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt mérhető halmaz esetén is additív tulajdonságú.

Először az X alaphalmaz azon részhalmazait gyűjtjük össze az $\mathcal{A}$ halmazrendszerbe, melyekhez majd mértéket akarunk rendelni.

Definíció (mérhető tér)**.** Legyen X egy halmaz. Az X hatványhalmazának[1] egy $\mathcal{A}$ részhalmazát *σ-algebrának*[2] nevezzük, ha

1. $X \in \mathcal{A}$,

2. $\overline{A} \in \mathcal{A}$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén (ahol $\overline{A} = X \setminus A$), és

3. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ rendezett párt *mérhető térnek*, az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

Definíció (mértéktér)**.** A $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ha

1. $\mu(\emptyset) = 0$, és

2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ minden $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ diszjunkt rendszer esetén.

Ekkor az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ rendezett hármast *mértéktérnek*, $\mu(A)$-t az A *mértékének* nevezzük.

Definíció (külső mérték)**.** Ha X egy halmaz és μ^* az X hatványhalmazát $[0, \infty]$-be képező szubadditív függvény, azaz

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i \in I} \mu^*(A_i)$$

[1] X hatványhalmaza az X összes részhalmazából álló halmazrendszer.
[2] Ejtsd: szigma-algebra.

minden olyan esetben, amikor $I \subset \mathbb{N}$, $A \subset X$ és $A_i \subset X$ $(i \in I)$ az A lefedőrendszere[3], akkor μ^*-ot *külső mértéknek* nevezzük X-en.

Definíció (külső mérték által mérhető halmazok)**.** Legyen μ^* külső mérték az X halmazon. Az $A \subset X$ halmazt *μ^*-mérhetőnek* nevezzük, ha minden $T \subset X$ halmazt additívan vág ketté, azaz

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Tétel (külső mérték által generált teljes mértéktér)**.** Legyen μ^* külső mérték X-en, $\mathcal{A}$ az X μ^*-mérhető részhalmazainak rendszere és μ a μ^*-nak $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése[4]. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér[5], melyet a μ^* *külső mérték által generált teljes mértéktérnek* nevezünk.

Tétel (halmazfüggvényhez tartozó külső mérték)**.** Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H}$ részhalmaza az X hatványhalmazának és $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$. Ha $B \subset X$, akkor jelölje $\mu^*(B)$ annak a halmaznak az infimumát, melynek elemei a B-t lefedő megszámlálhatóan sok $\mathcal{H}$-beli halmazhoz ν által rendelt értékek összegeként állnak elő. Ekkor μ^* külső mérték X-en, melyet a *ν-höz tartozó külső mértéknek* nevezünk.

Megjegyzés. Nem feltétlenül teljesül, hogy az előző tételben a $\mathcal{H}$-beli halmazok μ^*-mérhetőek, továbbá az sem biztos, hogy $\mu^*(B) = \nu(B)$ minden $B \in \mathcal{H}$ esetén. Ezek teljesülésének szükséges és elégséges feltétele, hogy ν premérték legyen.

Definíció (premérték)**.** Az előző tételben szereplő ν és μ^* esetén a ν-t *premértéknek* nevezzük, ha szubadditív és minden $A, B \in \mathcal{H}$ esetén

$$\nu(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

Definíció (Lebesgue-mérték)**.** Rendelje ν az $\mathbb{R}$ minden korlátos részintervallumához a hosszát. Ekkor a ν-höz tartozó külső mérték által generált $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ teljes mértékteret *Lebesgue-mértéktérnek*, $\mathcal{L}$ elemeit *Lebesgue-mérhető halmazoknak* és λ-t *Lebesgue-mértéknek* nevezzük.

Tétel. Az előbb definiált ν premérték, így a korlátos intervallumok Lebesgue-mérhetőek és Lebesgue-mértékük a hosszukkal egyenlő.

Definíció (Borel-mérhető halmaz)**.** Azt a legszűkebb σ-algebrát, amely tartalmazza a valós számok bővített halmazának[6] minden nyílt részhalmazát, *Borel-mérhető halmazok rendszerének* nevezzük.

---

[3] Vagyis $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

[4] Azaz μ értelmezési tartománya $\mathcal{A}$ és $\mu(A) = \mu^*(A)$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén.

[5] Vagyis amelyben minden nulla mértékű halmaz összes részhalmaza mérhető.

[6] Jelölje $\mathbb{R}_b$ a valós számok bővített halmazát, azaz $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definíció (mérhető függvény)**.** Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Az $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ függvényt *mérhetőnek* nevezzük, ha $\mathbb{R}_b$ minden Borel-mérhető részhalmazának f általi ősképe[7] az X egy mérhető részhalmaza, azaz $\mathcal{A}$-beli.

Definíció (nemnegatív mérhető függvény integrálja)**.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ mérhető függvény és

$$D_n := \Big\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le y_1 < y_2 < \cdots < y_n\Big\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $y := (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_n$, akkor legyenek

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in X : y_1 \le f(x) < y_2\}, \\ A_2 &:= \{x \in X : y_2 \le f(x) < y_3\}, \\ &\vdots \\ A_{n-1} &:= \{x \in X : y_{n-1} \le f(x) < y_n\}, \\ A_n &:= \{x \in X : y_n \le f(x)\}, \\ s(f, y) &:= \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Ekkor az

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{s(f, y) : n \in \mathbb{N}, y \in D_n\Big\}$$

értéket az f *integráljának* nevezzük.

Megjegyzés. Minden nemnegatív mérhető függvénynek létezik integrálja és értéke $[0, \infty]$-beli.

Definíció (pozitív és negatív rész)**.** Ha $f\colon X \to \mathbb{R}_b$, akkor f *pozitív része*

$$f^+\colon X \to \mathbb{R}_b, \quad f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) > 0, \\ 0, & \text{ha } f(x) \le 0, \end{cases}$$

illetve f *negatív része*

$$f^-\colon X \to \mathbb{R}_b, \quad f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{ha } f(x) < 0, \\ 0, & \text{ha } f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Tétel. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény, akkor f^+ és f^- nemnegatív mérhető függvények, továbbá $f = f^+ - f^-$.

[7] Egy B halmaz f általi ősképe azon értelmezéstartománybeli elemekből álló halmaz, melyekhez az f B-beli elemeket rendel.

Definíció (mérhető függvény integrálja)**.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Azt mondjuk, hogy az $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvénynek *létezik az integrálja*, ha

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{vagy} \quad \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Ekkor az

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

értéket az f *integráljának* nevezzük. Ha $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor az f függvényt *integrálhatónak* nevezzük.

Tétel (integrál tulajdonságai)**.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvények. Ekkor teljesülnek a következők:

1. Ha $f = g$ majdnem mindenütt és f-nek létezik integrálja, akkor g-nek is létezik, továbbá $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.
2. (homogenitás) Ha létezik f-nek integrálja és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor létezik αf-nek is az integrálja, továbbá $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$.
3. (additivitás) Ha $\int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ értelmezett, akkor létezik $f + g$ integrálja, továbbá $\int (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Tétel (majorált konvergenciatétel)**.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $g, f, f_n\colon X \to \mathbb{R}_b$ $(n \in \mathbb{N})$ mérhető függvények. Ha g integrálható, $|f_n| \le g$ majdnem mindenütt minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ majdnem mindenütt, akkor f és f_n integrálható függvények minden $n \in \mathbb{N}$-re, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$