EGER 1774

ESZTERHÁZY KÁROLY EGYETEM

Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Mérték- és integrálelmélet

előadás anyaga

Ez a jegyzet az alábbi címről szabadon letölthető:
`https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Mertekelmelet_eloadas.pdf`

Eger, 2020. október 1.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 3
Jelölések 4
1. Mértéktér 5
2. Külső mérték 9
3. Lebesgue-mérték 15
4. Nyílt illetve Borel-mérhető halmazok 20
5. Mérhető függvények 21
6. Mérhető függvények sorozatai 26
7. Nemnegatív mérhető függvények integrálja 32
8. Mérhető függvények integrálja 36
9. Lebesgue-integrál 41
10. Mértékterek szorzata, kétszeres integrál 42
11. Többdimenziós Lebesgue-mérték 44
12. Mértékek deriváltja 45
Irodalomjegyzék 48

Bevezetés

Egyszerű geometriai alakzatok hosszúsága, területe, térfogata, már az ókorban ismertek és számolhatóak voltak. A terület fogalmát *Peano* és *Jordan* terjesztették ki a sík részhalmazainak egy bővebb rendszerére a XIX. század végén. Eszerint egy síkbeli korlátos halmaz Jordan-szerinti külső mértéke legyen az őt lefedő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos alsó korlátja, Jordan-szerinti belső mértéke pedig a benne fekvő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos felső korlátja. Ha ezek egyenlőek, akkor a halmazt Jordan-mérhetőnek, ezen közös értéket pedig a halmaz *Jordan-mértékének* nevezzük. Ezt a mértéket szoktuk általános- és középiskolában területnek nevezni. Hosszúság illetve térfogat esetén analóg eljárást alkalmazhatunk.

A Jordan-mérték és a Riemann-integrál kapcsolata nagyon szoros, hiszen egy nemnegatív valós függvény pontosan akkor integrálható Riemann-szerint, ha a függvény görbéje alatti síkidom Jordan-mérhető. Ekkor a Riemann-integrál és a síkidom Jordan-mértéke megegyezik.

Ismert, hogy egy függvénysorozat határfüggvényének Riemann-integrálja csak erős feltételek esetén egyezik meg a függvénysorozat tagjainak Riemann-integráljaiból álló számsorozat határértékével. Ezért felmerült az igény egy általánosított integrálfogalomra, amelynél már jóval lazább feltétel esetén is felcserélhető az integrál és a limesz operátor. Ehhez először – a Jordan-mérték és a Riemann-integrál előbb említett kapcsolata miatt – a Jordan-mértéket kell általánosítani, majd abból kell megalkotni az új integrál fogalmát.

Ezen a területen a fő lépést *Lebesgue* tette meg a XX. század elején. A Lebesgue által alkotott mérték és integrál előnye az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, továbbá az integrál- és differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Ez az elmélet lett az alapja a modern geometriának, valószínűségszámításnak, valós függvénytannak, a Fourier-sorok elméletének és a funkcionálanalízisnek. A mértékelmélet fejlődésében fontos szerepük volt *Riesz Frigyes*, *Haar Alfréd* és *Halmos Pál* magyar matematikusoknak.

A jegyzetben található tételek bizonyításai közül csak a viszonylag rövideket és könnyen átláthatóakat közöltük. Ha a többire is kíváncsi, akkor olvassa el

Tómács Tibor: Mérték és integrál

című könyvét, amely az alábbi címről szabadon letölthető:

`https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Mertekelmelet.pdf`

Jelölések

$\square$ a bizonyítások végét jelöli (Q.E.D. jel).

$\bigcup\limits_{i\in\emptyset} A_i := \emptyset$

$\bigcap\limits_{i\in\emptyset} A_i := \emptyset$

$\sum\limits_{i\in\emptyset} a_i := 0$

$\inf\emptyset := \infty$

D_f az f függvény értelmezési tartománya.

R_f az f függvény értékkészlete.

f^{-1} az f invertálható függvény inverze.

$f(H) := \{f(x) : x \in H \cap D_f\}$, a H halmaz f függvény általi képe.

$f^{-1}(H) := \{x \in D_f : f(x) \in H\}$ a H halmaz f függvény általi őosképe.

$f \circ g$ az f és g függvényekből képzett összetett függvény, azaz $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmaza, azaz az X összes részhalmazából álló halmaz.

$\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza.

$\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza.

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n-szeres Descartes-szorzat ($n \in \mathbb{N}$).

$\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_\mathrm{b} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a valós számok bővített halmaza.

$\mathbb{R}^n_\mathrm{b} := \mathbb{R}_\mathrm{b} \times \cdots \times \mathbb{R}_\mathrm{b}$ n-szeres Descartes-szorzat ($n \in \mathbb{N}$).

(a, b) módon jelöljük a nyílt intervallumokat.

$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_\mathrm{b})$ az $\mathbb{R}^n$ ill. $\mathbb{R}^n_\mathrm{b}$ nyílt halmazainak rendszere.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n_\mathrm{b})$ az $\mathbb{R}^n$ ill. $\mathbb{R}^n_\mathrm{b}$ Borel-mérhető halmazainak rendszere.

χ_A az A indikátora.

f^+, f^- az f pozitív illetve negatív része.

$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$ az f integrálja μ mérték szerint.

$\int f \,\mathrm{d}\lambda$ az f Lebesgue-integrálja.

$\mu \otimes \nu$ a μ és ν mértékek szorzata.

λ^n az n-dimenziós Lebesgue-mérték.

$\mathcal{L}^n$ az n-dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok rendszere.

$\nu \ll \mu$ jelöli, hogy ν abszolút folytonos μ-re nézve.

$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ a μ-nek ν-re vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.

1. Mértéktér

A Jordan-mérték esetében feltételezzük a mérhető halmaz korlátosságát, így a Jordan-mérték véges minden esetben. *Az általánosítás során feltételezzük, hogy egy halmaz mértéke végtelen is lehet.* Például egy egyenes hossza végtelen. Ezért a valós számok halmazát kibővítjük a végtelennel, illetve a műveletek tulajdonságai miatt a mínusz végtelennel. Ez a két új elem önmagában semmit sem jelent, azáltal kapnak értelmet, hogy az így kibővített halmazban definiáljuk a rendezést és a műveleteket. A definíció a határértékszámításnál tanult határátmeneti szabályokkal van összhangban. Például $5 \cdot \infty$ értékét ∞-nek definiáljuk, mert ha egy sorozat 5-höz konvergál, egy másik sorozat pedig ∞-be divergál, akkor a kettő szorzata ∞-be divergál.

1.1. Definíció. Az $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt a *valós számok bővített halmazának* nevezzük, melyben a rendezést és a műveleteket a következők szerint értelmezzük:

① $-\infty < \infty$, $-\infty < c$ és $c < \infty$, ha $c \in \mathbb{R}$,
② $c + \infty = \infty + c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > -\infty$,
③ $c + (-\infty) = -\infty + c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < \infty$,
④ $c \cdot \infty = \infty \cdot c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > 0$,
⑤ $c \cdot \infty = \infty \cdot c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < 0$,
⑥ $c \cdot (-\infty) = -\infty \cdot c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > 0$,
⑦ $c \cdot (-\infty) = -\infty \cdot c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < 0$,
⑧ $\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} := 0$, ha $c \in \mathbb{R}$,
⑨ $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 := 0$ és $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 := 0$, ha a szorzótényezőként szereplő 0 nem $\frac{c}{\infty}$ vagy $\frac{c}{-\infty}$ módon áll elő, ahol $c \in \mathbb{R}$.

A következő műveleteket nem értelmezzük: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Az $\mathbb{R}_b$-beli intervallumokat illetve az $\mathbb{R}_b$-beli elemek abszolút értékét a valós esetekhez hasonlóan értelmezzük. Például $[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R}_b : x \geq 0\} = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ illetve $|\infty| = |-\infty| = \infty$.

Jelölje X a sík egy Jordan-mérhető részhalmazát. Jelölje $\mathcal{A}$ az X Jordan-mérhető részhalmazaiból álló halmazrendszert. Ekkor $\mathcal{A}$ részhalmaza az X hatványhalmazának, továbbá teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

① Az X Jordan-mérhető részhalmaza saját magának, azaz $X \in \mathcal{A}$.
② Ha A Jordan-mérhető részhalmaza X-nek akkor A komplementere is az, vagyis $\overline{A} \in \mathcal{A}$, ha $A \in \mathcal{A}$, ahol $\overline{A} = X \setminus A$.

③ Az X véges sok Jordan-mérhető részhalmazának uniója is Jordan-mérhető részhalmaza X-nek, vagyis $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A ③ tulajdonság csak véges sok halmazra teljesül a Jordan-mérhetőség esetében. *Az általánosítás során feltételezzük, hogy ③ igaz megszámlálhatóan végtelen sok mérhető halmazra is* (lásd az 1.2. definíciót).

A Jordan-mérték minden Jordan-mérhető halmazhoz egy nemnegatív számot rendel, azaz μ-vel jelölve ezt a függvényt, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty)$, melyre teljesülnek a következők:

① Az üres halmaz Jordan-mértéke 0, azaz $\mu(\emptyset) = 0$.

② Ha véges sok Jordan-mérhető részhalmazát vesszük X-nek, melyek közül bármely kettő diszjunkt, akkor azok uniójának Jordan-mértéke megegyezik a halmazok külön-külön vett Jordan-mértékeinek összegével. Azaz

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

minden $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ diszjunkt rendszer esetén.

A ② tulajdonság csak véges sok diszjunkt halmazra teljesül a Jordan-mérték esetében. *Az általánosítás során feltételezzük, hogy ② igaz megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt mérhető halmazra is, továbbá, hogy a μ értékkészletében benne lehet a ∞ is* (lásd az 1.5. definíciót).

1.2. Definíció. Legyen X egy halmaz. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert *σ-algebrának* (ejtsd: szigma-algebra) nevezzük, ha

① $X \in \mathcal{A}$,

② $\overline{A} \in \mathcal{A}$, ha $A \in \mathcal{A}$, ahol $\overline{A} = X \setminus A$,

③ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ rendezett párt *mérhető térnek*, az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

A következő tétel szerint az $\emptyset$ mérhető, megszámlálhatóan sok mérhető halmaz uniója és metszete is mérhető, továbbá mérhető halmazok különbsége is mérhető.

1.3. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Ekkor*

① $\emptyset \in \mathcal{A}$,

② $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ *esetén* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ *és* $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, ③ *$A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. ► Az ① állítás $\emptyset = \overline{X}$ miatt teljesül.

► ② feltétele esetén legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I$. Ekkor

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \quad \text{így} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}} \in \mathcal{A}.$$

► ③ feltétele mellett ② miatt $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{A}$. □

1.4. Definíció. Legyen I egy halmaz. Az A_i ($i \in I$) halmazok *diszjunkt rendszert* alkotnak, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i, j \in I$, $i \neq j$ esetén.

A következőkben minden mérhető halmazhoz rendelünk egy mértéket.

1.5. Definíció. A $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ha

① $\mu(\emptyset) = 0$ és

② $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ minden $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer esetén. Ez az ún. *σ-additivitás*.

Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$-t *mértéktérnek*, $\mu(A)$-t az *A mértékének* nevezzük. Ebben az esetben $\mathcal{A}$ elemeit *μ-mérhető halmazoknak* is szoktuk nevezni.

1.6. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

① Ha $\mu(X) < \infty$, akkor a mértékteret ill. a mértéket *végesnek* nevezzük.

② Ha $\mu(X) = 1$, akkor a mértékteret *valószínűségi mezőnek*, a mértéket *valószínűségnek*, illetve az $\mathcal{A}$ elemeit *eseményeknek* nevezzük. Ekkor szokás az X-et Ω-val és μ-t P-vel jelölni.

③ Az $A \subset X$ *σ-véges*, ha létezik $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) rendszer úgy, hogy $\mu(A_i) < \infty$ minden $i \in I$ esetén és $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

④ Ha X σ-véges, akkor a mértékteret ill. a mértéket σ-végesnek nevezzük.

⑤ Ha minden 0 mértékű halmaz összes részhalmaza mérhető, akkor a mértékteret illetve a mértéket *teljesnek* nevezzük.

⑥ Jelentse $\mu(A)$ az A halmaz elemeinek a számát minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Ekkor μ mérték, melyet *számláló mértéknek* nevezünk.

1.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor teljesülnek a következők:*

① (<u>additivitás</u>) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ diszjunkt rendszer, akkor*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

② (<u>monotonitás</u>) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

③ *Ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ és $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

④ (<u>szubadditivitás</u>) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$, akkor*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

⑤ (<u>folytonosság</u>) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, akkor*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

⑥ (<u>folytonosság</u>) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, akkor*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Bizonyítás. ► ① feltétele esetén legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I$. Ekkor a σ-additivitás és $\mu(\emptyset) = 0$ miatt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

► ② ill. ③ feltétele mellett ① miatt $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, melyből következik ② ill. ③.

► Ha $I = \emptyset$, akkor ④ állítása triviális. Ha $I \neq \emptyset$, akkor az A_i-k átindexelésével mindig elérhető, hogy $I = \mathbb{N}$ vagy $I = \{1, \ldots, n\}$ teljesüljön valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor legyen $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ $(i \in I, i > 1)$. Mivel a B_i $(i \in I)$ diszjunkt rendszer, $B_i \subset A_i$ és $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} B_i$, így az additivitás és monotonitás miatt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(B_i) \le \sum_{i\in I} \mu(A_i).$$

► ⑤ feltétele mellett legyen $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ $(i > 1)$. Ekkor a B_i $(i \in \mathbb{N})$ diszjunkt rendszer és $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, melyből az additivitás miatt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

► ⑥ feltétele mellett legyen $B_i := A_1 \setminus A_i$ $(i \in \mathbb{N})$, melyből $B_i \subset B_{i+1}$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén és

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap \overline{A_i}) = A_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = A_1 \cap \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Így ③ és ⑤ miatt

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_n)\big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

melyből következik ⑥. □

2. Külső mérték

Az előző definíciónak megfelelő mérték konstruálásához először szükségünk lesz a szubadditív függvény fogalmára. Ez egy olyan halmazrendszeren értelmezett nemnegatív értékű függvény, amelyre teljesül a következő: Tekintsünk megszámlálhatóan sok tetszőleges halmazt az értelmezési tartományból úgy, hogy az elsőnek lefedőrendszere legyen a többi, azaz az első halmaz a többi uniójának a részhalmaza. Ekkor az elsőhöz rendelt érték nem lehet nagyobb, mint a többihez rendelt értékek összege.

2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. A $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ halmazfüggvényt *szubadditívnak* nevezzük, ha

$$\nu(A) \le \sum_{i\in I} \nu(A_i)$$

minden $I \subset \mathbb{N}$, $A, A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I)$ esetén, melyekre $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ teljesül.

Ha egy ilyen szubadditív függvény értelmezési tartománya megegyezik egy halmaz hatványhalmazával, vagyis az alaphalmaz minden részhalmazához rendel valamit, akkor külső mértékről beszélünk. Az elnevezés oka később fog kiderülni.

2.2. Definíció. Ha X egy halmaz és $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ szubadditív függvény, akkor μ^*-ot *külső mértéknek* nevezzük X-en.

2.3. Tétel. *Legyen μ^* külső mérték X-en. Ekkor teljesülnek a következők:*

① $\mu^*(\emptyset) = 0$.

② (monotonitás) *Ha $A \subset B \subset X$, akkor $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.*

Bizonyítás. ► A szubadditivitás definíciójából $A = I = \emptyset$ esetén kapjuk, hogy $\emptyset \subset \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$, így $0 \le \mu^*(\emptyset) \le \sum_{i\in\emptyset} \mu^*(A_i) = 0$, melyből következik ①.

► ② feltételével legyen $I := \{1\}$ és $A_1 := B$. Ekkor $A \subset B = \bigcup_{i\in I} A_i$, így $\mu^*(A) \le$ $\le \sum_{i\in I} \mu^*(A_i) = \mu^*(B)$. □

A továbbiakban a konstrukciónkban az X-nek azon részhalmazai lesznek érdekesek, amelyek bármely más részhalmazt additívan vágnak ketté.

2.4. Definíció. Legyen μ^* külső mérték X-en. Az $A \subset X$ halmazt *μ^*-mérhetőnek* nevezzük, ha

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$$

teljesül minden $T \subset X$ esetén.

2.5. *Megjegyzés.* A szubadditivitás miatt $\mu^*(T) \le \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, ezért az előző definícióban „=” helyett „≥” is írható. Másrészt, ha $\mu^*(A) = 0$, akkor az A

halmaz μ^*-mérhető, hiszen $T \subset X$ esetén a monotonitás miatt

$$\mu^*(T) = \mu^*(A) + \mu^*(T) \geq \mu^*(\underbrace{T \cap A}_{A \supset}) + \mu^*(\underbrace{T \setminus A}_{T \supset}).$$

A következő tétel szerint a külső mérték által mérhető halmazok rendszere σ-algebrát alkot, továbbá ha a külső mértéket leszűkítjük erre a σ-algebrára, akkor teljes mértékteret kapunk.

2.6. Tétel. *Legyen μ^* külső mérték X-en, $\mathcal{A}$ az X μ^*-mérhető részhalmazainak rendszere és μ az $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése μ^*-nak. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, melyet a μ^** külső mérték által generált teljes mértéktérnek *nevezünk.*

Most már tudjuk, hogy külső mérték hogyan generál teljes mértékteret. De hogyan készítsünk külső mértéket? Ehhez induljunk ki egy tetszőleges ν halmazfüggvényből, amely az alaphalmaz bizonyos részhalmazaihoz nemnegatív értékeket rendel. Jelölje $\mathcal{H}$ a ν értelmezési tartományát. Az alaphalmaz egy tetszőleges B részhalmaza esetén tekintsük annak egy megszámlálhatóan sok halmazból álló lefedőrendszerét $\mathcal{H}$-ból. Ezután adjuk össze a lefedőrendszer tagjaihoz ν által hozzárendelt értékeket. Csináljuk ezt meg az összes lehetséges módon, majd tekintsük az így kapott halmaz infimumát. A B halmazhoz rendeljük hozzá ezt az infimum értéket. A következő tétel szerint ez a függvény külső mérték az alaphalmazon.

Például ν rendelje a sík minden sokszögéhez a területét. Ekkor $\mathcal{H}$ a sík összes sokszögének halmaza. Legyen B a sík egy tetszőleges részhalmaza, amit lefedünk megszámlálhatóan sok sokszöggel. Adjuk össze ezeknek a területeit. Csináljuk ezt meg az összes lehetséges módon, majd tekintsük az így kapott halmaz infimumát. A B halmazhoz rendeljük hozzá ezt az infimum értéket. Vegyük észre, hogy ez a hozzárendelés majdnem ugyanaz, mint a külső Jordan-mérték, annyi különbséggel, hogy B nem csak korlátos halmaz lehet, továbbá nem csak véges, hanem megszámlálhatóan végtelen sok sokszöggel is megengedjük a lefedést. Ez indokolja a külső mérték elnevezést.

2.7. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ és $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$. Ha $B \subset X$, akkor $\mathbb{K}_\nu(B)$ jelölje azon $\sum\limits_{i \in I} \nu(A_i)$ összegek halmazát, ahol $I \subset \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I)$ és*

$B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Legyen

$$\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty], \quad \mu^*(B) := \inf \mathbb{K}_\nu(B).$$

Ekkor μ^* külső mérték X-en és $\mu^*(B) \le \nu(B)$ minden $B \in \mathcal{H}$ esetén. A μ^*-ot a ν-höz tartozó külső mértéknek nevezzük.

2.8. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\mathbb{K}_\nu(B)$ definíciójában I lehet üres halmaz, így $\emptyset \subset \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$ ($A_i \in \mathcal{H}$) miatt $\sum_{i\in\emptyset} \nu(A_i) = 0 \in \mathbb{K}_\nu(\emptyset)$, azaz $\mu^*(\emptyset) = 0$. Másrészt, ha $\mathbb{K}_\nu(B) = \emptyset$, azaz B nem fedhető le $\mathcal{H}$-beli halmazokkal, akkor $\mu^*(B) = \inf \emptyset = \infty$.

Bizonyítás. $B \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(B) \in \mathbb{K}_\nu(B)$, így $\nu(B) \ge \inf \mathbb{K}_\nu(B) = \mu^*(B)$. Azt kell még belátni, hogy μ^* szubadditív, azaz ha $J \subset \mathbb{N}$, $B, B_j \subset X$ ($j \in J$), $B \subset \bigcup_{j\in J} B_j$, akkor $\mu^*(B) \le \sum_{j\in J} \mu^*(B_j)$. Ha $J = \emptyset$, akkor $\emptyset \subset \bigcup_{j\in\emptyset} B_j = \emptyset$, így a 2.8. megjegyzés miatt $0 = \mu^*(\emptyset) \le \sum_{j\in\emptyset} \mu^*(B_j) = 0$. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $J \ne \emptyset$. Ha valamely $j_0 \in J$-re $\mathbb{K}_\nu(B_{j_0}) = \emptyset$, akkor $\sum_{j\in J} \mu^*(B_j) = \infty$, így az előző egyenlőtlenség teljesül. Ha $\mathbb{K}_\nu(B_j) \ne \emptyset$ minden $j \in J$-re, akkor rögzített $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén a μ^* definíciója miatt minden $j \in J$-hez létezik $I_j \subset \mathbb{N}$ és $A_i^{(j)} \in \mathcal{H}$ ($i \in I_j$), hogy $B_j \subset \bigcup_{i\in I_j} A_i^{(j)}$ és

$$\mu^*(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \ge \sum_{i\in I_j} \nu\left(A_i^{(j)}\right). \tag{2.1}$$

Mivel $B \subset \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I_j} A_i^{(j)}$, így μ^* definíciója miatt

$$\mu^*(B) \le \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} \nu\left(A_i^{(j)}\right) \overset{\substack{(2.1)\\ \Downarrow}}{\le} \sum_{j\in J} \left(\mu^*(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \le \sum_{j\in J} \mu^*(B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j\in J} \mu^*(B_j) + \varepsilon.$$

Ebből $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $\mu^*(B) \le \sum_{j\in J} \mu^*(B_j)$. □

Az eddigiek alapján tehát egy tetszőleges halmazfüggvényből tudunk külső mértéket, abból pedig teljes mértékteret generálni.

A kiindulásul szolgáló halmazfüggvényt célszerű úgy megadni, hogy abban bizonyos halmazokra már megadjuk a kívánt mértéket, amit azután szeretnénk kiterjeszteni valódi mértékké. Az előző példában sokszögekhez a területüket rendeljük, majd ezt akarjuk kiterjeszteni további halmazokra is úgy, hogy az már mérték legyen. Vagyis azt szeretnénk, hogy a kapott mértéktérben minden sokszög mérhető legyen és a mértékük egyezzen meg a területükkel. Általánosan azt kívánjuk meg a kapott mértéktértől az előző tétel jelöléseit használva, hogy minden $\mathcal{H}$-beli halmaz μ^*-mérhető legyen és $\mathcal{H}$ minden eleméhez ν és μ^* ugyanazt rendelje. Azonban az előző tételből csak annyit tudunk biztosan, hogy $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ minden $\mathcal{H}$-beli A-ra.

A következő tétel szerint az egyenlőségnek a szükséges és elégséges feltétele, hogy ν szubadditív legyen.

2.9. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ és μ^* a ν-höz tartozó külső mérték. A $\mu^*(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$ esetén pontosan akkor teljesül, ha ν szubadditív.*

Bizonyítás. ▸ „$\Rightarrow$" Legyen $\mu^*(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$ esetén. Ebből μ^* szubadditivitása miatt ν is szubadditív.

▸ „$\Leftarrow$" Ha ν szubadditív, akkor $A, A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ és $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén $\nu(A) \leq \sum\limits_{i\in I} \nu(A_i) \in \mathbb{K}_\nu(A)$, így $\mathbb{K}_\nu(A)$-nak $\nu(A)$ alsó korlátja. Emiatt a 2.7. tétel alapján

$$\nu(A) \leq \inf \mathbb{K}_\nu(A) = \mu^*(A) \leq \nu(A),$$

azaz $\mu^*(A) = \nu(A)$. □

Még azt kell megvizsgálni, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy minden $\mathcal{H}$-beli halmaz μ^*-mérhető legyen. Ehhez szükség van a következő tételre, amely azt mondja ki, hogy $\mathcal{H}$-n értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ^* külső mérték esetén a μ^*-mérhetőséghez nem kell megvizsgálni az alaphalmaz összes részhalmazát, elég csak a $\mathcal{H}$ elemeit.

2.10. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ és μ^* a ν-höz tartozó külső mérték. A $B \subset X$ halmaz pontosan abban az esetben μ^*-mérhető, ha*

$$\nu(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

minden $A \in \mathcal{H}$ esetén.

Bizonyítás. ▸ „$\Rightarrow$" Ha $B \subset X$ μ^*-mérhető, akkor $A \in \mathcal{H}$ esetén a 2.7. tétel miatt

$$\nu(A) \geq \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

► „$\Leftarrow$" Tegyük fel, hogy $\nu(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$ minden $A \in \mathcal{H}$ esetén. Legyen $T \subset X$, $\mathbb{K}_\nu(T) \neq \emptyset$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. A μ^* definíciója miatt létezik $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$), hogy $T \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ és

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) + \varepsilon &\geq \sum_{i\in I} \nu(A_i) \geq \sum_{i\in I} \big(\mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A_i \setminus B)\big) = \\
&= \sum_{i\in I} \mu^*(A_i \cap B) + \sum_{i\in I} \mu^*(A_i \setminus B) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadditivitás}}}{\geq} \mu^*\Big(B \cap \bigcup_{i\in I} A_i\Big) + \mu^*\Big(\overline{B} \cap \bigcup_{i\in I} A_i\Big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{monotonitás}}}{\geq} \\
&\geq \mu^*(B \cap T) + \mu^*(\underbrace{\overline{B} \cap T}_{T\setminus B}).
\end{aligned}$$

Így $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $\mu^*(T) \geq \mu^*(B \cap T) + \mu^*(T \setminus B)$. Ha $\mathbb{K}_\nu(T) = \emptyset$, akkor $\mu^*(T) = \infty$ miatt az előző egyenlőtlenség ismét teljesül. Így B μ^*-mérhető. □

Az előző tételből már könnyen látható a következő állítás.

2.11. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$, μ^* a ν-höz tartozó külső mérték és $\mathcal{A}$ a μ^*-mérhető halmazok rendszere. Ekkor $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ pontosan abban az esetben teljesül, ha*

$$\nu(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

minden $A, B \in \mathcal{H}$ esetén.

2.12. Definíció. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$ és μ^* a ν-höz tartozó külső mérték. A ν-t *premértéknek* nevezzük, ha szubadditív és

$$\nu(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

minden $A, B \in \mathcal{H}$ esetén.

A következő tétel a 2.9. és 2.11. tételek következménye, amely kimondja, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a ν-ből kapott teljes mérték kiterjesztése legyen ν-nek az, hogy ν premérték legyen.

2.13. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$, μ^* a ν-höz tartozó külső mérték és $\mathcal{A}$ a μ^*-mérhető halmazok rendszere. Ekkor $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ és $\mu^*(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$ esetén pontosan akkor teljesül, ha ν premérték.*

Ez a fejezet tehát választ adott arra a kérdésre, hogyan lehet olyan mértékteret generálni, amelynek értékei néhány speciális halmazon már adottak:

2.14. Következmény. *Legyen* X *egy halmaz,* $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ *és* $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$*. A* ν*-höz tartozó külső mérték által generált* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *teljes mértéktérben* μ *pontosan akkor kiterjesztése* ν*-nek, ha* ν *premérték.*

A következő tétel azt állítja, hogy a mérték egyúttal premérték is, így minden mértéktér kiterjeszthető teljes mértéktérré.

2.15. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{H}, \nu)$ *mértéktér. Ekkor a* ν*-höz tartozó külső mérték által generált* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *teljes mértéktérre* $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ *és* $\mu(A) = \nu(A)$ *teljesül minden* $A \in \mathcal{H}$ *esetén, azaz* μ *kiterjesztése* ν*-nek. Az utóbbi mértékteret az* $(X, \mathcal{H}, \nu)$ természetes kiterjesztésének *nevezzük.*

Bizonyítás. Jelölje μ^* a ν-höz tartozó külső mértéket. A ν mérték, tehát szubadditív, így a 2.9. tétel miatt $\mu^*(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$ esetén. Így $A, B \in \mathcal{H}$ esetén a ν additivitása miatt

$$\mu^*(\underbrace{A \cap B}_{\in \mathcal{H}}) + \mu^*(\underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{H}}) = \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A),$$

azaz ν premérték. Ebből a 2.13. tétel miatt $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. □

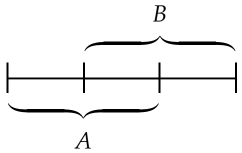
3. Lebesgue-mérték

Az előzőekben ismertetett eljárást végezzük el egy konkrét esetben. Nevezetesen a *hosszúságot* konstruáljuk meg a számegyenesen abból kiindulva, hogy a korlátos intervallumok hossza már ismert. Az $\mathbb{R}$ egyelemű részhalmazait 0 hosszúságú zárt intervallumoknak tekintjük.

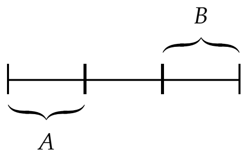
3.1. Definíció. Rendelje ν az $\mathbb{R}$ minden korlátos részintervallumához a hosszát, azaz, ha az intervallum végpontjai a és b, akkor az $|a - b|$ értéket. Legyen λ^* a ν-höz tartozó külső mérték és $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ a λ^* által generált teljes mértéktér. Ezt a mértékteret *Lebesgue-mértéktérnek*, $\mathcal{L}$ elemeit *Lebesgue-mérhető halmazoknak* és a λ-t *Lebesgue-mértéknek* nevezzük.

> **3.2. Tétel.** *Az előbb definiált ν premérték, azaz $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai Lebesgue-mérhetőek és Lebesgue-mértékük a hosszukkal egyenlő.*

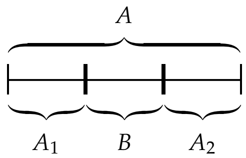
Bizonyítás. Legyen A és B az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai. Ezek kölcsönös helyzetére négy eset lehetséges.



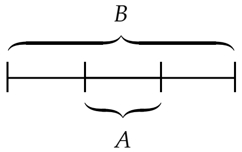
Ekkor $\lambda^*(A \setminus B) + \lambda^*(A \cap B) \overset{\substack{\text{2.7. tétel}\\ \Downarrow}}{\leq} \nu(A \setminus B) + \nu(A \cap B) = \nu(A)$.



Ekkor $\lambda^*(\underbrace{A \setminus B}_{A}) + \overbrace{\lambda^*(\underbrace{A \cap B}_{\emptyset})}^{0} = \lambda^*(A) \overset{\substack{\text{2.7. tétel}\\ \Downarrow}}{\leq} \nu(A)$.



Ekkor $\lambda^*(\underbrace{A \setminus B}_{A_1 \cup A_2}) + \lambda^*(\underbrace{A \cap B}_{B}) \overset{\substack{\text{szubadditivitás}\\ \Downarrow}}{\leq} \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) + \lambda^*(B) \overset{\substack{\text{2.7. tétel}\\ \Downarrow}}{\leq} \nu(A_1) +$
$+ \nu(A_2) + \nu(B) = \nu(A)$.



Ekkor $\overbrace{\lambda^*(\underbrace{A \setminus B}_{\emptyset})}^{0} + \lambda^*(\underbrace{A \cap B}_{A}) = \lambda^*(A) \overset{\substack{\text{2.7. tétel}\\ \Downarrow}}{\leq} \nu(A)$.

Tehát azt kaptuk, hogy $\nu(A) \geq \lambda^*(A \setminus B) + \lambda^*(A \cap B)$ minden $\mathbb{R}$-beli A, B korlátos intervallum esetén. Így ν szubadditivitása miatt egyúttal ν premérték is. Ebből a 2.13. tétel miatt kapjuk az állítást. □

> **3.3. Tétel** (Eltolás-invariancia)**.** *Legyen $r \in \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x + r$ és $A \subset \mathbb{R}$. Ekkor*
>
> $$\lambda^*\big(g(A)\big) = \lambda^*(A), \tag{3.1}$$
>
> *továbbá, ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.*

Bizonyítás. Ha A korlátos intervallum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ végpontokkal, akkor $g(A)$ is korlátos intervallum $\alpha + r$ és $\beta + r$ végpontokkal, melyből

$$\lambda^*\big(g(A)\big) = |\alpha + r - (\beta + r)| = |\alpha - \beta| = \lambda^*(A),$$

azaz ekkor (3.1) teljesül. Ha $A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges akkor legyenek $A_i \subset \mathbb{R}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) olyan korlátos intervallumok, melyekre $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Így

$$g(A) \subset g\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} g(A_i),$$

melyből a szubadditivitás miatt

$$\lambda^*\big(g(A)\big) \leq \sum_{i \in I} \lambda^*\big(g(A_i)\big) = \sum_{i \in I} \lambda^*(A_i),$$

azaz $\lambda^*\big(g(A)\big)$ alsó korlátja $\mathbb{K}_\nu(A)$-nak ($\mathbb{K}_\nu(A)$ definícióját lásd a 2.7. tételben). Így $\lambda^*\big(g(A)\big) \leq \inf \mathbb{K}_\nu(A) = \lambda^*(A)$, tehát

$$\lambda^*\big(g(A)\big) \leq \lambda^*(A). \tag{3.2}$$

A kapott eredményt alkalmazzuk A helyett $g(A)$-ra és g helyett g^{-1}-re, ahol $g^{-1}(x) = x - r$. Ekkor

$$\lambda^*\Big(\underbrace{g^{-1}\big(g(A)\big)}_{A}\Big) \leq \lambda^*\big(g(A)\big),$$

melyből (3.2) miatt adódik (3.1). Még azt kell belátni, hogy $A \in \mathcal{L}$ esetén $g(A) \in \mathcal{L}$. Legyen $T \subset \mathbb{R}$. Ekkor (3.1) miatt

$$\begin{aligned}
&\lambda^*\big(T \cap g(A)\big) + \lambda^*\big(T \setminus g(A)\big) = \lambda^*\Big(g^{-1}\big(T \cap g(A)\big)\Big) + \lambda^*\Big(g^{-1}\big(T \setminus g(A)\big)\Big) = \\
&\lambda^*\big(g^{-1}(T) \cap A\big) + \lambda^*\big(g^{-1}(T) \setminus A\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ A \in \mathcal{L}}}{=} \lambda^*\big(g^{-1}(T)\big) = \lambda^*(T),
\end{aligned}$$

melyből következik az állítás. □

3.4. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza Lebesgue-mérhető, továbbá Lebesgue-mértéke 0.*

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható számosságú halmaz. Ha $A = \emptyset$ akkor $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ha $A = \{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor A zárt intervallum, melynek a hossza 0. Így a 3.2. tétel szerint $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ebből $A = \{x_i \in \mathbb{R} : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ esetén

$A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in \mathcal{L}$, hiszen $\mathcal{L}$ σ-algebra, másrészt az additivitás miatt

$$\lambda(A) = \sum_{i \in I} \underbrace{\lambda(\{x_i\})}_{0} = 0. \qquad \square$$

A következőkben belátjuk, hogy létezik kontinuum számosságú 0 Lebesgue-mértékű halmaz is.

3.5. Definíció. A $[0, 1]$ intervallumból vonjuk ki a középső $\frac{1}{3}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_1, amely két $\frac{1}{3}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezek mindegyikéből vonjuk ki a középső $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_2, amely négy darab $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezt az eljárást folytatva, ha már definiáltuk a C_n halmazt, mely 2^n darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallum, akkor azok mindegyikéből elhagyva a középső $\frac{1}{3^{n+1}}$ hosszú nyílt intervallumot, kapjuk a C_{n+1} halmazt. Legyen $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, amit *Cantor-féle triadikus halmaznak* nevezünk.

3.6. Tétel. *A Cantor-féle triadikus halmaz kontinuum számosságú, Lebesgue-mérhető és Lebesgue-mértéke 0.*

Bizonyítás. Mivel $C \subset C_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így a külső mérték monotonitása miatt $\lambda^*(C) \leq \lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, melyből $n \to \infty$ határátmenettel $\lambda^*(C) = 0$. Így a 2.5. megjegyzés miatt $C \in \mathcal{L}$.

Most belátjuk, hogy C kontinuum számosságú. Az $x \in C$ pontosan akkor teljesül, ha az x végtelen triadikus tört alakjában a triadikus jegyek egyike sem 1. Minden $x \in C$ számhoz rendeljük azt a $0, y_1 y_2 \ldots$ diadikus törtet, melyre $y_n = \frac{x_n}{2}$ teljesül, ahol $0, x_1 x_2 \ldots$ az x végtelen triadikus tört alakja. Ez egy C-t $[0, 1]$-re képező invertálható függvény, amiből kapjuk az állítást. $\square$

A 2.6. tétel miatt a Lebesgue-mérték teljes, így $\lambda(C) = 0$ miatt a C minden részhalmaza Lebesgue-mérhető. De C kontinuum számosságú, ezért ugyanannyi részhalmaza van, mint $\mathbb{R}$-nek. Így felmerül a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, mely nem Lebesgue-mérhető? A válasz igen, pl. az ún. Vitali-féle halmaz.

3.7. Definíció. Legyen $Q := \{(x,y) : x,y \in [-1,1],\ x - y \in \mathbb{Q}\}$ és tekintsük a $[-1,1]$ intervallumnak a Q által vett osztályozását, azaz soroljunk egy osztályba két számot a $[-1,1]$ intervallumban, ha azok különbsége racionális. Ez valóban osztályozás, mert Q ekvivalencia reláció. A V halmaz tartalmazzon ezen osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet. Ekkor a V halmazt *Vitali-féle halmaznak* nevezzük.

3.8. Tétel. *A Vitali-féle halmaz nem Lebesgue-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen az $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ olyan sorozat, mely a $\mathbb{Q} \cap [-2,2]$ minden értékét pontosan egyszer veszi fel és $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_k(x) := x + r_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

► $x \in [-1,1]$ esetén létezik $y \in V$, hogy $(x,y) \in Q$, így $|x - y| \le 2$ és $x - y \in \mathbb{Q}$. Ezért létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $r_{k_0} = x - y$, azaz $x = y + r_{k_0} = g_{k_0}(y) \in g_{k_0}(V)$. Ebből

$$[-1,1] \subset g_{k_0}(V) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V).$$

Így a szubadditivitás és a 3.3. tétel miatt

$$2 = \lambda^*\big([-1,1]\big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*\big(g_k(V)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(V) \cdot n,$$

melyből $\lambda^*(V) > 0$.

► Legyen $i, j \in \mathbb{N}$, $i \ne j$ és $y \in g_i(V) \cap g_j(V)$. Ekkor létezik $x_i, x_j \in V$, hogy $y = x_i + r_i = x_j + r_j$, azaz $x_i - x_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$. Így $(x_i, x_j) \in Q$. Mivel V a Q által generált minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, ezért $x_i = x_j$. Ebből $r_i = r_j$, azaz $i = j$, ami ellentmondás. Így $g_k(V)$, $k \in \mathbb{N}$ diszjunkt rendszer.

► Most tegyük fel, hogy $V \in \mathcal{L}$. A 3.3. tétel miatt $g_k(V) \in \mathcal{L}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, így $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} g_k(V) \in \mathcal{L}$. Ha $x \in V$, akkor $g_k(x) = x + r_k \in [-3,3]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Ebből $g_k(V) \subset [-3,3]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, azaz $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} g_k(V) \subset [-3,3]$. Mindezekből a monotonitás, az additivitás és a 3.3. tétel miatt

$$6 = \lambda\big([-3,3]\big) \ge \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(g_k(V)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V) \cdot n.$$

Így $\lambda(V) = 0$, ami ellentmond $\lambda^*(V) > 0$-nak. Ebből $V \notin \mathcal{L}$. $\square$

4. Nyílt illetve Borel-mérhető halmazok

A továbbiakban szükségünk lesz az $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ illetve $\mathbb{R}_b^n := \mathbb{R}_b \times \cdots \times \mathbb{R}_b$ n-szeres Descartes-szorzatok nyílt halmazainak fogalmára. A korábbi tanulmányaink során $\mathbb{R}^n$-ben ezt már megtettük a szokásos metrika segítségével. Eszerint egy $\mathbb{R}^n$-beli halmazt nyíltnak nevezünk, ha minden pontja belső pont, azaz minden pontjának van olyan környezete, amely a halmaznak részhalmaza. Jelöljük az $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmazok rendszerét $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ módon.

Hasonlóan járhatnánk el $\mathbb{R}_b^n$-ben is, de egyszerűbb út a nyíltságot topologikus úton, metrikától függetlenül bevezetni. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy hogyan lehet ezt $\mathbb{R}^n$-ben megtenni.

4.1. Definíció. Azokat a halmazokat, amelyek előállnak n darab $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallum Descartes-szorzataként, *$\mathbb{R}^n$-beli nyílt tégláknak* nevezzük.

4.2. Tétel (Nyílt halmazok topológiája $\mathbb{R}^n$-ben)**.** *Egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz pontosan abban az esetben nyílt, ha előáll megszámlálhatóan sok $\mathbb{R}^n$-beli nyílt tégla uniójaként.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{T}$ azon $\mathbb{R}^n$-beli nyílt téglák halmazát, melyek racionális végpontú nyílt intervallumok Descartes-szorzataként állnak elő. Ekkor $\mathcal{T}$ megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Legyen $\mathcal{H} := \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : I \subset \mathbb{N} \text{ és } T_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I \right\}$ és $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Ha $N = \emptyset$, akkor $I = \emptyset$ választással kapjuk, hogy $N \in \mathcal{H}$. Ha $N \neq \emptyset$, akkor minden $x \in N$ esetén létezik $T_x \in \mathcal{T}$, melyre $x \in T_x \subset N$ teljesül, hiszen x belső pontja N-nek és $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben. Így $\bigcup_{x \in N} T_x \subset N$. Másrészt, ha $x_0 \in N$, akkor $x_0 \in T_{x_0}$, azaz $x_0 \in \bigcup_{x \in N} T_x$. Így $N \subset \bigcup_{x \in N} T_x$, amiből $N = \bigcup_{x \in N} T_x$. Mivel $\mathcal{T}$ megszámlálhatóan végtelen számosságú és $T_x \in \mathcal{T}$, ezért létezik olyan $I \subset N$ megszámlálható számosságú halmaz, melyre $\bigcup_{x \in I} T_x = \bigcup_{x \in N} T_x$. Ez azt jelenti, hogy $N \in \mathcal{H}$, melyből $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}$. Mivel a fordított tartalmazás triviálisan teljesül, így $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}$, amely az állítással ekvivalens. $\square$

A 4.2. tétel mintájára lehetőségünk van az $\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt halmazok definiálására metrika nélkül, topologikus úton.

4.3. Definíció. A következő halmazokat *$\mathbb{R}_b$-beli nyílt intervallumoknak* nevezzük:

$$\begin{aligned}(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R}_b : a < x < b\} \quad (a,b \in \mathbb{R}_b, a < b),\\ (a,\infty] &:= \{x \in \mathbb{R}_b : x > a\} \quad (a \in \mathbb{R}_b, a < \infty),\\ [-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R}_b : x < a\} \quad (a \in \mathbb{R}_b, a > -\infty),\\ [-\infty,\infty] &:= \mathbb{R}_b.\end{aligned}$$

4.4. Definíció. Azokat a halmazokat, amelyek előállnak n darab $\mathbb{R}_b$-beli nyílt intervallum Descartes-szorzataként, *$\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt tégláknak* nevezzük.

4.5. Definíció. Egy $\mathbb{R}_b^n$-beli halmazt *nyíltnak* nevezünk, ha előáll megszámlálhatóan sok $\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt tégla uniójaként. Az $\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt halmazok rendszerét $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ módon jelöljük.

A mértékelméletben fontos szerepe van a nyílt halmazoknak, viszont ezek rendszere nem alkot σ-algebrát. Így célszerű ezt a rendszert a „legkevesebb" olyan halmazzal kiegészíteni, mellyel már σ-algebrát alkot. Ezt a legszűkebb σ-algebrát megkapjuk, ha vesszük az összes olyan σ-algebra metszetét, amely tartalmazza ezt a rendszert.

4.6. Definíció. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{H}$-t tartalmazó X részhalmazaiból álló összes σ-algebra metszetét a $\mathcal{H}$ által *generált σ-algebrának* nevezzük. Jele: $\sigma(\mathcal{H})$.

4.7. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazai által generált σ-algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ módon jelöljük és elemeit az $\mathbb{R}^n$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük. Az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazai által generált σ-algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ módon jelöljük és elemeit az $\mathbb{R}_b^n$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük.

5. Mérhető függvények

Nyílt halmazon értelmezett valós függvény pontosan akkor folytonos, ha minden értékkészletbeli nyílt halmaz őse nyílt. Ennek analógiájára, egy mérhető teret mérhető térbe képező függvényt nevezzünk mérhetőnek, ha minden értékkészletbeli mérhető halmaz őséképe mérhető. Emlékeztetőül, a H halmaz f függvény általi őséképe

$$f^{-1}(H) := \{x \in D_f : f(x) \in H\},$$

azaz az f azon értelmezéstartománybeli pontjainak halmaza, melyekhez az f H-beli elemeket rendel.

5.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek és $f : A \to Y$ $(A \subset X)$. Az f *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető függvény*, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}$ esetén, azaz, ha minden mérhető halmaz őséképe mérhető.

5.2. *Megjegyzés.* Az előző definíció jelöléseivel, ha f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető függvény, akkor $Y \in \mathcal{B}$ miatt $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$, azaz f értelmezési tartománya mérhető halmaz.

A következő speciális esetben $Y = \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ és $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$.

5.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f : A \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(A \subset X)$. Az f *$\mathcal{A}$-mérhető függvény*, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ esetén, azaz, ha minden Borel-mérhető halmaz őséképe mérhető. Ha μ az $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték és f $\mathcal{A}$-mérhető, akkor azt is mondjuk, hogy f *μ-mérhető*.

Az előző definíciónak tekintsük azt a speciális esetét, amikor $X = \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ és $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$.

5.4. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$. Az f *Borel-mérhető függvény*, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$ minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ esetén, azaz, ha minden Borel-mérhető halmaz őséképe Borel-mérhető.

Definíció szerint egy függvény $\mathcal{A}$-mérhetőségéhez az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazai által generált σ-algebra elemeit kell megvizsgálni. A következő tétel azt állítja, hogy valójában elég csak az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazait vizsgálni. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára.

5.5. Lemma. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $A \in \mathcal{A}$, Y egy halmaz, $f : A \to Y$ és*

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

akkor $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér.

Bizonyítás. ▶ Mivel $f^{-1}(Y) = A \in \mathcal{A}$, ezért $Y \in \mathcal{B}$.

▶ $B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, így $f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = A \setminus$ $\setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, melyből $\overline{B} \in \mathcal{B}$.

▶ $B_i \in \mathcal{B}$ $(i \in \mathbb{N})$ esetén $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, így $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, melyből $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$. Mindezekből következik az állítás. □

5.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f : A \to \mathbb{R}_b^n$ $(A \subset X)$. Az f pontosan akkor $\mathcal{A}$-mérhető, ha $f^{-1}(H) \in \mathcal{A}$ minden $H \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazra, azaz, ha minden nyílt halmaz őségképe mérhető.*

Bizonyítás. ▶ „$\Rightarrow$” Minden $\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt halmaz eleme $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$-nek, így ez az irány triviális.

▶ „$\Leftarrow$” Az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz, ezért $f^{-1}(\mathbb{R}_b^n) = A \in \mathcal{A}$, melyből az 5.5. lemma miatt

$$\mathcal{B} := \left\{B \subset \mathbb{R}_b^n : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

σ-algebra. Legyen $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$. Ekkor $f^{-1}(H) \in \mathcal{A}$, azaz $H \in \mathcal{B}$. Ebből kapjuk, hogy $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) \subset \mathcal{B}$, azaz $\mathcal{B}$ olyan σ-algebra, mely tartalmazza $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$-t. Tehát $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n) =$ $= \sigma\left(\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)\right) \subset \mathcal{B}$, azaz $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ esetén $B \in \mathcal{B}$. Emiatt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, vagyis az f függvény $\mathcal{A}$-mérhető. □

5.7. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}_b^n$ $(H \subset \mathbb{R}_b^k)$ és $x_0 \in H$. Az f x_0-ban *folytonos*, ha minden $f(x_0)$-át tartalmazó $\mathbb{R}_b^n$-beli nyílt U halmaz esetén van olyan x_0-át tartalmazó $\mathbb{R}_b^k$-beli nyílt V halmaz, melyre $f(V) \subset U$ teljesül. Az f folytonos, ha H minden pontjában folytonos.

5.8. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}_b^k$ nyílt. Az $f : H \to \mathbb{R}_b^n$ függvény pontosan akkor folytonos, ha $f^{-1}(A)$ nyílt minden $A \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz esetén.*

Bizonyítás. ▶ „$\Rightarrow$” Legyen $A \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz. Ha $f^{-1}(A) = \emptyset$, akkor kész. Ha $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, akkor legyen $x \in f^{-1}(A)$, azaz $f(x) \in A$. Ebből a folytonosság miatt létezik olyan $V_x \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz, hogy $x \in V_x$ és $f(V_x) \subset A$. Így $f(V_x \cap H) \subset A$. Ebből $V_x \cap H \subset H$ miatt $x \in V_x \cap H \subset f^{-1}(A)$. Így

$$f^{-1}(A) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} f^{-1}(A) = f^{-1}(A), \quad \text{azaz} \quad f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H).$$

Ebből kapjuk, hogy $f^{-1}(A)$ nyílt.

► „$\Leftarrow$" Legyen $x \in H$ és $A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ olyan nyílt halmaz, melyre $f(x) \in A$. Ekkor $V = f^{-1}(A)$ választással V nyílt, $x \in V$ és $f(V) \subset A$. Így f folytonos x-ben. □

5.9. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ nyílt és $f: H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ folytonos függvény, akkor f Borel-mérhető.*

Bizonyítás. $A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz esetén az 5.8. tétel miatt $f^{-1}(A)$ nyílt, ezért $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$. Ebből az 5.6. tétel miatt f Borel-mérhető. □

A következőkben gyakran fogunk találkozni a „majdnem mindenütt" fogalommal.

5.10. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és T az X egy részhalmazán értelmezett tulajdonság. Jelölje $X(T)$ az X azon pontjainak halmazát, melyekben a T teljesül. Azt mondjuk, hogy T *μ-majdnem mindenütt* (vagy röviden majdnem mindenütt) teljesül, ha $X \setminus X(T)$ halmaz 0 mértékű. Rövidítése: *μ-m.m.* (illetve *m.m.*).

Például legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a Lebesgue-mértéktér, f a négyzetfüggvény és g a reciprokfüggvény. Ekkor $X(f < g) = (0, 1)$, hiszen $f(x) < g(x)$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in (0, 1)$. Másrészt $X(f > 0) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ezért $X \setminus X(f > 0) = \{0\}$, ami Lebesgue-szerint 0 mértékű, tehát $f > 0$ μ-m.m. teljesül.

5.11. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, $f: A \to Y$ $(A \subset X)$ és $g: H \to Y$ $(H \subset X)$. Ha g $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető és $f = g$ m.m., akkor f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető.*

5.12. Tétel. *Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ mérhető terek, $f: A \to Y$ $(A \subset X)$ és $g: B \to Z$ $(B \subset Y)$. Ha f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető és g $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-mérhető, akkor $g \circ f$ összetett függvény $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-mérhető.*

5.13. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér,* $f: A \to \mathbb{R}_b$ $(A \subset X)$ *és* $g: B \to \mathbb{R}_b$ $(B \subset X)$. *Ha* f *és* g $\mathcal{A}$*-mérhetőek, akkor* cf $(c \in \mathbb{R}_b)$, $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f+g$, fg *függvények* $\mathcal{A}$*-mérhetőek.*

A következő tételben azt vizsgáljuk, hogy egy $\mathbb{R}_b$-értékű függvény mérhetőségének vannak-e egyszerűbb átfogalmazásai.

5.14. Tétel (Mérhetőség ekvivalens megfogalmazásai). *Legyen* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér és* $f: A \to \mathbb{R}_b$ $(A \in \mathcal{A})$. *Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

① f $\mathcal{A}$*-mérhető.*
② $X(f > a) \in \mathcal{A}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*
③ $X(f < a) \in \mathcal{A}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*
④ $X(f \geq a) \in \mathcal{A}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*
⑤ $X(f \leq a) \in \mathcal{A}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*

Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor $X(f = a) \in \mathcal{A}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*

Emlékeztetőül, például $X(f > a)$ az X azon elemeinek halmazát jelöli, melyekhez az f függvény a-nál nagyobb értékeket rendel.

A valószínűségszámításban a valószínűségi változót a ③ tulajdonsággal definiáltuk. Így tehát az előző tétel alapján a valószínűségi változó P-mérhető függvényt jelent, ahol P a valószínűség.

Bizonyítás. ▶ Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor vannak olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, melyekre

$$[-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, a_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(a_n, \infty]} \quad \text{és} \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((a, \infty] \setminus (b_n, \infty]\big)$$

teljesül, azaz

$$f^{-1}\big([-\infty, a)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f^{-1}\big((a_n, \infty]\big)}, \tag{5.1}$$

$$f^{-1}\big((a, b)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(f^{-1}\big((a, \infty]\big) \setminus f^{-1}\big((b_n, \infty]\big)\Big). \tag{5.2}$$

Ha ② teljesül, akkor $X(f > a) = f^{-1}\big((a, \infty]\big) \in \mathcal{A}$ minden $a \in \mathbb{R}$-re, így (5.1) és (5.2) miatt, ha T egy $\mathbb{R}_b$-beli nyílt intervallum, akkor $f^{-1}(T) \in \mathcal{A}$. Másrészt $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b)$

esetén léteznek T_i $(i \in I \subset \mathbb{N})$ $\mathbb{R}_b$-beli nyílt intervallumok, hogy $H = \bigcup_{i \in I} T_i$, azaz $f^{-1}(H) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(T_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. Így az 5.6. tétel miatt f $\mathcal{A}$-mérhető, vagyis „② ⇒ ①”.

- ► $X(f > a) = f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ és $(a, \infty] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b)$, vagyis „① ⇒ ②”.
- ► Az „① ⇔ ③” hasonlóan bizonyítható, mint az „① ⇔ ②”.
- ► $X(f > a) = A \setminus X(f \leq a)$, vagyis „② ⇔ ⑤”. Hasonlóan teljesül „③ ⇔ ④”.
- ► Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor az előbbiek miatt ④ és ⑤ is igaz, így $X(f = a) = X(f \geq a) \cap X(f \leq a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén. □

5.15. *Megjegyzés.* Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f : X \to \mathbb{R}_b$ egy μ-mérhető függvény, akkor

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_b) \to [0, \infty], \quad \nu(B) := \mu\big(X(f \in B)\big)$$

mérték az $(\mathbb{R}_b, \mathcal{B}(\mathbb{R}_b))$ mérhető téren. Speciálisan, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mező és f egy valószínűségi változó, akkor a ν mértéket az f eloszlásának nevezzük.

6. Mérhető függvények sorozatai

A következő tétel szerint, mérhető valós értékű függvényekből álló sorozat határfüggvénye is mérhető.

6.1. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények. Ekkor $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ $\mathcal{A}$-mérhető, ahol A a konvergenciatartomány, azaz $A := \{x \in X : f_n(x) \text{ konvergens}\}$.*

6.2. *Megjegyzés.* A 6.1. tétel és az 5.2. megjegyzés miatt, ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények, akkor $\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergens}\} \in \mathcal{A}$, azaz a konvergenciatartomány mérhető.

6.3. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér és $f, f_n : X \to \mathbb{R}_b$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha az f_n-ek μ-mérhetőek minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ m.m., akkor f μ-mérhető.*

6.4. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények. Azt mondjuk, hogy *f_n μ-mértékben konvergál f-hez*, ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(X\big(|f_n - f| > \varepsilon\big)\Big) = 0$$

minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén, vagyis, ha minden pozitív ε esetén 0-hoz konvergál a mértéke azon $x \in X$ pontok halmazának, melyekre az $f_n(x)$ és az $f(x)$ távolsága nagyobb ε-nál.

Például a valószínűségszámításban a Bernoulli-féle nagy számok törvénye szerint egy véletlen esemény relatív gyakorisága valószínűségben (azaz P-mértékben) konvergál az esemény valószínűségéhez. A valószínűségszámításban ezt sztochasztikus konvergenciának is szoktuk nevezni.

A következő tétel szerint, véges mértéktér esetén a hagyományos értelemben vett konvergenciából következik a mértékben vett konvergencia.

6.5. Tétel (Lebesgue-tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ m.m., akkor f_n μ-mértékben konvergál f-hez.*

A Lebesgue-tétel megfordítása nem igaz. Vagyis mértékben vett konvergenciából önmagában még nem következik a hagyományos konvergencia majdnem mindenütt. Viszont a következő tétel szerint van olyan részsorozat, amelyre már igaz lesz az is.

6.6. Tétel (Riesz-féle kiválasztási tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények és f_n μ-mértékben konvergál f-hez, akkor f_n-nek létezik olyan f_{n_k} részsorozata, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ m.m.*

A továbbiakban ki fog derülni, hogy a mérhető függvények tulajdonságainak vizsgálata visszavezethető az ún. egyszerű függvények tulajdonságaira.

6.7. Definíció. A véges értékkészletű függvényeket *egyszerű függvényeknek* nevezzük. Speciálisan, ha X egy halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt az A *indikátorának* nevezzük.

6.8. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $A \subset X$. A χ_A függvény pontosan akkor $\mathcal{A}$-mérhető, ha $A \in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. ▶ „$\Longrightarrow$" Ha χ_A $\mathcal{A}$-mérhető, akkor $A = X(\chi_A = 1) \in \mathcal{A}$.

▶ „$\Longleftarrow$" Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X(\chi_A < a) = \emptyset$, ha $a \leq 0$, $X(\chi_A < a) = \overline{A}$, ha $0 < a \leq 1$ és $X(\chi_A < a) = X$, ha $a > 1$. Ebből $X(\chi_A < a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis χ_A $\mathcal{A}$-mérhető. □

6.9. *Megjegyzés.* Ha $s\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_b$ egyszerű függvény és $R_s = \{y_1, \dots, y_n\}$, akkor

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i},$$

ahol $A_i = X(s = y_i)$, azaz s előáll véges sok indikátor lineáris kombinációjaként. Ha s mérhető függvény, akkor az A_i $(i = 1, \dots, n)$ halmazok mérhetőek, így a χ_{A_i} $(i = 1, \dots, n)$ indikátorok is mérhetőek. Az állítás fordítottja is teljesül, azaz véges sok mérhető indikátor lineáris kombinációja mérhető egyszerű függvény.

A következő tétel szerint nemnegatív mérhető függvény mindig approximálható (közelíthető) mérhető egyszerű függvényekből álló sorozattal.

6.10. Tétel (Approximációs tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-mérhető, akkor léteznek $s_n\colon X \longrightarrow [0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-mérhető egyszerű függvények, melyekre $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ és $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $s_0\colon X \longrightarrow [0, \infty)$, $s_0 := 0$,

$$A_n := X\Big(f \geq s_{n-1} + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{és} \quad s_n := s_{n-1} + \frac{1}{n}\chi_{A_n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az s_n függvények triviálisan olyan $\mathcal{A}$-mérhető egyszerű függvények, melyekre $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ teljesül. Be fogjuk látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$. Legyen $x \in X$.

Ha $f(x) = \infty$, akkor $x \in A_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $\chi_{A_n}(x) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ebből $s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty = f(x)$.

Ha $f(x) < \infty$, akkor belátjuk, hogy végtelen sok n-re $x \notin A_n$. Ezzel ellentétben tegyük fel, hogy létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $x \in A_n$ minden $n \geq n_0$ esetén. Ebből azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = s_{n_0-1}(x) + \sum_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i} \quad \text{minden } n \geq n_0\text{-re.} \tag{6.1}$$

Így $n \geq n_0$ esetén $\infty > f(x) \overset{\overset{x\in A_n}{\Downarrow}}{\geq} s_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \overset{\overset{\chi_{A_n}(x)=1}{\Downarrow}}{=} s_n(x) \overset{\overset{(6.1)}{\Downarrow}}{=} s_{n_0-1}(x) + \sum\limits_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i}$. Ez azt jelenti, hogy $\sum\limits_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i}$ felülről korlátos, ami nem igaz. Így végtelen sok n-re $x \notin A_n$, melyből

$$f(x) < s_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.} \tag{6.2}$$

Ezután teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) \geq s_{n-1}(x). \tag{6.3}$$

$n = 1$-re triviális. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra teljesül, de $n = k + 1$-re nem teljesül (6.3). Ekkor

$$f(x) < s_k(x) = s_{k-1}(x) + \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) \underset{\underset{\text{indukciós feltétel}}{\Uparrow}}{\leq} f(x) + \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x),$$

melyből $0 < \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $\chi_{A_k}(x) = 1$, azaz $x \in A_k$. Ezt visszaírva az előző egyenlőtlenségbe, kapjuk, hogy $f(x) < s_{k-1}(x) + \frac{1}{k}$, azaz $x \notin$ $\notin A_k$, ami ellentmondás. Ezzel (6.3) bizonyított. A (6.2) és (6.3) egyenlőtlenségek alapján $0 \leq f(x) - s_{n-1}(x) < \frac{1}{n}$ végtelen sok n-re. Így létezik olyan $n_1 < n_2 <$ $< n_3 < \ldots$ pozitív egészekből álló számsorozat, hogy $0 \leq f(x) - s_{n_k-1}(x) < \frac{1}{n_k}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Ebből $\lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x) - s_{n_k-1}(x)\big) = 0$, így $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}(x) = f(x)$. Másrészt $s_n(x)$ monoton növekedő, így nem lehet egynél több torlódási pontja, melyből $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. □

Tetszőleges $f : X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény egyszerű függvényekkel történő approximálásához szükségünk lesz a függvény pozitív ill. negatív részének fogalmára.

6.11. Definíció. Az $f\colon X\to\mathbb{R}_b$ függvény *pozitív része*

$$f^+\colon X\to\mathbb{R}_b,\quad f^+(x):=\begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x)>0,\\ 0, & \text{ha } f(x)\le 0,\end{cases}$$

illetve *negatív része*

$$f^-\colon X\to\mathbb{R}_b,\quad f^-(x):=\begin{cases} -f(x), & \text{ha } f(x)<0,\\ 0, & \text{ha } f(x)\ge 0.\end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $f^+=f\chi_{X(f>0)}$, $f^-=-f\chi_{X(f<0)}$, továbbá f^+ és f^- nemnegatív függvények.

6.12. Lemma. *Legyen* $f,g\colon X\to\mathbb{R}_b$. *Ekkor*

① $f=f^+-f^-,\quad |f|=f^++f^-,$

② $f^+=\frac{1}{2}(|f|+f),\quad f^-=\frac{1}{2}(|f|-f),$

③ $(f+g)^+\le f^++g^+,\quad (f+g)^-\le f^-+g^-.$

Bizonyítás. ► ① triviálisan teljesül az f^+ és f^- definíciójából.

► ② következik ①-ből.

► ② következményeként $(f+g)^+=\frac{1}{2}(|f+g|+f+g)\le\frac{1}{2}(|f|+|g|+f+g)=f^++g^+$. Hasonlóan $(f+g)^-=\frac{1}{2}(|f+g|-f-g)\le\frac{1}{2}(|f|+|g|-f-g)=f^-+g^-$. □

A következő állítás a 6.12. lemmából és az 5.13. tételből következik.

6.13. Lemma. *Legyen* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *mértéktér és* $f\colon X\to\mathbb{R}_b$. *Az* f *pontosan akkor* μ-*mérhető, ha* f^+ *és* f^- μ-*mérhetőek.*

6.14. Lemma. *Legyen* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *mértéktér és* $f,g\colon X\to\mathbb{R}_b$ μ-*mérhető függvények. Az* $f=g$ *m.m. pontosan akkor, ha* $f^+=g^+$ *m.m. és* $f^-=g^-$ *m.m.*

Bizonyítás. A 6.13. lemma alapján f és g μ-mérhetősége miatt f^+, f^-, g^+ és g^- is μ-mérhetőek, így $X(f=g)\in\mathcal{A}$, $X(f\ne g)\in\mathcal{A}$, $X(f^+=g^+)\in\mathcal{A}$, $X(f^-=g^-)\in\mathcal{A}$, $X(f^+\ne g^+)\in\mathcal{A}$, $X(f^-\ne g^-)\in\mathcal{A}$.

► „$\Rightarrow$" Legyen $f=g$ m.m. Ekkor $x\in X(f=g)$ esetén $f(x)=g(x)$, melyből $f^+(x)=g^+(x)$, azaz $x\in X(f^+=g^+)$. Így $X(f=g)\subset X(f^+=g^+)$, vagyis

$$X(f^+\ne g^+)\subset X(f\ne g).$$

Ebből a monotonitás miatt $\mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) \leq \mu\big(X(f \neq g)\big) = 0$. Így

$$\mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) = 0,$$

azaz $f^+ = g^+$ m.m. Hasonlóan bizonyítható, hogy $f^- = g^-$ m.m.

► „$\Leftarrow$" Legyen $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m. Ekkor $x \in X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-)$ esetén $f^+(x) = g^+(x)$ és $f^-(x) = g^-(x)$, melyből $f(x) = g(x)$, azaz $x \in X(f = g)$. Így $X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-) \subset X(f = g)$, azaz

$$X(f \neq g) \subset X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-).$$

Emiatt a monotonitás és szubadditivitás alapján

$$\mu\big(X(f \neq g)\big) \leq \mu\big(X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-)\big) \leq \mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) + \mu\big(X(f^- \neq g^-)\big) = 0,$$

melyből kapjuk, hogy $\mu\big(X(f \neq g)\big) = 0$, azaz $f = g$ m.m. □

A 6.12. lemma alapján minden $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény felírható két nemnegatív mérhető függvény különbségeként, melyek az approximációs tétel értelmében előállnak egyszerű függvényekből álló függvénysorozatok határfüggvényeiként. Másrészt a 6.9. megjegyzés szerint minden egyszerű függvény előáll indikátorok lineáris kombinációjaként. Így minden $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény felírható

$$f = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\chi_{A_{ni}} - \sum_{j=1}^{l_n} b_{nj}\chi_{B_{nj}}\right)$$

alakban, ahol $k_n, l_n \in \mathbb{N}$, $a_{ni}, b_{nj} \in [0,\infty)$ és A_{ni}, B_{nj} mérhető. Mivel

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\chi_{A_{ni}} - \sum_{j=1}^{l_n} b_{nj}\chi_{B_{nj}}$$

felírható $\sum\limits_{i=1}^{h_n} c_{ni}\chi_{C_{ni}}$ alakban, ahol $c_{ni} \in \mathbb{R}$ és C_{ni} mérhető, ezért teljesül a következő állítás.

6.15. Tétel. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, akkor minden $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ $\mathcal{A}$-mérhető függvény felírható*

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{h_n} c_{ni} \chi_{C_{ni}}$$

alakban, ahol $n, h_n \in \mathbb{N}$, $c_{ni} \in \mathbb{R}$ és $C_{ni} \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \dots, h_n)$.

7. Nemnegatív mérhető függvények integrálja

A Riemann-integrál fogalmának bevezetésénél először az értelmezési tartománynak vettük egy beosztását, majd ahhoz konstruáltunk integrálközelítő összeget. Tetszőleges $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény esetén azért nem tudjuk ezt analóg módon megoldani, mert az értelmezési tartomány nem feltétlenül számhalmaz. Így először az értékkészleten készítünk beosztást, majd abból generáljuk a függvény segítségével az értelmezési tartomány egy beosztását. Ezen beosztás i-edik részhalmaza álljon azon értelmezéstartománybeli pontokból, melyekhez tartozó függvényértékek az értékkészleten vett beosztás i-edik részintervallumába esnek. Ezután a beosztás finomításával kapott integrálközelítő összegsorozat határértékeként lehetne definiálni a függvény integrálját. Viszont a beosztás finomítása helyett egyszerűbb utat kapunk, ha először csak a nemnegatív mérhető függvények körében maradunk, mert ekkor az előbbi sorozat monoton növekvő lenne a finomítással, így a határérték meg fog egyezni a pontos felső korláttal. Vagyis nemnegatív függvény esetén az integrál meg fog egyezni az összes beosztáshoz tartozó integrálközelítő összegek szuprémumával.

7.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető és

$$D_n := \left\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le y_1 < y_2 < \dots < y_n\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $y := (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D_n$, akkor legyenek

$$\begin{aligned}
A_1 &:= X(y_1 \le f < y_2),\\
A_2 &:= X(y_2 \le f < y_3),\\
&\ \ \vdots\\
A_{n-1} &:= X(y_{n-1} \le f < y_n),\\
A_n &:= X(y_n \le f).
\end{aligned}$$

Az f-nek y-hoz tartozó *integrálközelítő összege*

$$s(f,y) := \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i).$$

Az *f (μ-szerinti) integrálja*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup\big\{s(f,y) : n \in \mathbb{N}, y \in D_n\big\}.$$

Vegyük észre, hogy minden nemnegatív mérhető függvénynek létezik integrálja és értéke $[0,\infty]$-beli.

7.2. *Megjegyzés.* A definícióban szereplő A_i halmazok a legbővebb olyan diszjunkt halmazok, melyek mérhetőek és az $y_i \le f(x)$ $\forall x \in A_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ feltételnek eleget tesznek. Így

$$I_f := \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i) : n \in \mathbb{N},\ y_i \in [0,\infty)\ (i = 1,\dots,n), \right.$$
$$A_i \in \mathcal{A}\ (i = 1,\dots,n) \text{ diszjunktak és}$$
$$\left. y_i \le f(x) \text{ minden } x \in A_i\text{-re } (i = 1,\dots,n) \right\}.$$

jelöléssel $\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup I_f$.

7.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to [0,\infty]$ μ-mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Az *f A feletti integrálja*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int f \chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Az előző definícióban $f\chi_A$ μ-mérhető nemnegatív függvény, így annak integrálja definiált. Másrészt $\chi_X \equiv 1$, vagyis $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

7.4. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to [0,\infty]$ μ-mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Bizonyítás. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0,\infty)$ $(i = 1,\dots,n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak és $y_i \le f(x)\chi_A(x)$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor $y_i > 0$

és $x \in A_i$ esetén $0 < y_i \le f(x)\chi_A(x)$, azaz $\chi_A(x) > 0$, így $x \in A$. Tehát $y_i > 0$ esetén $A_i \subset A$, így $\mu(A_i) \le \mu(A) = 0$ miatt $\mu(A_i) = 0$. Ebből $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) = 0$, vagyis $I_{f\chi_A} = \{0\}$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \sup I_{f\chi_A} = 0. \qquad \square$$

7.5. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, g\colon X \to [0,\infty]$ μ-mérhető függvények.*

① (monotonitás) *Ha $f \le g$ m.m., akkor $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

② *Ha $f = g$ m.m., akkor $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.*

③ (Markov-egyenlőtlenség) *Ha $\alpha \in [0,\infty)$, akkor $\int f \,\mathrm{d}\mu \ge \alpha\mu\big(X(f \ge \alpha)\big)$.*

④ *Ha $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, akkor $f < \infty$ m.m.*

⑤ *$\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = 0$ m.m.*

⑥ (pozitív homogenitás) *Ha $\alpha \in [0,\infty)$, akkor $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

Megjegyezzük, hogy a valószínűségszámításban a Markov-egyenlőtlenségnek kiemelt szerepe van, hiszen ebből lehet bizonyítani a nagy számok gyenge törvényét.

Bizonyítás. ► ① feltételével és $H := X(f > g)$ jelöléssel $H \in \mathcal{A}$ és $\mu(H) = 0$. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0,\infty)$ $(i = 1,\dots,n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak és $y_i \le f(x)$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) \in I_f$. Másrészt $A_i \setminus H \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak és $y_i \le f(x) \le g(x)$ minden $x \in A_i \setminus H$ esetén $(i = 1,\dots,n)$, így

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i \setminus H) \in I_g.$$

De $\mu(A_i) = \mu(A_i \setminus H) + \underbrace{\mu(A_i \cap H)}_{0}$, ezért $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) \in I_g$. Ebből $I_f \subset I_g$, vagyis $\sup I_f \le \sup I_g$. Így ① teljesül.

► ② feltételével, $X(f < g) \subset X(f \ne g)$ miatt $\mu\big(X(f < g)\big) \le \mu\big(X(f \ne g)\big) = 0$. Ebből $f \ge g$ m.m., így ① miatt $\int f \,\mathrm{d}\mu \ge \int g \,\mathrm{d}\mu$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$. Mindezekből kapjuk a ② állítást.

► Ha $n = 1$, $y_1 = \alpha$ és $A_1 = X(\alpha \le f)$, akkor $\alpha\mu\big(X(\alpha \le f)\big) \in I_f$, melyből következik ③ állítása.

► Ha $K := \int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, akkor ③ miatt $\mathbb{R} \ni K \geq n\mu\big(X(f \geq n)\big) \geq n\mu\big(X(f = \infty)\big)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $\mu\big(X(f = \infty)\big) = 0$, melyből következik ④.

► $0 = \int f \,\mathrm{d}\mu$ esetén ③ miatt $0 \geq \frac{1}{n}\mu\big(X(f \geq \frac{1}{n})\big)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $\mu\big(X(f \geq \frac{1}{n})\big) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ebből a mérték folytonossága alapján

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu\left(X\left(f \geq \frac{1}{n}\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X\left(f \geq \frac{1}{n}\right)\right) = \mu\big(X(f > 0)\big) = \mu\big(X(f \neq 0)\big),$$

azaz $f = 0$ m.m. Megfordítva, ha $f = 0$ m.m., akkor $A := X(f \neq 0)$ jelöléssel $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Így $f = f\chi_A$ és a 7.4. tétel miatt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Ezzel ⑤ bizonyított.

► Legyen $\alpha \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \ldots, n)$ diszjunktak és $y_i \leq f(x)$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor $\alpha y_i \leq \alpha f(x)$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1, \ldots, n)$, így $\sum_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) \in I_f$ és $\sum_{i=1}^{n} \alpha y_i\mu(A_i) \in I_{\alpha f}$. Ebből

$$\alpha I_f := \{\alpha x : x \in I_f\} \subset I_{\alpha f},$$

ami miatt

$$\alpha \int f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \sup I_f = \sup \alpha I_f \leq \sup I_{\alpha f} = \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu. \tag{7.1}$$

Ha $\alpha > 0$, akkor $\beta := \frac{1}{\alpha}$ és $g := \alpha f$ jelöléssel (7.1) miatt $\beta \int g \,\mathrm{d}\mu \leq \int \beta g \,\mathrm{d}\mu$, azaz $\frac{1}{\alpha} \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \leq \int \frac{1}{\alpha}\alpha f \,\mathrm{d}\mu$. Ebből $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \leq \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$, így (7.1) miatt ⑥ teljesül. Ha $\alpha = 0$, akkor ⑤ miatt teljesül ⑥. Ezzel ⑥ bizonyított. □

7.6. Tétel (Beppo Levi monoton konvergencia tétele)**.** *Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n \colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvények minden $n \in \mathbb{N}$-re és $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

7.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_i \colon X \to [0, \infty]$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények. Ekkor*

$$\sum_{i\in I} \int f_i \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{i\in I} f_i\right) \mathrm{d}\mu.$$

8. Mérhető függvények integrálja

A Riemann-integrál lineáris operátor, azaz tagonként lehet integrálni és az integrálból konstans kiemelhető. A nemnegatív mérhető függvényeknél a pozitív homogenitás és a 7.7. tétel alapján hasonló tulajdonság teljesül. Tetszőleges mérhető függvény integráljánál szeretnénk megőrizni ezt a tulajdonságot. Mivel egy $\mathbb{R}_b$-beli értékű függvény mindig felírható a pozitív és negatív részének különbségeként, ezért adódik az ötlet, hogy egy ilyen függvény integrálja legyen a pozitív és negatív részek integráljának a különbsége. Mivel a pozitív és negatív részek is nemnegatív mérhető függvények, ha az eredeti függvény mérhető, ezért ebben az esetben ezek az integrálok már értelmezettek. A definícióban még arra kell ügyelni, hogy a pozitív és negatív részek integráljai ne legyenek egyszerre ∞-nel egyenlőek, mert ekkor a különbségük nem értelmezett.

8.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f : X \to \mathbb{R}_b$ μ-mérhető függvény. Azt mondjuk, hogy *f-nek létezik az integrálja*, ha

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{vagy} \quad \int f^- \, d\mu < \infty.$$

Ekkor az f *integrálja*

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Ha $\int f \, d\mu \in \mathbb{R}$, akkor f-fet *integrálhatónak* nevezzük.

Tehát megkülönböztetjük a „létezik az integrálja” és az „integrálható” fogalmakat. Az első esetben megengedjük a ∞ és $-\infty$ értékeket is, de a másodikban nem. Hasonló a különbség a „létezik a határértéke” és a „konvergens” fogalmak között.

8.2. *Megjegyzés.* $\int f \, d\mu > -\infty$ esetén $\int f^- \, d\mu \in \mathbb{R}$, illetve $\int f \, d\mu < \infty$ esetén $\int f^+ \, d\mu \in \mathbb{R}$.

Példaként megemlítjük, hogy a valószínűségszámításban egy valószínűségi változó várható értéke nem más, mint a valószínűségi változó integrálja a valószínűség szerint.

8.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}_b$ μ-mérhető függvény és $A \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy f-nek *létezik az integrálja A felett*, ha $f\chi_A$-nak létezik az integrálja, továbbá ekkor

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy f *integrálható A felett*.

8.4. *Megjegyzés.* $A = X$ választással azt kapjuk, hogy $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

8.5. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$ és $f\colon A \to \mathbb{R}_b$. Azt mondjuk, hogy f-nek *létezik az integrálja A felett*, ha az

$$f^*\colon X \to \mathbb{R}_b, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja, továbbá ekkor

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int f^* \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor f-fet *integrálhatónak* nevezzük A felett.

8.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ μ-mérhető függvény, $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ekkor f integrálható A felett, továbbá $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Bizonyítás. $\int (f\chi_A)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \,\mathrm{d}\mu = 0$ a 7.4. tétel miatt. Hasonlóan $\int (f\chi_A)^- \,\mathrm{d}\mu = 0$. Így definíció alapján kapjuk a tételt. □

8.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g\colon X \to \mathbb{R}_b$ μ-mérhetőek.*

① *Ha $f = g$ m.m. és létezik $\int f \,\mathrm{d}\mu$, akkor létezik $\int g \,\mathrm{d}\mu$ is, továbbá $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

② *f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, továbbá ekkor $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq$ $\leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.*

③ (homogenitás) *Ha létezik* $\int f \,\mathrm{d}\mu$, *akkor* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esetén létezik* $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$ *is, továbbá* $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$.

④ (additivitás) *Ha* $\int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ *értelmezett, akkor* $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$ *létezik, továbbá* $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

⑤ *Ha* $f \leq g$ *és létezik* $\int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ *(vagy létezik* $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$*), akkor létezik* $\int g \,\mathrm{d}\mu$ *(illetve* $\int f \,\mathrm{d}\mu$*) is, továbbá* $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$.

⑥ (majoráns kritérium) *Ha* $|f| \leq g$ *m.m. és* g *integrálható, akkor* f *is integrálható.*

Bizonyítás. ► ① feltételeivel $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m., így a 7.5. tétel ② pontja alapján

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Ezzel ① bizonyított.

► Az $|f|$ pontosan akkor integrálható, ha

$$\mathbb{R} \ni \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + f^-) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{7.7. tétel}}}{=} \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Ez azzal ekvivalens, hogy $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int f^- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, ami f integrálhatóságának szükséges és elégséges feltétele. Másrészt, ha f integrálható, akkor

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int f^- \,\mathrm{d}\mu\right| =$$
$$= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{7.7. tétel}}}{=} \int (f^+ + f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Ezzel ② bizonyított.

► Tegyük fel, hogy létezik $\int f \,\mathrm{d}\mu$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ha $\alpha \geq 0$, akkor a 7.5. tétel ⑥ pontja miatt

$$\int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty, \text{ ha } \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

illetve

$$\int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty, \text{ ha } \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Az $\int f \,\mathrm{d}\mu$ létezése miatt $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$, így $\int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Ezért $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$ létezik. Másrészt ekkor szintén a 7.5. tétel ⑥ pontja miatt

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int \alpha f^- \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \left(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \right) = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\alpha < 0$, akkor $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ és $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$, melyből az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, hogy létezik $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$, másrészt

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int (-\alpha f^-) \,\mathrm{d}\mu - \int (-\alpha f^+) \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \left(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \right) = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ezzel ③ bizonyított.

► Tegyük fel, hogy $S := \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ értelmezett. $S \in \mathbb{R}$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, így $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. Emiatt

$$\infty > \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + g^+) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{6.12. lemma}}}{\geq} \int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu,$$

így $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$ létezik.

$S = \infty$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu > -\infty$, így a 8.2. megjegyzés miatt

$$\infty > \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int (f^- + g^-) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{6.12. lemma}}}{\geq} \int (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu,$$

így $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$ létezik.

$S = -\infty$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$, így a 8.2. megjegyzés miatt

$$\infty > \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + g^+) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{6.12. lemma}}}{\geq} \int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu,$$

így $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$ létezik. A ④ bizonyításához még az egyenlőséget kell belátni.

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

melyből
$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$
Így
$$\int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu.$$
Ebből átrendezéssel kapjuk ④ állítását.

► Ha $f \le g$, akkor $f^+ \le g^+$ és $f^- \ge g^-$, így a 8.2. megjegyzés miatt teljesül a következő két állítás:

1) Ha létezik $\int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$, akkor $\infty > \int f^- \,\mathrm{d}\mu \ge \int g^- \,\mathrm{d}\mu$, így $\int g \,\mathrm{d}\mu$ létezik.

2) Ha létezik $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$, akkor $\infty > \int g^+ \,\mathrm{d}\mu \ge \int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, így $\int f \,\mathrm{d}\mu$ létezik.

Az ⑤ bizonyításához még az egyenlőtlenséget kell belátni. Mivel $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \le \int g^+ \,\mathrm{d}\mu$ és $-\int f^- \,\mathrm{d}\mu \le -\int g^- \,\mathrm{d}\mu$, így a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk ⑤-öt.

► ⑥ feltételeivel $g^+ \ge g^+ - g^- = g \ge |f|$ m.m., melyből $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int g^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, hiszen g integrálható. Így $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, melyből ② miatt f integrálható, azaz ⑥ teljesül. □

8.8. Tétel (Az integrál halmazok feletti additivitása). *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ diszjunktak és $A := \bigcup_{i\in I} A_i$. Ha létezik $\int f \,\mathrm{d}\mu$, akkor létezik $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ és $\int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu$ is minden $i \in I$-re, továbbá*
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I} \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Mivel $\int (f\chi_A)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_A \,\mathrm{d}\mu \le \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int (f\chi_A)^- \,\mathrm{d}\mu = \int f^- \chi_A \,\mathrm{d}\mu \le \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$, ezért létezik $\int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. Hasonlóan látható, hogy létezik $\int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu$ minden $i \in I$-re. Ezután azt bizonyítjuk, hogy
$$g\chi_A = \sum_{i\in I} g\chi_{A_i}, \tag{8.1}$$
ahol $g\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ tetszőleges függvény. Ha $x \in A$, akkor pontosan egy i_0 index létezik, melyre $x \in A_{i_0}$. Ebből $\sum_{i\in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = g(x)\chi_{A_{i_0}}(x) = g(x)\chi_A(x)$. Ha $x \notin A$,

akkor $x \notin A_i$ minden $i \in I$-re, így $\sum\limits_{i\in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = 0 = g(x)\chi_A(x)$. Ezzel (8.1) bizonyított. Most rátérünk az egyenlőség bizonyítására.

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A\,\mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_A\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\chi_A\,\mathrm{d}\mu \overset{\substack{(8.1)\\ \Downarrow}}{=}$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\int f^+\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu\right) = \sum_{i\in I}\int f\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I}\int\limits_{A_i} f\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

A következő tételben annak adjuk meg az elégséges feltételét, hogy egy mérhető függvényekből álló sorozat esetén fel lehessen cserélni az integrál és a limesz operátorokat.

8.9. Tétel (Lebesgue majorált konvergencia tétele)**.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $g, f, f_n\colon X \to \mathbb{R}_b$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények. Ha g integrálható, $|f_n| \leq g$ m.m. minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ m.m., akkor f és f_n integrálható függvények minden $n \in \mathbb{N}$-re, továbbá*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

9. Lebesgue-integrál

A Lebesgue-mérték szerinti integrált *Lebesgue-integrálnak* nevezzük. A következő tétel szerint minden Riemann-integrálható függvény egyúttal Lebesgue-integrálható is, továbbá ekkor a két integrál értéke megegyezik.

9.1. Tétel. *Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ Riemann-integrálható, akkor f Lebesgue-integrálható $[a,b]$ felett és $\int\limits_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

A tétel megfordítása nem igaz. Legyen például

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor

$$f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [0,1] \\ 0, & \text{ha } x \notin [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

jelöléssel

$$\int\limits_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int f^* \,\mathrm{d}\lambda = 1 \cdot \underbrace{\lambda\big(\mathbb{Q} \cap [0,1]\big)}_{0} + 0 \cdot \lambda\big(\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}\big) = 0.$$

Másrészt ismert, hogy f Riemann-szerint nem integrálható. Mindezek alapján tehát, a Lebesgue-integrál a Riemann-integrál általánosítása.

Fontos még megjegyezni, hogy a Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételének szoros kapcsolata van a Lebesgue-mértékkel és a folytonossággal.

9.2. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha folytonos λ-m.m. $[a,b]$-n.*

10. Mértékterek szorzata, kétszeres integrál

A valós számokon értelmezett Lebesgue-mértéket (az ún. egydimenziós Lebesgue-mértéket) az intervallumok hosszának teljes mértékké való kiterjesztésével definiáltuk. Hasonlóan járhatunk el a síkon is, ha téglalapok területét terjesztjük ki teljes mértékké. Ekkor a terület általánosítását kapjuk, amit kétdimenziós Lebesgue-mértéknek nevezünk. Vegyük észre, hogy a téglalapok felírhatók két egydimenziós Lebesgue-mérhető halmaz, nevezetesen két szakasz Descartes-szorzataként, továbbá a téglalap területe ezen két halmaz mértékeinek a szorzata. A térben a téglatestek térfogatát is kiterjeszthetjük teljes mértékké, amely a térfogat általánosítása. A téglatest felírható egy téglalap és egy szakasz Descartes szorzataként, a téglatest térfogata pedig ezen két halmaz mértékének szorzata. Ezt a két példát általánosítva, két mértéktérből a következőképpen készíthetünk egy harmadikat:

10.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek, továbbá

$$\varphi\colon \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \to [0,\infty], \quad \varphi(A \times B) := \mu(A)\nu(B).$$

Jelölje $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ a φ-hez tartozó külső mérték által generált teljes mértékteret, melyet az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek *szorzatterének* nevezzük. A $\mu \otimes \nu$ mértéket a μ és ν *mértékek szorzatának* nevezzük.

A következő tétel szerint az előbb definiált φ halmazfüggvény premérték, vagyis $\mu \otimes \nu$ a φ kiterjesztése teljes mértékké.

10.2. Tétel. *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek. Ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$, akkor $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ és $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.*

Kettőnél több mértéktérből is készíthető szorzattér rekurzió segítségével:

10.3. Definíció. Legyen $n \geq 3$ egész és $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ mértékterek $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Rekurzióval definiáljuk az

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$$

teljes mértékteret, ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n &:= (\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n, \\ \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n &:= (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n. \end{aligned}$$

A $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ teljes mértéket a μ_i-k szorzatának nevezzük. Ha $X_1 = \cdots = X_n$, $\mathcal{A}_1 = \cdots = \mathcal{A}_n$ és $\mu_i = \cdots = \mu_n$, akkor a $\mu^n := \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ és $\mathcal{A}^n := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ jelöléseket használjuk. Ugyanezt a jelölést használjuk $n = 2$ esetén is.

10.4. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$. Ekkor $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{A}^n$ és $\mu^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu(B_1) \cdots \mu(B_n)$.*

10.5. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}_b$. Tegyük fel, hogy ν-szerint majdnem minden $y \in Y$ esetén létezik a

$$g_y\colon X \to \mathbb{R}_b, \quad g_y(x) := f(x, y)$$

függvénynek az integrálja μ szerint és a

$$h\colon Y \to \mathbb{R}_b, \quad h(y) = \begin{cases} \int g_y \, d\mu, & \text{ha létezik } \int g_y \, d\mu, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja ν szerint. Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az

$$\iint f \, d\mu \, d\nu := \int h \, d\nu$$

kétszeres integrálja. Hasonlóan értelmezhető $\iint f \, d\nu \, d\mu$ is.

A következő tétel szerint mértékek szorzatára vonatkozó integrál visszavezethető kétszeres integrálra.

10.6. Tétel (Fubini-tétel)**.** *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ teljes mértékterek, továbbá $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}_b$ egy olyan függvény, mely egy σ-véges halmazon kívül eltűnik, azaz létezik olyan $H \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ-véges halmaz, hogy $f(x, y) = 0$ teljesül minden $(x, y) \in \overline{H}$-ra. Ha f-nek létezik az integrálja $\mu \otimes \nu$-szerint, akkor léteznek a kétszeres integráljai is, továbbá*

$$\int f \, d(\mu \otimes \nu) = \iint f \, d\mu \, d\nu = \iint f \, d\nu \, d\mu.$$

11. Többdimenziós Lebesgue-mérték

11.1. Definíció. Az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ $(n \geq 2)$ mértékteret *n-dimenziós Lebesgue-mértéktérnek*, λ^n-net pedig *n-dimenziós Lebesgue-mértéknek* nevezzük. A Lebesgue-mértéket szokás *egydimenziós Lebesgue-mértéknek* is nevezni.

A következő tétel a 10.4. tétel speciális esete.

11.2. Tétel. *Ha $B_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1, \dots, n)$, akkor $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{L}^n$, továbbá*

$$\lambda^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = \lambda(B_1) \cdots \lambda(B_n).$$

11.3. Tétel. *Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ minden Borel-mérhető részhalmaza λ^n-mérhető.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^n$-beli nyílt téglák λ^n-mérhetőek a 11.2. tétel miatt, így a 4.2. tétel alapján $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ esetén $N \in \mathcal{L}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ az $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$-et tartalmazó legszűkebb σ-algebra, így $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^n$ miatt, mivel $\mathcal{L}^n$ σ-algebra, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^n$ teljesül. □

A következő tétel szerint geometriai értelemben λ a hosszúság, λ^2 a terület, λ^3 pedig a térfogat általánosítása.

11.4. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ Jordan-mérhető, akkor λ^n-mérhető is, továbbá a Jordan-mértéke $\lambda^n(H)$-val egyenlő.*

Az n-dimenziós Lebesgue-mérhetőség és -mérték – hasonlóan az egydimenziós esethez – invariáns az eltolásra.

11.5. Tétel (Eltolás-invariancia)**.** *Legyen $r \in \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) := x + r$. Ha $A \in \mathcal{L}^n$, akkor $g(A) \in \mathcal{L}^n$ és $\lambda^n\big(g(A)\big) = \lambda^n(A)$.*

A Riemann-integrál nemnegatív függvény esetén a függvény alatti síkidom Jordan-mértékével egyezik meg. A következő tétel szerint hasonló igaz a Lebesgue-integrálra is, azaz, ha f nemnegatív Lebesgue-mérhető függvény, akkor az f görbéje alatti síkidom területe az f Lebesgue-integráljával egyezik meg:

11.6. Tétel. *Ha $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ λ-mérhető, akkor*

$$H := \big\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \le y < f(x)\big\} \in \mathcal{L}^2,$$

továbbá

$$\lambda^2(H) = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

12. Mértékek deriváltja

Ha $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor a Newton – Leibniz-tétel alapján

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén, ahol $f(x)$ az F deriváltját jelöli az $x \in \mathbb{R}$ helyen. Ennek analógiájára, ha μ és ν mértékek ugyanazon a mértéktéren és f egy olyan függvény, melyre $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \nu(A)$ teljesül minden mérhető A halmaz esetén, akkor az f függvényt nevezhetnénk a ν deriváltjának μ szerint. Ehhez hasonló kapcsolatot fogalmaz meg a következő állítás, amely a 7.4. és 8.8. tételek következménye:

12.1. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvény és*

$$\nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ekkor $(X, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér.

Ebben a tételben a μ és f segítségével állítottuk elő a ν-t. Azonban a bevezetés alapján nekünk a μ és ν segítségével kellene előállítani f-fet. A kérdés tehát, hogy ennek a tételnek mikor igaz a megfordítása, azaz egy mérték mikor áll elő egy nemnegatív mérhető függvény integráljaként? Pontosabban, ha μ és ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, akkor milyen feltétellel létezik olyan $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvény, hogy $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$ esetén?

Ennek egy szükséges feltételét adja a 7.4. tétel, miszerint ha $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$. Ezt a tulajdonságot abszolút folytonosságnak nevezzük:

12.2. Definíció. Legyenek μ ill. ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ esetén $\nu(A) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy *ν abszolút folytonos* μ-re nézve. Jele: $\nu \ll \mu$.

A Radon – Nikodym-tétel kimondja, hogy σ-véges mértékek esetén az abszolút folytonosság egyben elégséges feltétel is.

12.3. Tétel (Radon – Nikodym-tétel)**.** *Legyenek μ ill. ν σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\nu \ll \mu$, akkor létezik $f\colon X \to [0, \infty)$ μ-mérhető függvény, melyre*

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

teljesül minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Az f μ-m.m. egyértelműen meghatározott, azaz ha g is hasonló tulajdonságú, akkor $f = g$ μ-m.m. Az f függvényt ν-nek μ-re vonatkozó Radon – Nikodym-deriváltjának *nevezzük és $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ módon jelöljük.*

Például a valószínűségszámításban egy abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nem más, mint az eloszlásának (lásd az 5.15. megjegyzést) a Radon – Nikodym-deriváltja a Lebesgue-mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re vett leszűkítésére vonatkozóan.

A Radon – Nikodym-derivált klasszikus értelemben vett derivált jellegét jól mutatja a következő tétel, amely az összetett függvények deriváltjára vonatkozó szabály analógiája.

12.4. Tétel (Láncszabály)**.** *Legyenek μ, ν és κ σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\mu \ll \nu$ és $\nu \ll \kappa$, akkor $\mu \ll \kappa$ és $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\kappa} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\kappa}$ κ-m.m.*

Irodalomjegyzék

[1] Daróczy Zoltán: *Mérték és integrál*, Tankönyvkiadó, 1984.

[2] D. H. Fremlin: *Measure Theory*, Biddles Short Run Books, King's Lynn, 2000.

[3] Paul R. Halmos: *Mértékelmélet*, Gondolat, 1984.

[4] Járai Antal: *Mérték és integrál*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.

[5] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, 1981.

[6] Laczkovich Miklós: *Valós függvénytan*, ELTE jegyzet, Budapest, 1995.

[7] Rimán János: *Matematikai analízis I. kötet*, EKF Líceum Kiadó, Eger, 2006.

[8] Rimán János: *Matematikai analízis II. kötet*, EKF Líceum Kiadó, Eger, 2006.

[9] Tómács Tibor: *Mérték és integrál*, `https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Mertekelmelet.pdf`