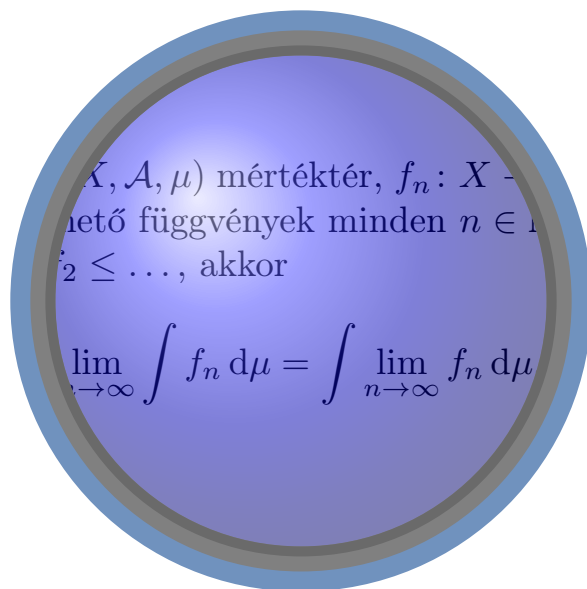


Tómacs Tibor

Mérték és integrál





Tómacs Tibor

Mérték és integrál

EGER, 2025. ÁPRILIS 16.

Tartalomjegyzék

Előszó	6
Általános jelölések	7
1. Mérték	8
1.1. A valós számok bővített halmaza	8
1.2. Mértéktér	12
1.3. Jordan-mérték	14
2. Mérték konstruálása	19
2.1. Külső mérték	19
2.2. Nevezetes halmazrendszerek	25
2.2.1. Félgyűrű	25
2.2.2. Halmazgyűrű	26
2.2.3. Halmazalgebra	27
2.2.4. σ -gyűrű	28
2.2.5. Monoton osztály	30
2.3. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel	32
2.4. Lebesgue-mérték	36
2.5. Lebesgue–Stieltjes-mérték	40
2.6. Hausdorff-mérték	44
3. Borel-mérhető halmazok	52
4. Mérhető függvények	61
4.1. Mérhető függvények tulajdonságai	61
4.2. Mérhető függvények sorozatai	66
5. Integrál	73
5.1. Nemnegatív mérhető függvények integrálja	73
5.2. Mérhető függvények integrálja	78
5.3. Komplex értékű függvények integrálja	84
5.4. Riemann-integrál	86
5.5. Lebesgue-integrál	93

6. Mértékterek szorzata	98
6.1. Kétszeres integrál, Fubini-tétel	98
6.2. Többdimenziós Lebesgue-mérték	106
7. Mértékek deriváltja	119
8. Valószínűség	125
8.1. Valószínűségi mező	125
8.2. Valószínűségi változó	131
8.3. Valószínűségi vektorváltozó	136
8.4. Valószínűségi változók függetlensége	144
8.5. Várható érték	154
8.6. Etemadi-féle nagy számok erős törvénye	161
8.7. Karakterisztikus függvény	165
8.8. Gyenge konvergencia	170
8.9. Központi határeloszlás tétele	177
Irodalomjegyzék	179
A könyvben bevezetett jelölések	180
Tárgymutató	181

Előszó

A hosszúság, terület, térfogat, ívhossz, felszín, egyszerű geometriai alakzatokra már az ókorban definiáltak és számolhatóak voltak. A terület és a térfogat fogalmát először PEANO és JORDAN terjesztette ki a sík illetve a tér részhalmazainak egy bővebb rendszerére a XIX. század végén. Eszerint egy síkbeli korlátos halmaz külső mértéke legyen az őt lefedő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos alsó korlátja, belső mértéke pedig a benne fekvő véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos felső korlátja. Ha ezek egyenlőek, akkor a halmazt mérhetőnek, ezen közös értéket pedig a halmaz mértékének nevezzük. Térfogat esetén hasonló az eljárás.

Ez a mértékfogalom egyszerű, de a Riemann-integrál általánosítására – aminek a szükségességét az integrál és a határérték felcserélésével kapcsolatos problémák indokolták – nem megfelelő. Ezen a területen a fő lépést HENRY LEON LEBESGUE tette meg a XX. század elején. Az általa létrehozott mértékfogalom már nem csak véges sok halmazra additív – ahogy ez a Jordan-mérték esetében igaz –, hanem megszámlálhatóan végtelen sok halmazra is. A nemnegatív függvények integrálját a függvény grafikonja alatti halmaz mértékeként definiálta.

A Lebesgue által alkotott mérték és integrál előnye az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, továbbá az integrál- és differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Ez az elmélet lett az alapja a modern geometriának, valószínűségszámításnak, valószínűségelméletnek, a Fourier-sorok elméletének és a funkcionálanalízisnek.

Ebben a könyvben a Lebesgue-mértéket nem a Borel-mérhető halmazok rendszerén, hanem az attól bővebb, külső mérték által mérhető halmazok rendszerén értelmezzük. Ha ez gondot okoz, mint például a valószínűség esetén, akkor azt külön jelezzük. A mértékek szorzatát általánosságban szintén a külső mérték által mérhető halmazok rendszerén értelmezzük, nem pedig generált σ -algebrán. Azonban a valószínűségnél felmerülő gondok miatt mértékek szorzatát a Caratheodory-féle kiterjesztési tétel segítségével, generált σ -algebrán is megadjuk. A Fubini-tételt mindkét esetre bizonyítjuk. A „Valószínűség” című fejezetnek a fő célja – azon túl, hogy nem geometriai jellegű mértékre is lássunk példát –, a mértékelmélet ismerete nélkül tanult valószínűségszámításbeli homályos részek tisztázása.

A könyv írásakor sok hasznos tanácsot kaptam BALKA RICHÁRD kollégámtól, akinek ezúton is szeretném ezt megköszönni.

A szerző

Általános jelölések

$\square$ bizonyítás vége jel

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \bigcup_{i \in \emptyset} A_i := \emptyset$$

$\mathcal{H} \cap A := \{H \cap A : H \in \mathcal{H}\}$, ahol $\mathcal{H}$ halmazrendszer és A halmaz

D_f az f függvény értelmezési tartománya

R_f az f függvény értékkészlete

f^{-1} az f invertálható függvény inverze

$f(H) := \{f(x) : x \in H \cap D_f\}$, a H halmaz f függvény általi képe

$f^{-1}(H) := \{x \in D_f : f(x) \in H\}$ a H halmaz f függvény általi ősképe

$\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmaza

$\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza

$\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza

$\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza

$\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza

i az imaginárius egység

(a, b) módon jelöljük a nyílt intervallumokat

$[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ egész része

$\{x\} := x - [x]$ az $x \in \mathbb{R}$ tört része

A könyv további részeiben bevezetett jelölések a könyv végén külön fejezetben vannak összefoglalva.

1. fejezet

Mérték

1.1. A valós számok bővített halmaza

A Jordan-mérték esetében feltételezzük a mérhető halmaz korlátosságát, így a Jordan-mérték véges minden esetben. Az általánosítás során feltételezzük, hogy egy halmaz mértéke végtelen is lehet. Például egy egyenes hossza végtelen. Ezért a valós számok halmazát kibővítjük a végtelennel, illetve a műveletek tulajdonságai miatt a mínusz végtelennel. Ez a két új elem önmagában semmit sem jelent, azáltal kapnak értelmet, hogy az így kibővített halmazban definiáljuk a rendezést és a műveleteket.

1.1. Definíció. $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a *valós számok bővített halmaza*, melyben a rendezést és a műveleteket a következők szerint értelmezzük:

- ① $-\infty < \infty$, $-\infty < c$ és $c < \infty$, ha $c \in \mathbb{R}$,
- ② $c + \infty = \infty + c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > -\infty$,
- ③ $c + (-\infty) = -\infty + c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < \infty$,
- ④ $c \cdot \infty = \infty \cdot c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > 0$,
- ⑤ $c \cdot \infty = \infty \cdot c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < 0$,
- ⑥ $c \cdot (-\infty) = -\infty \cdot c := -\infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c > 0$,
- ⑦ $c \cdot (-\infty) = -\infty \cdot c := \infty$, ha $c \in \mathbb{R}_b$ és $c < 0$,
- ⑧ $\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} := 0$, ha $c \in \mathbb{R}$,
- ⑨ $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 := 0$ és $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 := 0$, ha a szorzótényezzőként szereplő 0 nem $\frac{c}{\infty}$ vagy $\frac{c}{-\infty}$ módon áll elő, ahol $c \in \mathbb{R}$.

A következő műveleteket nem értelmezzük:

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{-\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

Az $\mathbb{R}_b$ -beli intervallumokat illetve az $\mathbb{R}_b$ -beli elemek abszolút értékét a valós esetekhez hasonlóan értelmezzük. Például

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R}_b : x \geq 0\} = [0, \infty) \cup \{\infty\},$$

$$|\infty| = |-\infty| = \infty.$$

Az $\mathbb{R}_b$ -értékű sorozatok határértékét ill. torlódási pontját szintén a valós esethez hasonlóan definiáljuk. Azaz $a_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$) és $a \in \mathbb{R}$ esetén

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$.
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > K \ \forall n \geq N$.
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n < K \ \forall n \geq N$.
- ④ Az a_n sorozatnak az a torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$ végtelen sok n -re.
- ⑤ Az a_n sorozatnak a ∞ torlódási pontja, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $a_n > K$ végtelen sok n -re.
- ⑥ Az a_n sorozatnak a $-\infty$ torlódási pontja, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ esetén $a_n < K$ végtelen sok n -re.

1.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}_b$. Ekkor

$$\sup H := \min\{k \in \mathbb{R}_b : k \geq x \ \forall x \in H\},$$

$$\inf H := \max\{k \in \mathbb{R}_b : k \leq x \ \forall x \in H\}.$$

1.3. *Megjegyzés.* $H = \emptyset$ esetén $\{k \in \mathbb{R}_b : k \geq x \ \forall x \in H\} = \{k \in \mathbb{R}_b : k \leq x \ \forall x \in H\} = \mathbb{R}_b$, így $\inf \emptyset = \infty$ és $\sup \emptyset = -\infty$.

1.4. Definíció. Legyen $a_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor

$$\sup_{k \geq n} a_k := \sup\{a_k : k \geq n\}, \quad \sup_k a_k := \sup_{k \geq 1} a_k,$$

$$\inf_{k \geq n} a_k := \inf\{a_k : k \geq n\}, \quad \inf_k a_k := \inf_{k \geq 1} a_k,$$

$$\overline{\lim} a_n := \inf_n \sup_{k \geq n} a_k \quad (\textit{limesz superior}),$$

$$\underline{\lim} a_n := \sup_n \inf_{k \geq n} a_k \quad (\textit{limesz inferior}).$$

1.5. *Megjegyzés.* Legyen $a_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$). Könnyen látható, hogy ha $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, akkor létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$. Hasonlóan, ha $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, akkor létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$.

1.6. *Megjegyzés.* Az előző definícióban $b_n := \inf_{k \geq n} a_k$ monoton növekvő sorozat, illetve $c_n := \sup_{k \geq n} a_k$ monoton csökkenő sorozat, így az előző megjegyzésből

$$\underline{\lim} a_n = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k, \tag{1.1}$$

$$\overline{\lim} a_n = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k. \tag{1.2}$$

1.7. Tétel. $\overline{\lim} a_n$ az a_n sorozat legnagyobb torlódási pontja, illetve $\underline{\lim} a_n$ az a_n sorozat legkisebb torlódási pontja.

Bizonyítás. Legyen $a := \overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy a nem torlódási pontja az a_n sorozatnak. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - a| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Ha $n \geq N$ rögzített, akkor $|a_k - a| \geq \varepsilon \quad \forall k \geq n$, melyből $|\sup_{k \geq n} a_k - a| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq N$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \neq a$, ami ellentmondás (1.2) miatt. Tehát a torlódási pont.

Most tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén $a_n > a + \varepsilon$ végtelen sok n -re. Ekkor $\sup_{k \geq n} a_k > a + \varepsilon$ végtelen sok n -re, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \neq a$, ami ellentmondás (1.2) miatt. Ezzel bizonyítottuk, hogy $a_n > a + \varepsilon$ csak véges sok n -re teljesülhet, azaz a az a_n legnagyobb torlódási pontja.

Most tegyük fel, hogy $\lim a_n = \infty$ és hogy a_n -nek nem torlódási pontja a ∞ , azaz létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \leq K \quad \forall n \geq N$. Ekkor rögzített $n \geq N$ esetén $a_k \leq K \quad \forall k \geq n$, így $\sup_{k \geq n} a_k \leq K \quad \forall n \geq N$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \neq \infty$, ami ellentmondás (1.2) miatt. Tehát ∞ az a_n torlódási pontja, ami értelemszerűen csak a legnagyobb torlódási pont lehet.

A tétel másik állítása hasonlóan bizonyítható. □

1.8. Megjegyzés. $a, b_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén $\overline{\lim}(a + b_n) = \inf_n \sup_{k \geq n} (a + b_k) = \inf_n \left(a + \sup_{k \geq n} b_k \right) = a + \inf_n \sup_{k \geq n} b_k = a + \overline{\lim} b_n$. Hasonlóan $\underline{\lim}(a + b_n) = a + \underline{\lim} b_n$.

1.9. Tétel. Ha $a_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}_b$ teljesül, akkor $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = a$.

Bizonyítás. $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \implies a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \implies a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf_{k \geq n} a_k < a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = a \implies (1.1) \text{ miatt } \underline{\lim} a_n = a$.

$a = \infty$ esetén $\forall K \in \mathbb{R}_+$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > 2K \quad \forall n \geq N \implies \inf_{k \geq n} a_k \geq 2K > K \quad \forall n \geq N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \infty \implies (1.1) \text{ miatt } \underline{\lim} a_n = \infty$. A tétel többi állítását hasonlóan bizonyíthatjuk az előzőekhez. □

1.10. Tétel. Legyen $a_n \in \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\overline{\lim} |a_n| = 0$ pontosan abban az esetben teljesül, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” (1.2) miatt $\overline{\lim} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |a_k| = 0 \Rightarrow \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n| \leq \sup_{k \geq n} |a_k| < \varepsilon \forall n > N \Rightarrow$ állítás.

► „ $\Leftarrow$ ” $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow$ 1.9. tétel miatt $\overline{\lim} |a_n| = 0$. $\square$

1.11. Definíció. Legyen I egy halmaz és $c_i \in [0, \infty] \forall i \in I$.

① Ha $I = \emptyset$, akkor $\sum_{i \in I} c_i := 0$.

② Ha $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, akkor $\sum_{i \in I} c_i := c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_n}$.

③ Ha I végtelen, akkor $\sum_{i \in I} c_i := \sup \left\{ \sum_{i \in I^*} c_i : I^* \text{ véges részhalmaza } I\text{-nek} \right\}$.

1.12. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{N}$, $c_i \in [0, \infty] \forall i \in I$ és $I_n = \{i \in I : i \leq n\}$, akkor

$$\sum_{i \in I} c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} c_i.$$

Bizonyítás. Ha az I üres halmaz, akkor az állítás triviális. Ellenkező esetben legyen $H := \left\{ \sum_{i \in I^*} c_i : I^* \subset I, I^* \text{ véges} \right\}$, $J \subset I$ véges nem üres halmaz és $m := \max J$. Ha $J \neq I_m$, akkor $\sum_{i \in J} c_i \leq \sum_{i \in I_m} c_i$ és $\sum_{i \in I_m} c_i \in H$. Ebből következik, hogy $\sum_{i \in I} c_i = \sup H = \sup \left\{ \sum_{i \in I_n} c_i : n \in \mathbb{N} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \sum_{i \in I_n} c_i \text{ mon. n.ő}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} c_i$. $\square$

1.13. Definíció. Legyen I egy halmaz, $c_i \in \mathbb{R}_b \forall i \in I$,

$$I_+ := \{i \in I : c_i > 0\} \quad \text{és} \quad I_- := \{i \in I : c_i < 0\}.$$

Ha $\sum_{i \in I_+} c_i < \infty$ vagy $\sum_{i \in I_-} (-c_i) < \infty$, akkor legyen

$$\sum_{i \in I} c_i := \sum_{i \in I_+} c_i - \sum_{i \in I_-} (-c_i).$$

Használni fogjuk a következő jelöléseket is:

$$\sum_{i=1}^n c_i := \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} c_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i := \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i.$$

1.14. Tétel. Ha $c_i \in \mathbb{R}_b \forall i \in \mathbb{N}$ és $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ létezik, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i$.

Bizonyítás. Legyen $I_{n+} := I_+ \cap \{1, \dots, n\}$ és $I_{n-} := I_- \cap \{1, \dots, n\}$. Az előző tétel miatt $\sum_{i \in I_+} c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n+}} c_i$ és $\sum_{i \in I_-} (-c_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i \in I_+} c_i - \sum_{i \in I_-} (-c_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I_{n+}} c_i - \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i. \quad \square$$

A következő tétel szerint a klasszikus analízisben definiált feltételesen konvergens sorok összege az előző értelemben nem létezik.

1.15. Tétel. *Ha $c_i \in \mathbb{R}_b \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |c_i| = \infty$, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ az előző értelemben nem létezik.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ az előző értelemben létezik. Ekkor a korábbi jelöléseket használva

$$\sum_{i \in I_+} c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n+}} c_i \in \mathbb{R} \quad \text{vagy} \quad \sum_{i \in I_-} (-c_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \in \mathbb{R}.$$

Másrészt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |c_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I_{n+}} c_i + \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n+}} c_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) = \infty$, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n+}} c_i = \infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) = \infty.$$

Mindezekből kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I_{n+}} c_i - \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n+}} c_i - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i) \in \{-\infty, \infty\}$, ami ellentmondás. $\square$

1.2. Mértéktér

A mérték az alaphalmaz bizonyos részhalmazaihoz nemnegatív valós számot vagy ∞ -t rendel. Kérdés, hogy milyen rendszert alkossanak a mértékkal rendelkező (mérhető) halmazok és a mértéknek milyen alaptulajdonságai legyenek?

1.16. Definíció. Legyen X egy halmaz. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert *σ -algebrának* nevezzük, ha

- ① $X \in \mathcal{A}$,
- ② $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$,
- ③ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A} \ (i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ rendezett párt *mérhető térnek*, az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

1.17. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Ekkor*

- ① $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- ② $A_i \in \mathcal{A} \ (i \in I \subset \mathbb{N})$ esetén $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ és $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$,
- ③ $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Bizonyítás. ► Az ① állítás $\emptyset = \overline{X}$ miatt teljesül.

► ② feltétele mellett legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I \implies \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \implies$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \in \mathcal{A} \implies \textcircled{2}.$$

► ③ feltétele mellett $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{A} \implies \textcircled{3}.$

□

1.18. Definíció. Legyen I egy halmaz. Az A_i ($i \in I$) halmazok *diszjunkt rendszert* alkotnak, ha $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in I, i \neq j$ esetén.

1.19. Definíció. A $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ha

① $\mu(\emptyset) = 0$, és

② $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \forall A_i \in \mathcal{A} (i \in \mathbb{N})$ diszjunkt rendszerre. Ez az úgynevezett *σ -additivitás*.

Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ -t *mértéktérnek*, $\mu(A)$ -t az A mértékének nevezzük.

1.20. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

① Ha $\mu(X) < \infty$, akkor a mértékteret ill. a mértéket *végesnek* nevezzük.

② Az $A \subset X$ *σ -véges*, ha $\exists A_i \in \mathcal{A} (i \in I \subset \mathbb{N})$ rendszer úgy, hogy $\mu(A_i) < \infty \forall i \in I$ és $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

③ Ha X σ -véges, akkor a mértékteret ill. a mértéket σ -végesnek nevezzük.

④ Ha minden 0 mértékű halmaz összes részhalmaza mérhető, akkor a mértékteret ill. a mértéket *teljesnek* nevezzük.

⑤ Jelentse $\mu(A)$ az A halmaz elemeinek a számát $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén. Könnyen látható, hogy μ mérték, melyet *számláló mértéknek* nevezünk.

1.21. Megjegyzés. Ha $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$, $\mu(\emptyset) = \mu(\{2, 3\}) = 0$ és $\mu(X) = \mu(\{1\}) = \infty$, akkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nem teljes és nem σ -véges mértéktér.

1.22. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

① (additivitás) Ha $A_i \in \mathcal{A} (i \in I \subset \mathbb{N})$ diszjunktak, akkor $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

② (monotonitás) Ha $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$.

③ Ha $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ és $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

④ (szubadditivitás) Ha $A_i \in \mathcal{A} (i \in I \subset \mathbb{N})$, akkor $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

⑤ (folytonosság) Ha $A_i \in \mathcal{A} (i \in \mathbb{N}), A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

⑥ (folytonosság) Ha $A_i \in \mathcal{A} (i \in \mathbb{N}), A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $\mu(A_k) < \infty$ valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Bizonyítás. ► ① feltétele mellett legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I \implies \mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) =$
 $= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \underset{\mu(\emptyset)=0}{=} \sum_{i \in I} \mu(A_i) \implies \textcircled{1}.$

► ② ill. ③ feltétele mellett $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) \underset{\text{add.}}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \implies \textcircled{2} \text{ ill. } \textcircled{3}.$

► ④ feltétele mellett, átindexeléssel mindig elérhetjük, hogy $I = \mathbb{N}$ vagy $\exists n \in \mathbb{N}$,
hogy $I = \{1, \dots, n\}$. Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ ($i \in I$). Ekkor a B_i ($i \in I$) diszjunkt
rendszer, $B_i \subset A_i$ és $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B_i \implies \mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \underset{\text{add.}}{=} \sum_{i \in I} \mu(B_i) \underset{\text{mon.}}{\leq} \sum_{i \in I} \mu(A_i) \implies \textcircled{4}.$

► ⑤ feltétele mellett legyen $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ ($i > 1$). Ekkor a B_i ($i \in \mathbb{N}$)
diszjunkt rendszer és $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \underset{\text{add.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \underset{\text{add.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$

► ⑥ bizonyításában feltehetjük, hogy a feltételben szereplő k értéke 1, ugyanis
ellenkező esetben az első $k - 1$ halmaz elhagyásával sem a halmazok metszete sem a
halmazok mértékeiből álló sorozat határértéke nem változik. Legyen $B_i := A_1 \setminus A_i$
($i \in \mathbb{N}$) $\implies B_i \subset B_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap \overline{A_i}) = A_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = A_1 \cap \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} =$
 $= A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \implies \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\textcircled{3}}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \underset{\textcircled{5}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \underset{\textcircled{3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) -$
 $- \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \implies \textcircled{6}. \quad \square$

A következő tétel a mértéktér és a teljesség definíciója alapján triviálisan teljesül.

1.23. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $Y \in \mathcal{A}$. Legyen $\mathcal{A}_Y$ az összes olyan mérhető halmaz összessége, mely Y -nak részhalmaza és μ_Y legyen a μ leszűkítése $\mathcal{A}_Y$ -ra. Ekkor $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ szintén mértéktér, melyet az eredeti tér Y -hoz tartozó **alterének** nevezünk. Ha az eredeti tér teljes, akkor az altere is az.*

1.3. Jordan-mérték

Ebben a részben azt taglaljuk, hogy a bevezetőben említett Jordan-mérték miért nem felel meg az előzőekben bevezetett mérték fogalmának. Előtte ismételjük át a Jordan-mérték fogalmát és tulajdonságait.

1.24. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és $T := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ olyan zárt téglalap, melyre $H \subset T$ teljesül. Legyen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_s = d$, $D_1 := \{x_1, \dots, x_r\}$ és $D_2 := \{y_1, \dots, y_s\}$. Ekkor a $D := D_1 \times D_2$

halmazt a T egy beosztásának nevezzük. A D beosztás téglalapjainak nevezzük az $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ halmazokat. Egy ilyen téglalap területe $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Legyen $m_*(H, D)$ a D azon téglalapjainak területösszege, melyeknek minden pontja a H -nak belső pontja. Ha nincs ilyen téglalap, akkor $m_*(H, D) := 0$. Legyen $m^*(H, D)$ a D azon téglalapjainak területösszege, melyekben van H -nak belső vagy határpontja. Ha nincs ilyen téglalap, akkor $m^*(H, D) := 0$. Legyen H *belső Jordan-mértéke*

$$m_*(H) := \sup\{m_*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\},$$

és H *külső Jordan-mértéke*

$$m^*(H) := \inf\{m^*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\}.$$

Az $m_*(H)$ és $m^*(H)$ analóg módon értelmezhető akkor is, ha $H \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ebben az esetben téglalap helyett n -dimenziós tégláról, vagy csak röviden tégláról, míg téglalap területe helyett téglá térfogatáról beszélünk.

1.25. Tétel. *A $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz belső és külső Jordan-mértéke független a H -t tartalmazó T zárt téglá választásától.*

Bizonyítás. A bizonyítást csak $n = 2$ esetben mutatjuk meg, általános esetben hasonló az eljárás. Ha $H = \emptyset$, akkor az állítás triviális. Legyen $H \neq \emptyset$ és $T_0 = [a_0, b_0] \times [c_0, d_0] \subset \mathbb{R}^2$ jelölje azt a legszűkebb zárt téglalapot, amely tartalmazza H -t. Legyen $T := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges H -t tartalmazó zárt téglalap. Ekkor $H \subset T_0 \subset T$. Megmutatjuk, hogy

$$\sup\{m_*(H, D_0) : D_0 \text{ beosztása } T_0\text{-nak}\} = \sup\{m_*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\}, \quad (1.3)$$

$$\inf\{m^*(H, D_0) : D_0 \text{ beosztása } T_0\text{-nak}\} = \inf\{m^*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\}, \quad (1.4)$$

melyből már következik az állítás. Az (1.3) triviálisan teljesül, hiszen $H \subset T_0 \subset T$ miatt

$$\{m_*(H, D_0) : D_0 \text{ beosztása } T_0\text{-nak}\} = \{m_*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\}.$$

Legyen $D_0 = \{x_1, \dots, x_r\} \times \{y_1, \dots, y_s\}$ tetszőleges beosztása T_0 -nak és $\varepsilon > 0$.

- Ha $a < a_0$, akkor a_1 legyen olyan, hogy $a < a_1 < a_0$ és $(a_0 - a_1)(d - c) < \frac{\varepsilon}{4}$.
Ha $a = a_0$, akkor $a_1 := a$.
- Ha $b_0 < b$, akkor b_1 legyen olyan, hogy $b_0 < b_1 < b$ és $(b_1 - b_0)(d - c) < \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $b = b_0$, akkor $b_1 := b$.
- Ha $c < c_0$, akkor c_1 legyen olyan, hogy $c < c_1 < c_0$ és $(c_0 - c_1)(b - a) < \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $c = c_0$, akkor $c_1 := c$.
- Ha $d_0 < d$, akkor d_1 legyen olyan, hogy $d_0 < d_1 < d$ és $(d_1 - d_0)(b - a) < \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $d = d_0$, akkor $d_1 := d$.

Legyen $D = \{a, a_1, x_1, \dots, x_r, b_1, b\} \times \{c, c_1, y_1, \dots, y_s, d_1, d\}$, ami a T -nek beosztása. Ekkor $0 < m^*(H, D) - m^*(H, D_0) < \varepsilon$. Ebből következik (1.4). $\square$

1.26. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz *Jordan-mérhető*, ha a belső és külső Jordan-mértéke megegyezik. Ekkor ezt a közös értéket a H *Jordan-mértékének* nevezzük és $m(H)$ módon jelöljük.

1.27. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $T \subset \mathbb{R}^n$ egy H -t tartalmazó zárt téglá és D_1, D_2 beosztásai T -nek. Ha $D_1 \subset D_2$, azaz D_2 finomítása D_1 -nek, akkor

$$m_*(H, D_1) \leq m_*(H, D_2) \quad \text{és} \quad m^*(H, D_1) \geq m^*(H, D_2).$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy D_2 csak egyetlen ponttal bővebb D_1 -nél, ugyanis általános esetben ebből már teljes indukcióval következik az állítás. Ha ez a pont a D_1 olyan t téglájának eleme, melynek minden eleme H belső pontja, akkor $m_*(H, D_1) = m_*(H, D_2)$. Ha t nem ilyen, akkor ennek térfogata nincs az $m_*(H, D_1)$ összegben, viszont a keletkező új téglák valamelyike már lehet részhalmaza H belső pontjainak halmazának. Ilyenkor az $m_*(H, D_2)$ összegben ennek térfogata már szerepel tagként, azaz $m_*(H, D_1) < m_*(H, D_2)$. Mindezekből következik az első egyenlőtlenség. A másik hasonlóan bizonyítható. $\square$

1.28. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $T \subset \mathbb{R}^n$ egy H -t tartalmazó zárt téglá és D_1, D_2 beosztásai T -nek. Ekkor $m_*(H, D_1) \leq m^*(H, D_2)$.

Bizonyítás. $D_1 \cup D_2$ beosztása T -nek és finomítása D_1 -nek illetve D_2 -nek is, így az 1.27. tételből $m_*(H, D_1) \leq m_*(H, D_1 \cup D_2) \leq m^*(H, D_1 \cup D_2) \leq m^*(H, D_2)$. $\square$

1.29. Tétel. Ha $I_1, \dots, I_n$ az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai, akkor az $I_1 \times \dots \times I_n$ Jordan-mérhető, és Jordan-mértéke az $I_1, \dots, I_n$ intervallumok hosszainak szorzata.

Bizonyítás. Csak $n = 2$ esetén bizonyítunk, általános esetben hasonló az eljárás. Legyen $H := I_1 \times \dots \times I_n$, T a H lezártja és D tetszőleges beosztása T -nek. Ekkor D minden téglájának térfogata szerepel az $m^*(H, D)$ összegben, így $m^*(H, D) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, ahol az I_1 végpontjai a_1, b_1 ($a_1 < b_1$) és I_2 végpontjai a_2, b_2 ($a_2 < b_2$). Ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor $D := \{x_0, \dots, x_r\} \times \{y_0, \dots, y_s\}$ választható úgy, hogy

$$(x_1 - x_0)(b_2 - a_2) + (x_r - x_{r-1})(b_2 - a_2) + (y_1 - y_0)(b_1 - a_1) + (y_s - y_{s-1})(b_1 - a_1) < \varepsilon.$$

Ekkor $0 < (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) - m_*(H, D) < \varepsilon \implies m_*(H) = m^*(H) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \implies$ állítás. $\square$

1.30. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor $m^*(\partial H) = m^*(H) - m_*(H)$, ahol ∂H a H határpontjainak halmazát jelöli.

Bizonyítás. Legyen T egy H -t tartalmazó zárt téglá és D egy beosztása T -nek. Mivel T zárt, így $\partial H \subset T \implies$

$$m^*(\partial H, D) = m^*(H, D) - m_*(H, D) \geq m^*(H) - m_*(H). \quad (1.5)$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és D_1 illetve D_2 olyan beosztásai T -nek, melyekre

$$m^*(H, D_1) < m^*(H) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad m_*(H, D_2) > m_*(H) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $D := D_1 \cup D_2$ esetén $m^*(\partial H) \leq m^*(\partial H, D) \underset{(1.5)}{=} m^*(H, D) - m_*(H, D) \leq$
 $\leq m^*(H, D_1) - m_*(H, D_2) < m^*(H) - m_*(H) + \varepsilon \implies m^*(\partial H) \leq m^*(H) -$
 $- m_*(H) \underset{(1.5)}{\leq} m^*(\partial H, D) \implies \text{állítás.} \quad \square$

1.31. Tétel. *Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhetőek és $m(A) = m(B) = 0$, akkor $A \cup B$ is Jordan-mérhető és $m(A \cup B) = 0$.*

Bizonyítás. Bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik D_1 illetve D_2 beosztás, hogy $m^*(A, D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $m^*(B, D_2) < \frac{\varepsilon}{2} \implies$ Létezik olyan D beosztás, hogy $m^*(A \cup B, D) < \varepsilon \implies m^*(A \cup B) = 0 \implies 0 \leq m_*(A \cup B) \leq m^*(A \cup B)$ miatt $m_*(A \cup B) = 0 \implies$ állítás. $\square$

1.32. Tétel. *Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset B$, B Jordan-mérhető és $m(B) = 0$, akkor A is Jordan-mérhető és $m(A) = 0$.*

Bizonyítás. $0 \leq m^*(A) \leq m^*(B) = 0 \implies 0 \leq m_*(A) \leq m^*(A) = 0 \implies$ állítás. $\square$

1.33. Tétel. *$H \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor Jordan-mérhető, ha ∂H Jordan-mérhető és $m(\partial H) = 0$.*

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\implies$ ” Az 1.30. tételből $m^*(\partial H) = m^*(H) - m_*(H) = 0$, másrészt $0 \leq m_*(\partial H) \leq m^*(\partial H)$, így $m_*(\partial H) = 0 \implies m(\partial H) = 0$.

$\blacktriangleright$ „ $\impliedby$ ” $m(\partial H) = 0 \implies m^*(\partial H) = 0 \implies$ 1.30. tételből $m^*(H) = m_*(H)$. $\square$

1.34. Tétel. *Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhetőek, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ is azok.*

Bizonyítás. Az 1.33. tétel miatt $m(\partial A) = m(\partial B) = 0 \implies$ Az 1.31. tétel miatt $m(\partial A \cup \partial B) = 0$. Másrészt

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &\subset \partial A \cup \partial B, \\ \partial(A \cap B) &\subset \partial A \cup \partial B, \\ \partial(A \setminus B) &\subset \partial A \cup \partial B, \end{aligned}$$

így az 1.32. tételből $m(\partial(A \cup B)) = m(\partial(A \cap B)) = m(\partial(A \setminus B)) = 0 \implies$ Az 1.33. tétel miatt kapjuk az állítást. $\square$

1.35. Tétel (Véges additivitás). Ha $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, k$) diszjunktak és Jordan-mérhetőek, akkor $\bigcup_{i=1}^k A_i$ is az, továbbá $m\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k m(A_i)$.

Bizonyítás. Csak $n = 2$ esetén bizonyítunk, általános esetben hasonló az eljárás. Legyen $k = 2$ és tegyük fel, hogy $A_1, A_2 \neq \emptyset$ (ellenkező esetben ugyanis triviális). Legyen T_i egy A_i -t tartalmazó zárt téglát és $D_i = D_1^{(i)} \times D_2^{(i)}$ a T_i egy beosztása ($i = 1, 2$). Jelölje T azt a legszűkebb zárt téglát, amely tartalmazza a $T_1 \cup T_2$ halmazt. Ekkor T az $A_1 \cup A_2$ -t tartalmazó zárt téglát, továbbá $D := (D_1^{(1)} \cup D_1^{(2)}) \times (D_2^{(1)} \cup D_2^{(2)})$ beosztása T -nek. Ekkor $m_*(A_1, D_1) + m_*(A_2, D_2) \leq m_*(A_1, D) + m_*(A_2, D) = m_*(A_1 \cup A_2, D) \implies m_*(A_1) + m_*(A_2) = m_*(A_1 \cup A_2)$. Így az 1.34. tétel miatt adódik az állítás. Ebből tetszőleges k esetre teljes indukcióval bizonyíthatunk. $\square$

A következő tétel egyszerű következménye a véges additivitásnak.

1.36. Tétel (Monotonitás). Ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhetőek és $A \subset B$, akkor $m(A) \leq m(B)$.

A következő tétel abból következik, hogy egy beosztás tégláinak térfogatai nem változnak, ha a beosztást eltoljuk.

1.37. Tétel (Eltolás-invariancia). Legyen $r \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := x + r$ és $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető. Ekkor $g(A)$ is az, továbbá $m(g(A)) = m(A)$.

1.38. Megjegyzés. A Jordan-mérhető halmazok rendszere nem σ -algebra, mert megszámlálhatóan végtelen sok korlátos halmaz uniója nem feltétlenül korlátos, másrészt létezik megszámlálhatóan végtelen sok olyan Jordan-mérhető halmaz, melyek egyesítése korlátos, de nem Jordan-mérhető. Például

$$H := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

nem Jordan-mérhető, hiszen $m_*(H) = 0 \neq 1 = m^*(H)$. Másrészt H előáll az egyelemű részhalmazainak uniójaként, amely megszámlálhatóan végtelen sok tagból álló diszjunkt rendszert alkot, továbbá az egy pontból álló halmazok Jordan-mérhetőek.

2. fejezet

Mérték konstruálása

2.1. Külső mérték

Sokszor az alaphalmaz bizonyos egyszerű részhalmazainak már tudjuk a mértékét. Pl. síkbeli pontthalmazok területe esetén az ismert, hogy a téglalapokhoz mit rendeljünk. A cél az, hogy olyan mértéket definiáljunk, amely egybevág ezzel az előzetes mértékkel. Ennek a fejezetnek a tételei erre szolgálnak.

2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. A $\mu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ függvényt *szubadditívnek* nevezzük, ha

$$\mu(A) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

minden $I \subset \mathbb{N}$, $A, A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I$) esetén, melyekre $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül.

2.2. Definíció. Ha X egy halmaz és $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ szubadditív, akkor μ -t *külső mértéknek* nevezzük X -en.

2.3. Tétel. Legyen μ külső mérték X -en. Ekkor

- ① $\mu(\emptyset) = 0$,
- ② (monotonitás) $A \subset B \subset X$ esetén $\mu(A) \leq \mu(B)$.

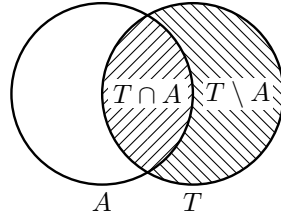
Bizonyítás. ► A szubadditivitás definíciójába $A = I = \emptyset$ írva $\emptyset \subset \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \implies 0 \leq \mu(\emptyset) \leq \sum_{i \in \emptyset} \mu(A_i) = 0 \implies$ ①.

► ② feltételével legyen $I := \{1\}$ és $A_1 := B \implies A \subset B = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i) = \mu(B)$. □

2.4. Definíció. Legyen μ külső mérték X -en. Az $A \subset X$ *μ -mérhető*, ha

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \forall T \subset X.$$

Az A tehát akkor μ -mérhető, ha bármely T halmazt „additívan” vág ketté.



2.5. *Megjegyzés.* $\mu(T) \leq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ a szubadditivitás miatt, ezért az előző definícióban „=” helyett „ $\geq$ ” is írható. Másrészt, ha $\mu(A) = 0$, akkor az A halmaz μ -mérhető, hiszen $T \subset X$ esetén $\mu(T) = \mu(A) + \mu(T)$ $\underset{\text{mon.}}{\geq} \underbrace{\mu(T \cap A)}_{A \supset} + \underbrace{\mu(T \setminus A)}_{T \supset}$.

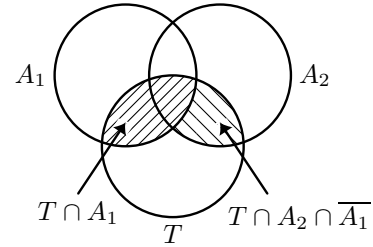
A következő tétel azt mutatja meg, hogy külső mértékből hogyan lehet teljes mértéket konstruálni.

2.6. Tétel. *Legyen μ külső mérték X -en, $\mathcal{A}$ az X μ -mérhető részhalmazainak rendszere és $\tilde{\mu}$ a μ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ teljes mértéktér.*

Bizonyítás. ① ► $T \subset X$ esetén $\underbrace{\mu(T \cap X)}_T + \underbrace{\mu(T \setminus X)}_{\emptyset} = \mu(T) \implies X \in \mathcal{A}$.

② ► $A \in \mathcal{A}$ és $T \subset X$ esetén $\mu(T) = \underbrace{\mu(T \cap A)}_{T \cap A} + \underbrace{\mu(T \setminus A)}_{T \cap \bar{A}} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$.

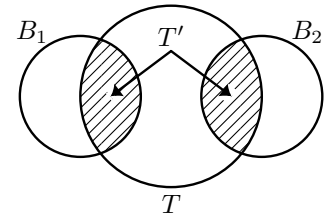
③ ► $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) és $T \subset X$ esetén

$$\begin{aligned} \mu(T) &\underset{A_1 \in \mathcal{A}}{=} \mu(T \cap A_1) + \underbrace{\mu(T \setminus A_1)}_{:=T'} \underset{A_2 \in \mathcal{A}}{=} \mu(T \cap A_1) + \mu(T' \cap A_2) + \mu(T' \setminus A_2) = \\ &= \underbrace{\mu(T \cap A_1) + \mu(T \cap A_2 \cap \bar{A}_1)}_{\text{(lásd ábra)}} + \underbrace{\mu(T \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)}_{T \setminus (A_1 \cup A_2)} \geq \\ &\underset{\text{szubadd.}}{\geq} \mu(T \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(T \setminus (A_1 \cup A_2)) \end{aligned}$$


$\implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \implies$ (teljes indukcióval) $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$.

④ ► $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \setminus B = A \cap \bar{B} = \overline{\bar{A} \cap B} = \overline{\bar{A} \cup B} \implies$ (② és ③) $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

⑤ ► $B_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer és $T \subset X$ esetén

$$\begin{aligned} \mu\left(\underbrace{T \cap (B_1 \cup B_2)}_{:=T'}\right) &\underset{B_1 \in \mathcal{A}}{=} \mu\left(\underbrace{T' \cap B_1}_{T \cap B_1}\right) + \mu\left(\underbrace{T' \setminus B_1}_{T \cap B_2}\right) = \\ &= \mu(T \cap B_1) + \mu(T \cap B_2) \implies \text{(teljes indukcióval)} \end{aligned}$$


$$\mu\left(T \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(T \cap B_i) \forall n \in \mathbb{N}.$$

⑥ ► Legyen $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer $\underset{\text{③, ④}}{\implies}$

és $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B_i \implies T \subset X$ esetén

$$\begin{aligned}
\mu(T) & \underset{\textcircled{3}}{\overset{\uparrow}{=}} \mu\left(T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu\left(T \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) \underset{\textcircled{5}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{i=1}^n \mu(T \cap B_i) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\
& \underset{\text{mon.}}{\geq} \sum_{i=1}^n \mu(T \cap B_i) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies (n \rightarrow \infty) \\
\mu(T) & \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap B_i) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{szubadd.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (T \cap B_i)\right) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \\
& = \mu\left(T \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) + \mu\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \implies \textcircled{1} \text{ és } \textcircled{2} \text{ } (X, \mathcal{A}) \text{ mérhető tér.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{7} \blacktriangleright \quad A_i \in \mathcal{A} \ (i \in \mathbb{N}) \text{ diszjunkt rendszer esetén } \underbrace{\mu(A_1 \cup A_2)}_{:=T} & \underset{A_2 \in \mathcal{A}}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{\mu(T \cap A_2)}_{A_2} + \\
& + \mu\left(\underbrace{T \setminus A_2}_{A_1}\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \implies \text{(teljes indukcióval)} \\
\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) & = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{mon.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \ \forall n \in \mathbb{N} \\
& \implies (n \rightarrow \infty) \ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \implies \text{(szubadd.)} \ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \implies \tilde{\mu} \\
& \sigma\text{-additív} \implies (\tilde{\mu}(\emptyset) = 0) \ (X, \mathcal{A}, \tilde{\mu}) \text{ mértéktér.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{8} \blacktriangleright \quad A \in \mathcal{A}, \tilde{\mu}(A) = 0 \text{ és } B \subset A \text{ esetén } 0 \leq \mu(B) & \underset{\text{mon.}}{\overset{\uparrow}{\leq}} \mu(A) = 0 \implies \mu(B) = 0 \\
\implies T \subset X \text{ esetén } \underbrace{\mu(T \cap B)}_{\subset B} + \underbrace{\mu(T \setminus B)}_{\subset T} & \underset{\text{mon.}}{\overset{\uparrow}{\leq}} \mu(B) + \mu(T) = \mu(T) \implies B \in \mathcal{A} \implies \\
\tilde{\mu}(B) = \mu(B) = 0 \implies \tilde{\mu} \text{ teljes mérték.} & \quad \square
\end{aligned}$$

A következő tétel azt mutatja meg, hogy egy halmazfüggvényből hogyan lehet külső mértéket konstruálni.

2.7. Tétel. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\Sigma(B) := \left\{ \sum_{i \in I} \nu(A_i) : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{H} \ (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} \quad (B \subset X),$$

$$\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(B) := \inf \Sigma(B).$$

Ekkor μ külső mérték X -en és $\mu(B) \leq \nu(B) \ \forall B \in \mathcal{H}$. A μ -t a ν -höz tartozó külső mértéknek nevezzük.

2.8. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $\Sigma(B)$ definíciójában I lehet üres halmaz, így $\emptyset \subset \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ ($A_i \in \mathcal{H}$) miatt $\sum_{i \in \emptyset} \nu(A_i) = 0 \in \Sigma(\emptyset)$, azaz $\mu(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás. $\textcircled{1} \blacktriangleright$ $B \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(B) \in \Sigma(B) \implies \nu(B) \geq \inf \Sigma(B) = \mu(B)$.

$\textcircled{2} \blacktriangleright$ Azt kell még belátni, hogy μ szubadditív, azaz ha $J \subset \mathbb{N}$, $B, B_j \subset X$ ($j \in J$), $B \subset \bigcup_{j \in J} B_j$, akkor $\mu(B) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j)$. Ha $J = \emptyset$, akkor $\emptyset \subset \bigcup_{j \in \emptyset} B_j = \emptyset$, így

a 2.8. megjegyzés miatt $0 = \mu(\emptyset) \leq \sum_{j \in \emptyset} \mu(B_j) = 0$. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $J \neq \emptyset$. Ha valamely $j_0 \in J$ -re $\Sigma(B_{j_0}) = \emptyset$, akkor $\sum_{j \in J} \mu(B_j) = \infty$, így az előző egyenlőtlenség teljesül. Ha $\Sigma(B_j) \neq \emptyset$ minden $j \in J$ -re, akkor rögzített $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén a μ definíciója miatt minden $j \in J$ -hez létezik $I_j \subset \mathbb{N}$ és $A_i^{(j)} \in \mathcal{H}$ ($i \in I_j$), hogy $B_j \subset \bigcup_{i \in I_j} A_i^{(j)}$ és

$$\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_{i \in I_j} \nu(A_i^{(j)}). \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} B \subset \bigcup_{j \in J} B_j \subset \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_i^{(j)} &\implies (\mu \text{ definíciója}) \mu(B) \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \nu(A_i^{(j)}) \leq \sum_{j \in J} \left(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \\ &\stackrel{(2.1)}{\leq} \sum_{j \in J} \mu(B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j \in J} \mu(B_j) + \varepsilon \implies (\varepsilon \downarrow 0) \mu(B) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j). \quad \square \end{aligned}$$

2.9. Megjegyzés. Az eddigiek alapján a következőképpen tudunk tetszőleges halmazfüggvényből teljes mértékteret generálni:

Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$, μ a ν -höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ -mérhető részhalmazainak rendszere és $\tilde{\mu}$ a μ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ teljes mértéktér.

Azonban elvárjuk, hogy az így kapott mérték kiterjesztése legyen ν -nek, azaz, hogy $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{H}$ és $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ teljesüljön. A továbbiakban ennek feltételeit vizsgáljuk.

2.10. Tétel. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ és μ a ν -höz tartozó külső mérték. Ekkor $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{H}$ pontosan abban az esetben teljesül, ha ν szubadditív.

Bizonyítás. ► „ $\implies$ ” μ külső mérték, azaz szubadditív $\implies \nu$ szubadditív.

$$\begin{aligned} \text{► „}\Leftarrow\text{” } A, A_i \in \mathcal{H} \ (i \in I \subset \mathbb{N}) \text{ és } A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \text{ esetén } \nu(A) &\leq \sum_{i \in I} \nu(A_i) \in \Sigma(A) \\ \implies \Sigma(A)\text{-nak } \nu(A) \text{ alsó korlátja} &\implies \nu(A) \leq \inf \Sigma(A) \stackrel{\mu \text{ def.}}{=} \mu(A) \stackrel{2.7. \text{ tétel}}{\leq} \nu(A) \implies \\ \mu(A) &= \nu(A). \quad \square \end{aligned}$$

A következő tétel azt mondja ki, hogy $\mathcal{H}$ -n értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ külső mérték esetén a μ -mérhetőséghez nem kell megvizsgálni az alaphalmaz összes részhalmazát, elég csak a $\mathcal{H}$ elemeit.

2.11. Tétel. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$, μ a ν -höz tartozó külső mérték és $B \subset X$. A B halmaz pontosan abban az esetben μ -mérhető, ha

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A \in \mathcal{H}.$$

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” $A \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2.7. tétel}}}{\geq} \mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ } \mu\text{-mérhető}}}{=} \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$.

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $T \subset X$, $\Sigma(T) \neq \emptyset$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. A μ definíciója miatt létezik $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$), hogy $T \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ és $\mu(T) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \nu(A_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{felt.}}}{\geq} \sum_{i \in I} (\mu(A_i \cap B) + \mu(A_i \setminus B)) =$

$$= \sum_{i \in I} \mu(A_i \cap B) + \sum_{i \in I} \mu(A_i \setminus B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\geq} \mu\left(B \cap \bigcup_{i \in I} A_i\right) + \mu\left(\overline{B} \cap \bigcup_{i \in I} A_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon.}}}{\geq} \mu(B \cap$$

$$\cap T) + \mu(\underbrace{\overline{B} \cap T}_{T \setminus B}) \implies (\varepsilon \downarrow 0) \mu(T) \geq \mu(B \cap T) + \mu(T \setminus B). \text{ Ha } \Sigma(T) = \emptyset, \text{ akkor}$$

$\mu(T) = \infty$, miatt az előző egyenlőtlenség ismét teljesül. Így bizonyítottuk, hogy B μ -mérhető. $\square$

2.12. Definíció. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ és μ a ν -höz tartozó külső mérték. A ν -t *premértéknek* nevezzük, ha szubadditív és

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A, B \in \mathcal{H}.$$

A következő tétel a 2.10. és 2.11. tételek következménye.

2.13. Tétel. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$, μ a ν -höz tartozó külső mérték és $\mathcal{A}$ a μ -mérhető halmazok rendszere. Ekkor $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H}$ -ra pontosan akkor teljesül, ha ν premérték.

A következő tétel azt állítja, hogy a mérték egyúttal premérték is, így minden mértéktér kiterjeszthető teljes mértéktérre.

2.14. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{H}, \nu)$ mértéktér, μ a ν -höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ -mérhető részhalmazainak rendszere és $\tilde{\mu}$ a μ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ teljes mértéktér, $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{H}$. Az utóbbi mértéktér az $(X, \mathcal{H}, \nu)$ *természetes kiterjesztésének* nevezzük.

Bizonyítás. ① ► A 2.6. tétel szerint $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ teljes mértéktér.

② ► ν mérték $\implies \nu$ szubadditív $\implies$ (2.10. tétel) $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{H}$.

③ ► $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $\mu(\underbrace{A \cap B}_{\in \mathcal{H}}) + \mu(\underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{H}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{②}}}{=} \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) \underset{\substack{\uparrow \\ \nu \text{ add.}}}{=} \nu(A) \implies$

ν premérték $\implies$ (2.13. tétel) $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. $\square$

2.15. Megjegyzés. Ez a fejezet tehát választ adott arra a kérdésre, hogy hogyan lehet olyan mértéktér generálni bizonyos feltételekkel, amelynek értékei néhány speciális halmazon már adottak: Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$, μ a ν -höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ -mérhető részhalmazainak rendszere és $\tilde{\mu}$ a μ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése. Ha ν premérték, akkor $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ olyan teljes mértéktér, melyben $\tilde{\mu}$ kiterjesztése ν -nek.

A következőkben példaként megvizsgáljuk a lehető legegyszerűbb halmazfüggvényt, amikor az értelmezési tartományának csak egy eleme van. Pontosabban legyen

X egy nem üres halmaz, H az X -nek egy valódi részhalmaza (azaz $H \subset X$, $H \neq \emptyset$ és $H \neq X$) és

$$\nu: \{H\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(H) := 1.$$

Először meghatározzuk a 2.7 tételbeli $\Sigma(B)$ halmazt minden $B \subset X$ esetén.

– Ha $B = \emptyset$, akkor

$$\begin{aligned} B \subset \bigcup_{i \in \emptyset} H = \emptyset &\implies \sum_{i \in \emptyset} \nu(H) = 0 \in \Sigma(\emptyset), \\ B \subset \bigcup_{i=1}^n H \quad \forall n \in \mathbb{N} &\implies \sum_{i=1}^n \nu(H) = n \in \Sigma(\emptyset) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H &\implies \sum_{i=1}^{\infty} \nu(H) = \infty \in \Sigma(\emptyset), \end{aligned}$$

azaz $\Sigma(\emptyset) = \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

– Ha $B \subset H$ és $B \neq \emptyset$, akkor

$$\begin{aligned} B \subset \bigcup_{i=1}^n H \quad \forall n \in \mathbb{N} &\implies \sum_{i=1}^n \nu(H) = n \in \Sigma(\emptyset) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H &\implies \sum_{i=1}^{\infty} \nu(H) = \infty \in \Sigma(\emptyset), \end{aligned}$$

azaz $\Sigma(B) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

– Ha $B \subset X$ és $B \not\subset H$, akkor $\Sigma(B) = \emptyset$.

Összefoglalva

$$B \subset X \quad \text{esetén} \quad \Sigma(B) = \begin{cases} \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, & \text{ha } B = \emptyset, \\ \mathbb{N} \cup \{\infty\}, & \text{ha } B \subset H \text{ és } B \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebből következik, hogy a ν -höz tartozó μ külső mérték

$$\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(B) = \inf \Sigma(B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } B = \emptyset, \\ 1, & \text{ha } B \subset H \text{ és } B \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

A következőkben meghatározzuk ezen μ külső mérték által mérhető halmazok rendszerét.

– Legyen $A \subset X$ és $H \subset A$.

• Ha $T = \emptyset \implies T = T \cap A = T \setminus A = \emptyset \implies$

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A). \quad (2.2)$$

• Ha $T \subset H$ és $T \neq \emptyset \implies T = T \cap A$, $T \setminus A = \emptyset$ és $\mu(T) = 1 \implies (2.2)$.

• Ha $T \subset X$ és $T \not\subset H \implies \mu(T) = \infty \implies (2.2)$.

– Legyen $A \subset X$ és $H \subset \bar{A}$.

- Ha $T = \emptyset \implies T = T \cap A = T \setminus A = \emptyset \implies (2.2)$.
- Ha $T \subset H$ és $T \neq \emptyset \implies T = T \setminus A$, $T \cap A = \emptyset$ és $\mu(T) = 1 \implies (2.2)$.
- Ha $T \subset X$ és $T \not\subset H \implies \mu(T) = \infty \implies (2.2)$.
- Legyen $A \subset X$, $H \not\subset A$ és $H \not\subset \bar{A}$. Ekkor $A \neq \emptyset$, mert különben $H \subset \bar{A} = X$ teljesülne. Legyen $T = H \implies T \cap A \neq \emptyset$ és $T \setminus A \neq \emptyset \implies \mu(T) = \mu(T \cap A) = \mu(T \setminus A) = 1 \implies (2.2)$ nem teljesül.

Mindezekből kapjuk, hogy a μ külső mérték által mérhető halmazok rendszere

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : H \subset A \text{ vagy } H \subset \bar{A}\}.$$

Vegyük észre, hogy $\{H\} \subset \mathcal{A}$ és $\nu(H) = \mu(H)$, így a 2.13. tétel miatt ν premérték. A μ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése

$$\tilde{\mu}: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \tilde{\mu}(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A = \emptyset, \\ 1, & \text{ha } A = H, \\ \infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

A 2.15. megjegyzés miatt az $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ olyan teljes mértéktér, melyben $\tilde{\mu}$ kiterjesztése ν -nek.

2.2. Nevezetes halmazrendszerek

A mértéket egy speciális tulajdonságú halmazrendszeren, σ -algebrán értelmeztük. A további vizsgálatainkban más tulajdonságú halmazrendszerekre is szükségünk lesz.

2.2.1. Félgűrű

2.16. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy nem üres halmazrendszer. Ha minden $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$ és létezik $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{H}$ diszjunkt rendszer, hogy $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^k H_i$, akkor a $\mathcal{H}$ halmazrendszert *félgűrűnek* nevezzük.

2.17. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ félgűrű, akkor $\emptyset \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. $\mathcal{H} \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathcal{H} \implies A \setminus A = \emptyset$ előáll $\mathcal{H}$ -beli diszjunkt halmazok uniójaként. Ez viszont csak úgy lehet, ha $\emptyset \in \mathcal{H}$. $\square$

2.18. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ félgűrű, $I \subset \mathbb{N}$ és $H_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I$), akkor létezik $D_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, hogy $\bigcup_{i \in I} H_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

Bizonyítás. Legyen $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$. Ekkor $H_{i_1} \setminus H_{i_2}$ előáll véges sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Így $H_{i_1} \setminus (H_{i_2} \cup H_{i_3}) = (H_{i_1} \setminus H_{i_2}) \setminus H_{i_3}$ szintén előáll véges sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. A gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy $H_{i_1} \setminus (H_{i_2} \cup \dots \cup H_{i_n})$ előáll véges sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként.

Legyen $A_i := H_i \setminus \bigcup_{\substack{j \in I \\ j < i}} H_j$, ha $i \in I$, és $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I$. Ekkor $\bigcup_{i \in I} H_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

és A_i ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, másrészt az előzőek értelmében minden A_i felírható véges sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Ebből adódik az állítás. $\square$

2.19. Tétel. *Ha $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ félgyűrűk, akkor $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\}$ félgyűrű.*

Bizonyítás. Jelöljük a tétel állításában szereplő halmazt $\mathcal{H}_n$ -nel, amely nyilván nem üres halmaz.

► Ha $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2 \in \mathcal{H}_2 \implies A_i, B_i \in \mathcal{A}_i, (i = 1, 2) \implies A_i \cap B_i \in \mathcal{A}_i, (i = 1, 2) \implies (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in \mathcal{H}_2$.

► Ha $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2 \in \mathcal{H}_2 \implies A_i, B_i \in \mathcal{A}_i, (i = 1, 2)$. Legyen

$$C_1 := (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2), \quad C_2 := (A_1 \setminus B_1) \times A_2.$$

Megmutatjuk, hogy $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = C_1 \cup C_2$.

Ehhez először legyen $(x, y) \in (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$. Ekkor $x \in A_1 \cap B_1$ vagy $x \in A_1 \setminus B_1$. Ha $x \in A_1 \cap B_1$, akkor $y \in A_2 \setminus B_2$, ugyanis, ha $y \in A_2 \cap B_2$ teljesülne, akkor $(x, y) \in B_1 \times B_2$, ami nem igaz. $\implies (x, y) \in C_1$. Ha $x \in A_1 \setminus B_1$, akkor $y \in A_2$ miatt $(x, y) \in C_2$. Így $(x, y) \in (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$ esetén $(x, y) \in C_1 \cup C_2$, azaz $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) \subset C_1 \cup C_2$.

Megfordítva, most legyen $(x, y) \in C_1 \cup C_2$. Ha $(x, y) \in C_1$, akkor $(x, y) \in A_1 \times A_2$, de $y \notin B_2$ miatt $(x, y) \notin B_1 \times B_2$. Ha $(x, y) \in C_2$, akkor $(x, y) \in A_1 \times A_2$, de $x \notin B_1$ miatt $(x, y) \notin B_1 \times B_2$. Így $C_1 \cup C_2 \subset (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$.

Azt kaptuk tehát, hogy $C_1 \cup C_2 = (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$. Másrészt $(A_1 \cap B_1) \cap (A_1 \setminus B_1) = \emptyset$ miatt $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, továbbá C_1 és C_2 előáll vége sok diszjunkt $\mathcal{H}_2$ -beli elem uniójaként. $\implies \mathcal{H}_2$ -beli elemek különbsége mindig felírható véges sok diszjunkt $\mathcal{H}_2$ -beli elem uniójaként.

► Az eddigiekből $n = 2$ esetén igaz az állítás. Ebből teljes indukcióval bizonyíthatunk tetszőleges n -re, ugyanis, ha feltesszük, hogy $\mathcal{H}_k$ félgyűrű, akkor az előzőekből $\mathcal{H}_{k+1} = \{A \times A_{k+1} : A \in \mathcal{H}_k, A_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}\}$ is félgyűrű. $\square$

2.2.2. Halmazgyűrű

2.20. Definíció. Egy $\mathcal{H}$ nem üres halmazrendszert *halmazgyűrűnek* nevezzük, ha $A \setminus B \in \mathcal{H}$ és $A \cup B \in \mathcal{H}$ minden $A, B \in \mathcal{H}$ -ra.

2.21. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, akkor*

- ① $\emptyset \in \mathcal{H}$,

- ② $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$, ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{H}$,
 ③ $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$, ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. ► $A \in \mathcal{H}$ esetén $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{H} \implies \textcircled{1}$.

► ② teljes indukcióval bizonyítható.

► Legyen $A := \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \textcircled{2}$ miatt $A \in \mathcal{H}$, másrészt $A_i \subset A \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \implies$ A -ra való komplementterképzésre alkalmazva a de Morgan-szabályt kapjuk, hogy $\bigcap_{i=1}^n A_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^n (A \setminus A_i) \in \mathcal{H} \implies \textcircled{3}$. $\square$

2.22. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, akkor félgyűrű is.

Bizonyítás. Láttuk, hogy $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$, így teljesül az állítás. $\square$

2.23. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ félgyűrű, akkor $\left\{ \bigcup_{i=1}^n H_i : n \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H} \text{ diszjunktak} \right\}$ halmazgyűrű.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}^* := \left\{ \bigcup_{i=1}^n H_i : n \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H} \text{ diszjunktak} \right\}$, továbbá X az összes $\mathcal{H}^*$ -beli halmaz uniója, és $A \in \mathcal{H}^*$ esetén $\bar{A} := X \setminus A$.

① ► Legyen $A, B \in \mathcal{H}^* \implies$ Léteznek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ illetve $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{H}$ diszjunkt rendszerek, hogy $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ és $B = \bigcup_{j=1}^m B_j \implies$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} = A \cap \overline{\bigcup_{j=1}^m B_j} = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m \bar{B}_j \right) = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap \bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_m).$$

Létezik $C_1, \dots, C_t \in \mathcal{H}$ diszjunkt rendszer, hogy $A_1 \cap \bar{B}_1 = A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{k=1}^t C_k \implies$

$$A_1 \cap \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 = (A_1 \setminus B_1) \cap \bar{B}_2 = \bigcup_{k=1}^t (C_k \setminus B_2).$$

De $C_k \setminus B_2$ felírható $\mathcal{H}$ -beli véges diszjunkt rendszer uniójaként, így $A_1 \cap \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$ is. Teljes indukcióval kapjuk, hogy $A_i \cap \bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_j$ felírható $\mathcal{H}$ -beli véges diszjunkt rendszer uniójaként, így $A \setminus B$ is, azaz $A \setminus B \in \mathcal{H}^*$.

② ► Ha $A, B \in \mathcal{H}^*$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \cup B \in \mathcal{H}^*$ teljesül triviálisan.

③ ► $A, B \in \mathcal{H}^*$ esetén, ① miatt $B \setminus A \in \mathcal{H}^*$, így ②-ből $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \in \mathcal{H}^*$. Mindezekből következik az állítás. $\square$

2.2.3. Halmazalgebra

2.24. Definíció. Legyen X egy halmaz. A $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ *halmazalgebra*, ha

- ① $X \in \mathcal{H}$,
 ② $\bar{A} \in \mathcal{H} \ \forall A \in \mathcal{H}$,
 ③ $A \cup B \in \mathcal{H} \ \forall A, B \in \mathcal{H}$.

2.25. Tétel. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{H}$ pontosan akkor halmazalgebra, ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és $X \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{H} \Rightarrow$ állítás.

► „ $\Leftarrow$ ” $A \in \mathcal{H}$ esetén $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{H} \Rightarrow$ állítás. □

2.26. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ halmazalgebra, akkor $\emptyset \in \mathcal{H}$, illetve $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ esetén $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$ és $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Láttuk, hogy halmazalgebra egyúttal halmazgyűrű is. Másrészt a halmazgyűrű rendelkezik a bizonyítandó tulajdonságokkal. □

2.27. Tétel. Ha X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű,

$$\mathcal{H}^* := \left\{ \bigcup_{i=1}^n H_i : n \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H} \text{ diszjunktak} \right\},$$

és $X \in \mathcal{H}^*$, akkor $\mathcal{H}^*$ halmazalgebra.

Bizonyítás. Az állítás a 2.23. és 2.25. tételekből következik. □

2.2.4. σ -gyűrű

2.28. Definíció. A $\mathcal{H}$ nem üres halmazrendszert *σ -gyűrűnek* nevezzük, ha

- ① $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{H}$,
- ② $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$) esetén $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$.

2.29. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ σ -gyűrű és $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$), akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Legyen $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow A_i \subset A \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ -ra való komplementerképzésre alkalmazva a de Morgan-szabályt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_i) \underset{A \in \mathcal{H}}{\in} \mathcal{H}$. □

2.30. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ σ -gyűrű, akkor halmazgyűrű is, $\emptyset \in \mathcal{H}$, illetve $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ esetén $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$ és $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A_1 := A, A_2 := B, A_i := A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{H}$ ($i \geq 3$) jelöléssel $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}$ halmazgyűrű. A további állítások ebből már következnek. □

2.31. Tétel. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{H}$ pontosan akkor σ -algebra, ha $\mathcal{H}$ σ -gyűrű és $X \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{H}$ (1.17. tétel ③ pontja) $\Rightarrow$ állítás.

► „ $\Leftarrow$ ” $A \in \mathcal{H}$ esetén $\bar{A} = X \setminus A \in \mathcal{H} \Rightarrow$ állítás. $\square$

2.32. Definíció. A $\mathcal{H}$ nem üres halmazrendszert tartalmazó összes σ -gyűrű metszetét (mely nyilván maga is σ -gyűrű) a $\mathcal{H}$ által *generált σ -gyűrűnek* nevezzük. Jele: $\mathcal{G}(\mathcal{H})$. Tehát $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ a legszűkebb σ -gyűrű, ami $\mathcal{H}$ -t tartalmazza.

2.33. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és $A \in \mathcal{H}$, akkor $\mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) = \mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A$.

Emlékeztetünk a jelölésre, miszerint $\mathcal{H} \cap A := \{H \cap A : H \in \mathcal{H}\}$.

Bizonyítás. ► $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{H} \cap A \subset \underbrace{\mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A}_{\sigma\text{-gyűrű}} \Rightarrow$

$$\mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \subset \mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A. \quad (2.3)$$

$H \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A$ esetén $\exists H' \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, hogy $H = H' \cap A \Rightarrow A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$ miatt $H \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A \subset \mathcal{G}(\mathcal{H}) \Rightarrow (2.3)$ miatt

$$\mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \subset \mathcal{G}(\mathcal{H}). \quad (2.4)$$

► Belátjuk, hogy $\mathcal{D}$ σ -gyűrű, ahol

$$\mathcal{D} := \{B \cup (C \setminus A) : B \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \text{ és } C \in \mathcal{G}(\mathcal{H})\}.$$

Legyen $E_i \in \mathcal{D}$ ($i \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ létezik $B_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A)$ és $C_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $E_i = B_i \cup (C_i \setminus A)$ ($i \in \mathbb{N}$). Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A)$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ miatt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cup (C_i \setminus A)) = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right] \cup \left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) \setminus A \right] \in \mathcal{D}. \quad (2.5)$$

A következő levezetésben az átláthatóság kedvéért metszet helyett szorzás jelet, unió helyett összeadás jelet használunk, a közöttük megszokott prioritással, továbbá a komplementerképzés a $\mathcal{H}$ összes elemének uniójára történik.

$$\begin{aligned} E_1 \setminus E_2 &= (B_1 + C_1 \bar{A}) \setminus (B_2 + C_2 \bar{A}) = (B_1 + C_1 \bar{A}) \bar{B}_2 (\bar{C}_2 + A) = B_1 \bar{B}_2 \bar{C}_2 + B_1 \bar{B}_2 A + \\ &+ C_1 \bar{A} \bar{B}_2 \bar{C}_2 + \underbrace{C_1 \bar{A} \bar{B}_2 A}_{\emptyset} = B_1 \bar{B}_2 (\bar{C}_2 + A) + C_1 \bar{A} \bar{B}_2 \bar{C}_2 = B_1 \bar{B}_2 (\bar{C}_2 (\bar{A} + A) + A) + \\ &+ C_1 \bar{A} \bar{B}_2 \bar{C}_2 = B_1 \bar{B}_2 (\underbrace{\bar{C}_2 \bar{A} + \bar{C}_2 A}_A + A) + C_1 \bar{A} \bar{B}_2 \bar{C}_2 = B_1 \bar{B}_2 \bar{C}_2 \bar{A} + B_1 \bar{B}_2 A + \\ &+ C_1 \bar{A} \bar{B}_2 \bar{C}_2 = B_1 \bar{B}_2 A + (B_1 + C_1) \bar{B}_2 \bar{C}_2 \bar{A} = B_1 \bar{B}_2 A + (B_1 + C_1) (\bar{B}_2 + \bar{C}_2) \bar{A} \Rightarrow \end{aligned}$$

(Most visszatérünk a szokásos halmazműveleti jelekre.)

$$\left. \begin{aligned} E_1 \setminus E_2 &= \underbrace{[(B_1 \setminus B_2) \cap A]}_{B^* :=} \cup \underbrace{[(B_1 \cup C_1) \setminus (B_2 \cup C_2)]}_{C^* :=} \setminus A \\ A &= A \cap A \in \mathcal{H} \cap A \Rightarrow A \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \Rightarrow B^* \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \\ B_1, B_2 &\in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \text{ (2.4) miatt} \Rightarrow C^* \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{D}.$$

Így (2.5) miatt $\mathcal{D}$ σ -gyűrű.

► $E \in \mathcal{H}$ esetén $E = (\underbrace{E \cap A}_{\in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A)}) \cup (E \setminus A)$ miatt $E \in \mathcal{D} \implies \mathcal{H} \subset \mathcal{D} \implies (\mathcal{D} \text{ } \sigma\text{-gyűrű})$

$\mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D} \implies$

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A \subset \mathcal{D} \cap A. \quad (2.6)$$

► $E \in \mathcal{D} \cap A$ esetén létezik $B \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A)$ és $C \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, hogy

$$\left. \begin{array}{l} E = (B \cup (C \setminus A)) \cap A = B \cap A \\ A = A \cap A \in \mathcal{H} \cap A \implies A \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \end{array} \right\} \implies E \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \implies$$

$\mathcal{D} \cap A \subset \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \implies (2.6)$ miatt $\mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap A \subset \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap A) \implies (2.3)$ miatt teljesül az állítás. $\square$

2.34. Definíció. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{H}$ -t tartalmazó X -ből származó összes σ -algebra metszetét (mely nyilván maga is σ -algebra) a $\mathcal{H}$ által *generált σ -algebrának* nevezzük. Jele: $\sigma(\mathcal{H})$. Tehát $\sigma(\mathcal{H})$ a legszűkebb σ -algebra, ami $\mathcal{H}$ -t tartalmazza.

2.35. Tétel. Ha X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ és $X \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, akkor $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H})$.

Bizonyítás. A 2.31. tétel miatt $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó σ -algebra $\implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}(\mathcal{H})$. Szintén a 2.31. tétel miatt $\sigma(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó σ -gyűrű $\implies \mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \sigma(\mathcal{H}) \implies$ állítás. $\square$

2.2.5. Monoton osztály

2.36. Definíció. A $\mathcal{H}$ nem üres halmazrendszert *monoton osztálynak* nevezzük, ha

- ① $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}, \forall A_i \in \mathcal{H} (i \in \mathbb{N})$ $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ esetén, és
- ② $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}, \forall A_i \in \mathcal{H} (i \in \mathbb{N})$ $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ esetén.

2.37. Tétel. $\mathcal{H}$ pontosan akkor σ -gyűrű, ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és monoton osztály.

Bizonyítás. ► „ $\implies$ ” A 2.30. és 2.29. tételek miatt $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és monoton osztály.

► „ $\impliedby$ ” Legyen $A_i \in \mathcal{H} (i \in \mathbb{N})$ és $B_i = \bigcup_{j=1}^i A_j \implies B_i \in \mathcal{H} \forall i \in \mathbb{N}$ és $B_1 \subset B_2 \subset \dots$
 $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{H} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^i A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H} \implies$ állítás. $\square$

2.38. Tétel. $\mathcal{H}$ pontosan akkor σ -algebra, ha $\mathcal{H}$ halmazalgebra és monoton osztály.

Bizonyítás. $\mathcal{H}$ σ -algebra $\iff$ (2.31. tétel) $\mathcal{H}$ σ -gyűrű és $X \in \mathcal{H} \iff$ (2.37. tétel) $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, monoton osztály és $X \in \mathcal{H} \iff$ (2.25. tétel) $\mathcal{H}$ halmazalgebra és monoton osztály. $\square$

2.39. Definíció. A $\mathcal{H}$ nem üres halmazrendszert tartalmazó összes monoton osztály metszetét (mely nyilván maga is monoton osztály) a $\mathcal{H}$ által *generált monoton osztálynak* nevezzük. Jele: $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

2.40. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, akkor $\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{G}(\mathcal{H})$.

Bizonyítás. $\blacktriangleright \mathcal{G}(\mathcal{H})$ σ -gyűrű $\implies$ (2.37. tétel) $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó monoton osztály $\implies$

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}(\mathcal{H}). \quad (2.7)$$

$\blacktriangleright$ Legyen

$$\mathcal{D}_A := \left\{ B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) : A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\}, \quad \text{ahol } A \subset X.$$

Legyen $B_i \in \mathcal{D}_A$ ($i \in \mathbb{N}$), $B_1 \subset B_2 \subset \dots \implies$

$$a) B_i \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

$$b) A \setminus B_i \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \text{ és } A \setminus B_1 \supset A \setminus B_2 \supset \dots \implies A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i) \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

$$c) B_i \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \text{ és } B_1 \setminus A \subset B_2 \setminus A \subset \dots \implies \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A) \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

$$d) A \cup B_i \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \text{ és } A \cup B_1 \subset A \cup B_2 \subset \dots \implies A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i) \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

Az a) b) c) és d) pontok alapján $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}_A$. Hasonlóan látható, hogy $B_i \in \mathcal{D}_A$ ($i \in \mathbb{N}$), $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ esetén $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}_A$. Így $\mathcal{D}_A$ monoton osztály minden olyan $A \subset X$ esetén, melyre $\mathcal{D}_A \neq \emptyset$.

$\blacktriangleright$ Ha $A, B \in \mathcal{H} \implies (\mathcal{H}$ halmazgyűrű) $A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies B \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ miatt $B \in \mathcal{D}_A \implies \mathcal{H} \subset \mathcal{D}_A$, tehát $\mathcal{D}_A$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó monoton osztály $\implies \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}_A$, így $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ miatt

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}_A \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad (2.8)$$

$\blacktriangleright$ Ha $A \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ és $B \in \mathcal{H} \implies$ (2.8) miatt $\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}_B \implies A \in \mathcal{D}_B \implies A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies B \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ miatt $B \in \mathcal{D}_A \implies \mathcal{H} \subset \mathcal{D}_A$, tehát $\mathcal{D}_A$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó monoton osztály $\implies \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}_A$, így $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$ miatt

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}_A \quad \forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \quad (2.9)$$

$\blacktriangleright$ Ha $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies$ (2.9) miatt $B \in \mathcal{D}_A \implies A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies \mathcal{M}(\mathcal{H})$ halmazgyűrű $\implies$ (2.37. tétel) $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ σ -gyűrű $\implies \mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies$ (2.7) miatt $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}(\mathcal{H})$. $\square$

2.41. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, $\mathcal{F}$ monoton osztály és $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, akkor $\mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$.

Bizonyítás. $\mathcal{F}$ $\mathcal{H}$ -t tartalmazó monoton osztály $\implies \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$. Másrészt $\mathcal{H}$ halmazgyűrű, így a 2.40. tétel miatt $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}(\mathcal{H}) \implies$ állítás. $\square$

2.3. Caratheodory-féle kiterjesztési tétel

Legyen egy halmazfüggvény $\mathcal{H}$ -n értelmezve. Kérdés, hogy milyen esetekben lehet ezt a halmazfüggvényt egyértelműen kiterjeszteni mértékké $\sigma(\mathcal{H})$ -ra, azaz a $\mathcal{H}$ -t tartalmazó legszűkebb σ -algebrára? Ebben a részben erre adunk választ.

2.42. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer és $\mu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$.

- ① μ **σ -véges**, ha minden $A \in \mathcal{H}$ -ra létezik $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ és $\mu(A_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}$.
- ② μ **σ -additív**, ha $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ minden olyan $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszerre, melyre $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$ teljesül.
- ③ μ **végesen additív**, ha $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ minden olyan $A_i \in \mathcal{H}$ ($i = 1, \dots, n$) diszjunkt rendszerre, melyre $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$ teljesül.
- ④ μ **monoton**, ha $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$ esetén $\mu(A) \leq \mu(B)$.

2.43. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ félggyűrű és $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -additív függvény, akkor ν monoton.

Bizonyítás. Legyen $A, B \in \mathcal{H}$ és $A \subset B$. Ekkor $B \setminus A$ felírható egy $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{H}$ diszjunkt rendszer uniójaként. Legyen $H_0 := A$ és $H_i := \emptyset$ ($i > k$). Ekkor $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \in \mathcal{H}$ diszjunkt felbontás $\implies \nu$ σ -additivitása miatt $\nu(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(H_i) = \nu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(H_i) \geq \nu(A) \implies \nu$ monoton. $\square$

2.44. Tétel. Ha $\mathcal{H}$ félggyűrű, továbbá $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -additív és σ -véges függvény, akkor $\nu(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $A_i = \emptyset$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies \emptyset = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H} \implies \nu$ σ -additivitása miatt $\nu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\nu(\emptyset) \implies \nu(\emptyset) = 0$ vagy $\nu(\emptyset) = \infty$. Mivel ν σ -véges, ezért $\exists A \in \mathcal{H}$, hogy $\nu(A) < \infty \implies \nu$ monotonitása miatt (lásd 2.43. tétel) $0 \leq \nu(\emptyset) \leq \nu(A) < \infty$, amely $\nu(\emptyset) = \infty$ esetén nem teljesülhet, így $\nu(\emptyset) = 0$. $\square$

2.45. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ halmazgyűrű és $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges függvény. Ekkor ν pontosan abban az esetben σ -additív, ha premérték.

Bizonyítás. Ha ν premérték, akkor a 2.15. megjegyzés miatt kiterjeszthető mértékké, így ν σ -additív. Ezzel „ $\Leftarrow$ ” irány bizonyított. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy ν σ -additív. Ekkor a 2.43. és 2.44. tételek miatt ν monoton és $\nu(\emptyset) = 0$.

► Legyen $I \subset \mathbb{N}$, $A, A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I$) és $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor $I \neq \emptyset$ esetén átindexeléssel mindig elérhető, hogy $I = \mathbb{N}$ vagy $I = \{1, \dots, n\}$ legyen valamely $n \in \mathbb{N}$ -re. Legyen

$$B_1 := A \cap A_1$$

$$B_i := A \cap A_i \setminus (A_{i-1} \cup A_{i-2} \cup \dots \cup A_1) \text{ ha } i \in I \text{ és } i \geq 2$$

$$B_i := \emptyset \text{ ha } i \in \mathbb{N} \setminus I.$$

Ekkor $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ diszjunkt felbontás $\implies \nu$ σ -additivitása, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{H}$ és $B_i \in \mathcal{H}$

$$\text{miatt } \nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \nu(\emptyset)=0}}{=} \sum_{i \in I} \nu(B_i) \underset{\substack{B_i \subset A_i \text{ és } \nu \text{ mon.}}}{\leq} \sum_{i \in I} \nu(A_i) \implies \nu \text{ szubadditív.}$$

► Legyen $A, B \in \mathcal{H}$, $A_1 := A \cap B$, $A_2 := A \setminus B$, $A_i := \emptyset$ ($i \geq 3$) és μ a ν -höz tartozó külső mérték $\implies \mu(\underbrace{A \cap B}_{\in \mathcal{H}}) + \mu(\underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{H}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2.10. tétel}}}{=} \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) \underset{\substack{\uparrow \\ \nu(\emptyset)=0}}{=} \nu(A)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \nu \text{ } \sigma\text{-add.}}}{=} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \nu(A) \implies \nu \text{ premérték.} \quad \square$$

2.46. Tétel (Caratheodory-féle kiterjesztési tétel). *Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan félgyűrű, melyre teljesül, hogy X előáll megszámlálhatóan sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Ha $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges és σ -additív, akkor egyetlen olyan mérték létezik az $(X, \sigma(\mathcal{H}))$ mérhető téren, melynek $\mathcal{H}$ -ra vett leszűkítése ν . Ez a mérték a ν -höz tartozó külső mérték $\sigma(\mathcal{H})$ -ra vett leszűkítése.*

Bizonyítás. ① ► Először tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ halmazgyűrű. Legyen $\bar{\nu}$ a ν -höz tartozó μ külső mérték $\sigma(\mathcal{H})$ -ra vett leszűkítése. Be fogjuk bizonyítani, hogy $\bar{\nu}$ mérték és a $\mathcal{H}$ -ra vett leszűkítése ν .

Legyen $\mathcal{A}$ a μ -mérhető halmazok rendszere. Mivel a 2.45. tétel szerint ν premérték, ezért a 2.13. tételből $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. De a 2.6. tétel miatt $\mathcal{A}$ σ -algebra $\implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A} \implies \mu$ -nek $\mathcal{A}$ -ra vett leszűkítése mérték (lásd 2.6. tétel), így $\sigma(\mathcal{H})$ -ra vett leszűkítése, azaz $\bar{\nu}$ is mérték. Másrészt, ha $A \in \mathcal{H}$, akkor $\bar{\nu}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ A \in \sigma(\mathcal{H})}}{=} \mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2.13. tétel}}}{=} \nu(A)$.

Most az egyértelműséget fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy az előbb definiált $\bar{\nu}$ mértéken kívül $\tilde{\nu}$ is teljesíti a tétel állítását, azaz

$$\tilde{\nu}: \sigma(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty] \text{ mértékre } \tilde{\nu}(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{H}.$$

Legyen $E \in \mathcal{H}$, melyre $\nu(E) < \infty$ teljesül (ilyen a ν σ -végeessége miatt létezik) és

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E) : \tilde{\nu}(A) = \bar{\nu}(A)\}.$$

Ha $A \in \mathcal{H} \cap E \implies \mathcal{H} \cap E \subset \mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{H})$ miatt $\tilde{\nu}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{\nu} \text{ def.}}}{=} \nu(A) = \bar{\nu}(A) \implies$

$\mathcal{H} \cap E \subset \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E)$ miatt $A \in \mathcal{D} \implies$

$$\mathcal{H} \cap E \subset \mathcal{D} \tag{2.10}$$

Másrészt a feltétel miatt $X \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, így

$$\mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2.33. tétel}}}{=} \mathcal{G}(\mathcal{H}) \cap E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2.35. tétel}}}{=} \sigma(\mathcal{H}) \cap E. \tag{2.11}$$

$\mathcal{H} \neq \emptyset \implies \mathcal{H} \cap E \neq \emptyset \implies (2.10)$ miatt $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Belátjuk, hogy $\mathcal{D}$ monoton osztály. Legyen $A_i \in \mathcal{D}$ ($i \in \mathbb{N}$), $A_1 \supset A_2 \supset \dots \implies (2.11)$ miatt $\exists E_1 \in \sigma(\mathcal{H})$, hogy $A_1 = E_1 \cap E \implies A_1 \subset E \implies \bar{\nu}(A_1) \leq \bar{\nu}(E) = \nu(E) < \infty \implies \tilde{\nu}(A_1) = \bar{\nu}(A_1) < \infty$

$$\implies \bar{\nu}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{\nu} \text{ folyt.}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu}(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ A_n \in \mathcal{D}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\nu}(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{\nu} \text{ folyt.}}}{=} \tilde{\nu}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Másrészt $\mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E)$ σ -gyűrű, így $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E) \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$. Hasonlóan

bizonyítható, hogy $A_i \in \mathcal{D}$ ($i \in \mathbb{N}$), $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ esetén $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D} \implies \mathcal{D}$ monoton osztály $\implies (2.10)$ miatt $\mathcal{D}$ a $\mathcal{H} \cap E$ halmazgyűrűt tartalmazó monoton osztály $\implies (2.41. \text{ tétel}) \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E) \subset \mathcal{D} \implies \mathcal{D}$ definíciója szerint $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E)$, így $\mathcal{D} = \mathcal{G}(\mathcal{H} \cap E) \implies (2.11)$ miatt

$$\tilde{\nu}(A) = \bar{\nu}(A) \text{ ha } A \in \sigma(\mathcal{H}) \cap E, \text{ ahol } E \in \mathcal{H} \text{ olyan, hogy } \nu(E) < \infty. \quad (2.12)$$

A feltétel miatt $\exists H_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. Másrészt ν σ -véges, így minden H_i lefedhető megszámlálhatóan végtelen sok $\mathcal{H}$ -beli olyan halmazzal, melyhez ν valós számot rendel. Így $\exists A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ és $\nu(A_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}$.

Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \implies B_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, $B_i \subset A_i \forall i \in \mathbb{N}$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$. Ekkor ν monotonitása miatt (lásd 2.43. tétel) $\nu(B_i) \leq \nu(A_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}$.

Legyen $A \in \sigma(\mathcal{H})$. Ekkor $A \cap B_i \in \sigma(\mathcal{H}) \cap B_i$ miatt (2.12) szerint

$$\tilde{\nu}(A \cap B_i) = \bar{\nu}(A \cap B_i) \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(A) &= \tilde{\nu}(A \cap X) = \tilde{\nu}\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \tilde{\nu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-add.}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\nu}(A \cap B_i) \underset{(2.13)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\nu}(A \cap B_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-add.}}}{=} \bar{\nu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)\right) = \bar{\nu}(A) \implies \tilde{\nu} = \bar{\nu}. \end{aligned}$$

② ► Most legyen $\mathcal{H}$ félgyűrű és

$$\mathcal{H}^* := \left\{ \bigcup_{i=1}^n H_i : n \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H} \text{ diszjunktak} \right\}.$$

Ekkor a 2.23. tétel miatt $\mathcal{H}^*$ halmazgyűrű. Legyen

$$\nu^*: \mathcal{H}^* \rightarrow [0, \infty], \quad \nu^*\left(\bigcup_{i=1}^n H_i\right) := \sum_{i=1}^n \nu(H_i).$$

Belátjuk, hogy ν^* egyértelműen meghatározott ν által, azaz ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ illetve $A_1, \dots, B_m \in \mathcal{H}$ olyan diszjunkt rendszerek, melyekre $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, akkor

$$\sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{j=1}^m \nu(B_j). \quad (2.14)$$

$A_i = A_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ $\mathcal{H}$ -beli diszjunkt felbontás
 $\implies \sigma$ -additivitás miatt $\nu(A_i) = \sum_{j=1}^m \nu(A_i \cap B_j) \implies \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \nu(A_i \cap B_j)$.
 Hasonlóan kapjuk, hogy $\sum_{j=1}^m \nu(B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \nu(B_j \cap A_i) \implies (2.14)$ azaz ν^* egyértelműen meghatározott ν által.

Mivel ν^* halmazgyűrűn értelmezett, σ -véges és σ -additív, ezért ① miatt pontosan egy olyan mérték létezik $\sigma(\mathcal{H}^*)$ -on, melynek $\mathcal{H}^*$ -ra vett leszűkítése ν^* . Ez nevezetesen a ν^* -hoz tartozó külső mérték $\sigma(\mathcal{H}^*)$ -ra vett leszűkítése.

A ν^* egyértelműen meghatározott ν által, és $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}^*)$. Így az előzőek miatt a tétel teljesül, ha a ν^* -hoz tartozó külső mérték megegyezik a ν -hoz tartozó külső mértékkel. Ez viszont teljesül a következők miatt.

Az $A \subset X$ halmazhoz a ν -hoz tartozó külső mérték a

$$T_1 := \left\{ \sum_{i \in I} \nu(B_i) : I \subset \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{H} (i \in I), A \subset \bigcup_{i \in I} B_i \right\}$$

infimumát, míg a ν^* -hoz tartozó külső mérték a

$$T_2 := \left\{ \sum_{j \in J} \nu^*(C_j) : J \subset \mathbb{N}, C_j \in \mathcal{H}^* (j \in J), A \subset \bigcup_{j \in J} C_j \right\}$$

infimumát rendeli. $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^*$ és ν^* leszűkítése $\mathcal{H}$ -ra $\nu \implies T_1 \subset T_2$. Másrészt, ha $x \in T_2$, akkor létezik $J \subset \mathbb{N}$, $C_j \in \mathcal{H}^* (j \in J)$, hogy $A \subset \bigcup_{j \in J} C_j$ és $x = \sum_{j \in J} \nu^*(C_j)$.

$\implies$ Létezik $B_1^{(j)}, \dots, B_{n_j}^{(j)} \in \mathcal{H}$ diszjunkt rendszer, hogy $C_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} B_i^{(j)} \implies A \subset \bigcup_{j \in J} C_j = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i=1}^{n_j} B_i^{(j)}$ és $x = \sum_{j \in J} \nu^*(C_j) = \sum_{j \in J} \nu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n_j} B_i^{(j)} \right) = \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{n_j} \nu(B_i^{(j)}) \implies x \in T_1 \implies T_2 \subset T_1 \implies T_1 = T_2 \implies$ A két külső mérték megegyezik. Ezzel teljes a bizonyítás. $\square$

A következő állítás a Caratheodory-féle kiterjesztési tétel egy átfogalmazása, melyet szintén szokás ilyen néven emlegetni.

2.47. Tétel. *Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ olyan félgyűrű, melyre teljesül, hogy X előáll megszámlálhatóan sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Ha μ_1 és μ_2 olyan σ -véges mértékek az $(X, \sigma(\mathcal{H}))$ mérhető téren, melyre $\mu_1(H) = \mu_2(H)$ minden $H \in \mathcal{H}$ esetén, akkor $\mu_1 = \mu_2$.*

Bizonyítás. Legyen $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(H) := \mu_1(H)$. Mivel μ_1 σ -véges mérték, ezért ν σ -véges és σ -additív. Másrészt μ_1 és μ_2 is olyan mérték az $(X, \sigma(\mathcal{H}))$ mérhető téren, melynek $\mathcal{H}$ -ra vett leszűkítése ν . De a Caratheodory-féle kiterjesztési tétel szerint csak egy ilyen tulajdonságú mérték van, azaz $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

2.4. Lebesgue-mérték

Most a *hosszúságot* definiáljuk a számegyenesen, abból kiindulva, hogy a korlátos intervallumok hossza már ismert. Az $\mathbb{R}$ egyelemű részhalmazait 0 hosszúságú zárt intervallumoknak tekintjük.

2.48. Definíció. Rendelje ν az $\mathbb{R}$ minden korlátos részintervallumához a hosszát, azaz, ha az intervallum végpontjai a és b , akkor az $|a - b|$ értéket. Legyen λ a ν -höz tartozó külső mérték, melyet *Lebesgue-féle külső mértéknek* nevezünk. Jelölje $\mathcal{L}$ az $\mathbb{R}$ λ -mérhető részhalmazainak a rendszerét és $\tilde{\lambda}$ a λ -nak $\mathcal{L}$ -re való leszűkítését. Az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \tilde{\lambda})$ teljes mértékteret (lásd 2.6. tétel) *Lebesgue-mértéktérnek*, $\mathcal{L}$ elemeit *Lebesgue-mérhető halmazoknak* és $\tilde{\lambda}$ -t *Lebesgue-mértéknek* nevezzük. A továbbiakban $\tilde{\lambda}$ helyett is λ jelölést használunk.

Valójában az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus térből kiindulva értelmeztük a Lebesgue-mértéket, ahol d a szokásos metrikát jelenti, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $d(a, b) = |a - b|$.

Az előbb definiált ν premérték, így teljesül a következő tétel.

2.49. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai Lebesgue-mérhetőek és Lebesgue-mértékük a hosszukkal egyenlő.*

Bizonyítás. ① ► Legyen A és B az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai. Ezek kölcsönös helyzete négy eset lehetséges.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{array}{c} \text{Diagram: } A \text{ and } B \text{ are overlapping intervals. } A \text{ is below } B. \\ \lambda(A \setminus B) + \lambda(A \cap B) \end{array} \begin{array}{c} \leq \\ \uparrow \\ \text{2.7. tétel} \end{array} \nu(A \setminus B) + \nu(A \cap B) = \nu(A). \\
 (b) \quad & \begin{array}{c} \text{Diagram: } A \text{ and } B \text{ are disjoint intervals. } A \text{ is below } B. \\ \lambda(A \setminus B) + \lambda(A \cap B) \end{array} \begin{array}{c} = \lambda(A) \\ \uparrow \\ \text{2.7. tétel} \end{array} \nu(A). \\
 (c) \quad & \begin{array}{c} \text{Diagram: } A \text{ is a union of } A_1, B, \text{ and } A_2. \\ \lambda(A \setminus B) + \lambda(A \cap B) \end{array} \begin{array}{c} \leq \\ \uparrow \\ \text{szubadd.} \end{array} \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \lambda(B) \begin{array}{c} \leq \\ \uparrow \\ \text{2.7. tétel} \end{array} \nu(A). \\
 (d) \quad & \begin{array}{c} \text{Diagram: } A \text{ and } B \text{ are overlapping intervals. } A \text{ is below } B. \\ \lambda(A \setminus B) + \lambda(A \cap B) \end{array} \begin{array}{c} = \lambda(A) \\ \uparrow \\ \text{2.7. tétel} \end{array} \nu(A).
 \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\nu(A) \geq \lambda(A \setminus B) + \lambda(A \cap B)$ minden $\mathbb{R}$ -beli A, B korlátos intervallum esetén.

② ► Legyenek A, A_i ($i \in I \subset \mathbb{N}$) $\mathbb{R}$ -beli korlátos intervallumok, melyekre $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor létezik $B = [a, b] \subset A$, melyre $\nu(A) - \nu(B) \leq \varepsilon$ és létezik $B_i = (a_i, b_i) \supset A_i \forall i \in \mathbb{N}$ -re, hogy $\nu(B_i) - \nu(A_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Mivel $B \subset A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ és B kompakt, ezért $\exists I^* \subset I$ véges halmaz, hogy $B \subset \bigcup_{i \in I^*} B_i$, azaz $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I^*} (a_i, b_i) \implies \exists i_1 \in I^*$, hogy $a_{i_1} < a < b_{i_1}$. Ha $b_{i_1} \leq b$, akkor $\exists i_2 \in I^*$, hogy $a_{i_2} < b_{i_1} < b_{i_2}$. Ha $b_{i_2} \leq b$, akkor $\exists i_3 \in I^*$, hogy $a_{i_3} < b_{i_2} < b_{i_3}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & (& [& (& & (& &] &) & &) & \rightarrow \\ & a_{i_1} & a & a_{i_2} & b_{i_1} & a_{i_3} & b_{i_2} & b & b_{i_3} & & & \end{array}$$

Ez a kiválasztási eljárás véges sok lépésben megszakad az I^* végeessége miatt. Ha n lépés után szakadt meg, azaz $b < b_{i_n}$, akkor $I^{**} := \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \implies$

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \nu(B) + \varepsilon = b - a + \varepsilon < b_{i_n} - a_{i_1} + \varepsilon = b_{i_n} - a_{i_n} + \underbrace{a_{i_n}}_{< b_{i_{n-1}}} - a_{i_{n-1}} + \underbrace{a_{i_{n-1}}}_{< b_{i_{n-2}}} - \\ &- a_{i_{n-2}} + \dots + \underbrace{a_{i_2}}_{< b_{i_1}} - a_{i_1} + \varepsilon < \sum_{j=1}^n (b_{i_j} - a_{i_j}) + \varepsilon = \sum_{i \in I^{**}} \nu(B_i) + \varepsilon \leq \sum_{i \in I} (\nu(A_i) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2^i}) + \varepsilon \leq \sum_{i \in I} \nu(A_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}}_{\varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} + \varepsilon = \sum_{i \in I} \nu(A_i) + 2\varepsilon \implies (\varepsilon \downarrow 0) \nu(A) \leq \sum_{i \in I} \nu(A_i) \implies \end{aligned}$$

ν szubadditív, így ① miatt ν premérték $\implies$ A 2.13. tétel miatt kapjuk az állítást. $\square$

A következő tétel lehetőséget ad arra, hogy beszélhessünk Lebesgue-szerint 0 mértékű halmazokról, a Lebesgue-mérték ismerete nélkül is.

2.50. Tétel. $A \subset \mathbb{R}$ esetén $\lambda(A) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($a_i < b_i$, $i \in \mathbb{N}$), hogy $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ és $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\implies$ ” $\lambda(A) = 0$ esetén

$$\left\{ \sum_{i \in I} \lambda(K_i) : I \subset \mathbb{N}, K_i (i \in I) \text{ az } \mathbb{R} \text{ korlátos intervallumai, és } A \subset \bigcup_{i \in I} K_i \right\}$$

infimuma 0. Így $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $I \subset \mathbb{N}$ és K_i ($i \in I$) $\mathbb{R}$ -beli korlátos intervallumok, hogy $A \subset \bigcup_{i \in I} K_i$ és $\sum_{i \in I} \lambda(K_i) = \sum_{i \in I} (d_i - c_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, ahol K_i végpontjai c_i és d_i ($c_i < d_i$). Legyen $a_i := c_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$ és $b_i := d_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$ ($i \in \mathbb{N}$), ahol $i \in \mathbb{N} \setminus I$ esetén c_i és d_i legyen 0. Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset \bigcup_{i \in I} K_i \supset A$, továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = \sum_{i \in I} (d_i - c_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}) + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus I} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \sum_{i \in I} (d_i - c_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies$ állítás.

$\blacktriangleright$ „ $\impliedby$ ” $0 \leq \lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda((a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$. Ebből $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel adódik az állítás. $\square$

2.51. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := ax + b$ és $A \subset \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lambda(g(A)) = |a|\lambda(A), \quad (2.15)$$

továbbá, ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.

Bizonyítás. ① ► Ha A korlátos intervallum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ végpontokkal, akkor $g(A)$ is korlátos intervallum $a\alpha + b$ és $a\beta + b$ végpontokkal $\implies \lambda(g(A)) = |a\alpha + b - (a\beta + b)| = |a| \cdot |\alpha - \beta| = |a|\lambda(A) \implies (2.15)$

② ► Ha $A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor legyenek $A_i \subset \mathbb{R}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) olyan korlátos intervallumok, melyekre $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies g(A) \subset g\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} g(A_i) \implies \frac{1}{|a|}\lambda(g(A)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leq} \frac{1}{|a|} \sum_{i \in I} \lambda(g(A_i)) \underset{\text{①}}{=} \frac{1}{|a|} \sum_{i \in I} |a|\lambda(A_i) = \sum_{i \in I} \lambda(A_i) \implies \frac{1}{|a|}\lambda(g(A))$ alsó korlátja $\Sigma(A)$ -nak ($\Sigma(A)$ definícióját lásd a 2.7. tételben) $\implies \frac{1}{|a|}\lambda(g(A)) \leq \inf \Sigma(A) = \lambda(A)$. Tehát

$$\lambda(g(A)) \leq |a|\lambda(A). \quad (2.16)$$

A kapott eredményt alkalmazzuk A helyett $g(A)$ -ra és g helyett g^{-1} -re ($g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$) $\implies \lambda\left(\underbrace{g^{-1}(g(A))}_A\right) \leq \frac{1}{|a|}\lambda(g(A))$, melyből (2.16) miatt adódik (2.15).

③ ► Legyen $A \in \mathcal{L}$ és $T \subset \mathbb{R}$. Ekkor (2.15) miatt $\frac{1}{|a|}(\lambda(T \cap g(A)) + \lambda(T \setminus g(A))) = \lambda(g^{-1}(T \cap g(A))) + \lambda(g^{-1}(T \setminus g(A))) = \lambda(g^{-1}(T) \cap A) + \lambda(g^{-1}(T) \setminus A) \underset{\substack{\uparrow \\ A \in \mathcal{L}}}{=} \lambda(g^{-1}(T)) = \frac{1}{|a|}\lambda(T) \implies g(A) \in \mathcal{L}. \quad \square$

A következő tétel az előző speciális esete, mely szerint a Lebesgue-mérték és a Lebesgue-mérhetőség invariáns az eltolásra.

2.52. Tétel (Eltolás-invariancia). Legyen $r \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x + r$ és $A \subset \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda(g(A)) = \lambda(A)$, továbbá, ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.

2.53. Tétel. Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza Lebesgue-mérhető, továbbá Lebesgue-mértéke 0.

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható számosságú halmaz. Ha $A = \emptyset$ akkor $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ha $A = \{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor A zárt intervallum, melynek a hossza 0. Így a 2.49. tétel szerint $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ebből $A = \{x_i \in \mathbb{R} : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ esetén $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in \mathcal{L}$, hiszen $\mathcal{L}$ σ -algebra, másrészt $\lambda(A) = \sum_{i \in I} \lambda(\{x_i\}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{add.}}}{=} \underbrace{\sum_{i \in I} 0}_0 = 0. \quad \square$

Létezik kontinuum számosságú 0 Lebesgue-mértékű halmaz is, pl. az ún. Cantor-féle triadikus halmaz.

2.54. Definíció. A $[0, 1]$ intervallumból vonjuk ki a középső $\frac{1}{3}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_1 , amely két $\frac{1}{3}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezek mindegyikéből vonjuk ki a középső $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_2 , amely négy darab $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezt az eljárást folytatva, ha már definiáltuk a C_n halmazt, mely 2^n darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallum, akkor azok mindegyikéből elhagyva a középső $\frac{1}{3^{n+1}}$ hosszú

nyílt intervallumot, kapjuk a C_{n+1} halmazt. Legyen $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. A C halmazt *Cantor-féle triadikus halmaznak* nevezzük.

2.55. Tétel. *A Cantor-féle triadikus halmaz kontinuum számosságú, Lebesgue-mérhető és Lebesgue-mértéke 0.*

Bizonyítás. ①► $C \subset C_n \forall n \in \mathbb{N} \implies$ (külső mérték monoton) $\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$
 $\forall n \in \mathbb{N} \implies (n \rightarrow \infty) \lambda(C) = 0 \implies$ (2.5. megjegyzés) $C \in \mathcal{L}$.

②► $x \in C$ pontosan akkor teljesül, ha az x végtelen triadikus tört alakjában a triadikus jegyek egyike sem 1. Minden $x \in C$ számhoz rendeljük azt a $0, y_1 y_2 \dots$ triadikus törtet, melyre $y_n = \frac{x_n}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ teljesül, ahol $0, x_1 x_2 \dots$ az x végtelen triadikus tört alakja. Ez egy C -t $[0, 1]$ -re képező invertálható függvény. $\implies C$ kontinuum számosságú. $\square$

A 2.6. tétel miatt a Lebesgue-mérték teljes, így $\lambda(C) = 0$ miatt a C minden részhalmaza Lebesgue-mérhető. De C kontinuum számosságú, ezért ugyanannyi részhalmaza van, mint $\mathbb{R}$ -nek. Így felmerül a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, mely nem Lebesgue-mérhető? A válasz igen, pl. az ún. Vitali-féle halmaz.

2.56. Definíció. Legyen $Q := \{(x, y) : x, y \in [-1, 1], x - y \in \mathbb{Q}\}$. A Q ekvivalencia reláció, így osztályozást generál a $[-1, 1]$ intervallumon. A V halmaz tartalmazzon ezen osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet. Ekkor a V halmazt *Vitali-féle halmaznak* nevezzük.

2.57. Tétel. *A Vitali-féle halmaz nem Lebesgue-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen az $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ olyan sorozat, mely a $\mathbb{Q} \cap [-2, 2]$ minden értékét pontosan egyszer veszi fel, és $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_k(x) := x + r_k (k \in \mathbb{N})$.

► $x \in [-1, 1]$ esetén $\exists y \in V$, hogy $(x, y) \in Q \implies |x - y| \leq 2$ és $x - y \in \mathbb{Q} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $r_{k_0} = x - y \implies x = y + r_{k_0} = g_{k_0}(y) \in g_{k_0}(V) \implies [-1, 1] \subset g_{k_0}(V) \implies [-1, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \implies 2 = \lambda([-1, 1]) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(g_k(V))}_{\text{szubadd.}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V)}_{\text{2.52. tétel}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(V) \cdot n \implies \lambda(V) > 0.$

► Legyen $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$ és $y \in g_i(V) \cap g_j(V) \implies \exists x_i, x_j \in V$, hogy $y = x_i + r_i = x_j + r_j \implies x_i - x_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q} \implies (x_i, x_j) \in Q \implies$ Mivel V a Q által generált minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, ezért $x_i = x_j \implies r_i = r_j \implies i = j$, ami ellentmondás $\implies g_k(V), k \in \mathbb{N}$ diszjunkt rendszer.

► Most tegyük fel, hogy $V \in \mathcal{L} \implies$ 2.52. tétel miatt $g_k(V) \in \mathcal{L}$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re $\implies \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \in \mathcal{L}$.

Ha $x \in V$, akkor $g_k(x) = x + r_k \in [-3, 3]$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re $\implies g_k(V) \subset [-3, 3]$
minden $k \in \mathbb{N}$ -re $\implies \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \subset [-3, 3]$.

Mindezekből $6 = \lambda([-3, 3]) \underset{\uparrow \text{mon.}}{\geq} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V)\right) \underset{\uparrow \sigma\text{-add.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(g_k(V)) \underset{\uparrow \text{2.52. tétel}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(V) \cdot n \implies \lambda(V) = 0$ ami ellentmond $\lambda(V) > 0$ -nak $\implies V \notin \mathcal{L}$. $\square$

2.58. Tétel. $\lambda(B) = \inf\{\lambda(N) : B \subset N \subset \mathbb{R}, N \text{ nyílt halmaz}\} \forall B \subset \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen

$$\Sigma(B) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda(A_i) : I \subset \mathbb{N}, A_i \text{ korlátos intervallum } (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}.$$

Ha $\lambda(B) = \infty$, akkor $B \subset N$ esetén $\lambda(N) = \infty \implies$ állítás. Ha $\lambda(B) < \infty$, akkor $\Sigma(B) \neq \emptyset$ miatt, $\varepsilon > 0$ esetén létezik $I \subset \mathbb{N}$, A_i korlátos intervallum $(i \in I)$, $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, hogy

$$\sum_{i \in I} \lambda(A_i) \leq \lambda(B) + \varepsilon. \quad (2.17)$$

Másrészt $\forall i \in I$ esetén létezik A_i^* nyílt intervallum, hogy $A_i \subset A_i^*$ és $\lambda(A_i^*) \leq \lambda(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \implies \lambda\left(\bigcup_{i \in I} A_i^*\right) \underset{\uparrow \text{szubadd.}}{\leq} \sum_{i \in I} \lambda(A_i^*) \leq \sum_{i \in I} \lambda(A_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}}_{\varepsilon} \underset{\uparrow (2.17)}{\leq} \lambda(B) + 2\varepsilon.$

Mivel $\bigcup_{i \in I} A_i^*$ nyílt, ezért azt kaptuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N nyílt halmaz, hogy $B \subset N$ és $\lambda(N) \leq \lambda(B) + 2\varepsilon. \implies \{\lambda(N) : B \subset N \subset \mathbb{R}, N \text{ nyílt halmaz}\}$ halmaznak $\lambda(B)$ -nél nem lehet nagyobb alsó korlátja. Másrészt $\lambda(B)$ alsó korlát, hiszen $B \subset N$ esetén $\lambda(B) \leq \lambda(N)$. Ezzel bizonyítottuk az állítást. $\square$

2.59. Megjegyzés. Később be fogjuk látni, hogy $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza, és így az ezek által generált σ -algebra elemei, az ún. Borel-mérhető halmazok is Lebesgue-mérhetőek. Mivel egy halmaz zárt, ha komplementere nyílt, ezért az $\mathbb{R}$ zárt részhalmazai is Lebesgue-mérhetőek. Azt is belátjuk majd, hogy Jordan-mérhetőségből következik a Lebesgue-mérhetőség.

2.5. Lebesgue–Stieltjes-mérték

A valószínűségi számításban fontos szerepe lesz a következőkben ismertetett mértéknek.

2.60. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ és

$$\Delta_{a,b}^{(k)} f: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta_{a,b}^{(k)} f(x_1, \dots, x_{k-1}) := f(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, a),$$

ha $k \geq 2$, illetve $\Delta_{a,b}^{(1)} f := f(b) - f(a)$.

2.61. *Megjegyzés.* Ha $f, g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor definíció alapján kapjuk, hogy

$$\Delta_{a,b}^{(k)}(f + g) = \Delta_{a,b}^{(k)}f + \Delta_{a,b}^{(k)}g. \quad (2.18)$$

2.62. Tétel. Ha $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, akkor

$$\Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} F(c_1, \dots, c_n),$$

ahol $c_i = a_i$, ha $\varepsilon_i = 1$ és $c_i = b_i$, ha $\varepsilon_i = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán minden differenciaképzésnél kétszereződik a tagok száma, így 2^n darab tagból áll. Minden tag abszolút értéke különbözik minden más tag abszolút értékétől. Így a tagok között minden olyan $F(c_1, \dots, c_n)$ alakú szám előfordul (előjeltől eltekintve), melyben minden c_i vagy a_i -vel vagy b_i -vel egyenlő. Amikor egy differenciaképzésnél a_i kerül valamelyik változó helyére, akkor azt a tagot -1 -gyel kell szorozni. Viszont nem változik az előjel, amikor b_i kerül valamelyik változó helyére. Így ha a c_i -k között páros számú a_i van, akkor nem változik az előjel, míg ha páratlan, akkor igen. A bizonyítandó egyenlőség jobb oldala pontosan ezt fejezi ki. $\square$

2.63. *Megjegyzés.* Ha például $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$ és $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$), akkor

$$\begin{aligned} \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F(x_1, \dots, x_{n-1}) &= x_1 \cdots x_{n-1} b_n - x_1 \cdots x_{n-1} a_n = x_1 \cdots x_{n-1} (b_n - a_n) \implies \\ \Delta_{a_{n-1},b_{n-1}}^{(n-1)} \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F(x_1, \dots, x_{n-2}) &= x_1 \cdots x_{n-2} b_{n-1} (b_n - a_n) - \\ &\quad - x_1 \cdots x_{n-2} a_{n-1} (b_n - a_n) = \\ &= x_1 \cdots x_{n-2} (b_{n-1} - a_{n-1}) (b_n - a_n) \implies \\ &\vdots \\ \Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F &= (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n). \end{aligned}$$

2.64. Definíció. Legyen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely minden változójában balról folytonos, továbbá melyre teljesül, hogy minden $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$) esetén $\Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F \geq 0$. Legyen

$$\mathcal{T} := \{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, (i = 1, \dots, n)\},$$

ahol $b_i = a_i$ esetén $[a_i, b_i) := \emptyset$, és

$$\nu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty), \quad \nu([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)) := \Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n,b_n}^{(n)} F.$$

A ν -höz tartozó külső mértéket λ_F -fel, a λ_F -mérhető halmazok rendszerét $\mathcal{L}_F$ -fel jelöljük. A λ_F leszűkítését $\mathcal{L}_F$ -re, az F által indukált *Lebesgue–Stieltjes-mértéknek* nevezzük, és ezt is λ_F módon jelöljük. Az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_F, \lambda_F)$ mértékteret *Lebesgue–Stieltjes-mértéktérnek* nevezzük.

2.65. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $n = 1$ esetén a $\Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F \geq 0$ feltétel azzal ekvivalens, hogy F monoton növekvő.

Ha $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x$, akkor $\lambda = \lambda_F$. Ha $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$, akkor λ_F -et szokás λ^n módon jelölni, és n dimenziós Lebesgue-mértéknek nevezni. Mi a λ^n definícióját nem így vezetjük be, hanem majd később, λ n -szeres szorzataként. Ott visszatérünk annak tisztázására, hogy a két értelmezés ekvivalens.

2.66. Tétel. *Az előbbieken definiált ν premérték, így $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$) esetén $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{L}_F$ és*

$$\lambda_F([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F.$$

Bizonyítás. ► Először azt látjuk be, hogy ν végesen additív. Legyen $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq c_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$), és $F_{k+1} := \Delta_{a_{k+1}, b_{k+1}}^{(k+1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \Delta_{a_k, c_k}^{(k)} F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + \Delta_{c_k, b_k}^{(k)} F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \\ & = F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, c_k) - F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k) + \\ & + F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k) - F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, c_k) = \\ & = F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k) - F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k) = \Delta_{a_k, b_k}^{(k)} F_{k+1}(x_1, \dots, x_{k-1}) \implies \\ (2.18) \text{ miatt } & \Delta_{a_{k-1}, b_{k-1}}^{(k-1)} \Delta_{a_k, b_k}^{(k)} F_{k+1} = \Delta_{a_{k-1}, b_{k-1}}^{(k-1)} \Delta_{a_k, c_k}^{(k)} F_{k+1} + \Delta_{a_{k-1}, b_{k-1}}^{(k-1)} \Delta_{c_k, b_k}^{(k)} F_{k+1}. \end{aligned}$$

ből indukcióval kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F &= \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_{k-1}, b_{k-1}}^{(k-1)} \Delta_{a_k, c_k}^{(k)} \Delta_{a_{k+1}, b_{k+1}}^{(k+1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F + \\ &+ \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_{k-1}, b_{k-1}}^{(k-1)} \Delta_{c_k, b_k}^{(k)} \Delta_{a_{k+1}, b_{k+1}}^{(k+1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F. \end{aligned}$$

Ismét indukciót alkalmazva kapjuk, hogy ν végesen additív.

► Tekintsük az előző definícióbeli $\mathcal{T}$ halmazt. Könnyen látható, hogy $n = 1$ esetén ez félgyűrű. Így a 2.19. tétel miatt tetszőleges n -re is az. Ebből, ha $A, B \in \mathcal{T}$, akkor $K_1 := A \cap B \in \mathcal{T}$ és létezik $K_2, \dots, K_m \in \mathcal{T}$ diszjunkt rendszer, hogy $A \setminus B = \bigcup_{i=2}^m K_i$. Így $\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^m K_i\right) \underset{\text{véges add.}}{=} \sum_{i=1}^m \nu(K_i) \underset{\text{2.7. tétel}}{\geq} \sum_{i=1}^m \lambda_F(K_i) = \lambda_F(A \cap B) + \sum_{i=2}^m \lambda_F(K_i)$

$$\geq \lambda_F(A \cap B) + \lambda_F\left(\bigcup_{i=2}^m K_i\right) = \lambda_F(A \cap B) + \lambda_F(A \setminus B).$$

λ_F szubadd.

► Még azt kell belátni, hogy ν szubadditív. Ehhez bevezetünk néhány jelölést. $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Analóg módon definiáljuk az $[a, b]$ illetve (a, b) halmazokat is. Azt írjuk, hogy $a \leq b$, ha $a_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, n$. Hasonlóan értelmezzük az $a < b$ relációt is.

Tegyük fel, hogy $T = [a, b] \in \mathcal{T}$, $K \subset \mathbb{N}$, $T_k = [a_k, b_k] \in \mathcal{T}$ ($k \in K$) és $T \subset \bigcup_{k \in K} T_k$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és $y \in \mathbb{R}^n$, melynek minden koordinátája pozitív. A F minden változójában balról folytonos, így minden $k \in K$ esetén létezik $y_k \in \mathbb{R}^n$, melynek minden koordinátája pozitív, és amelyre

$$\nu([a_k - y_k, b_k]) \leq \nu([a_k, b_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \quad (2.19)$$

$T \subset \bigcup_{k \in K} T_k$ miatt valamely k_0 -ra $a_{k_0} \leq a < b_{k_0}$, azaz $a_{k_0} - y_{k_0} < a < b_{k_0}$, és valamely k_1 -re $a_{k_1} \leq b - y < b_{k_1}$, ha $b - y \in [a, b)$. Így

$$[a, b - y] \subset \bigcup_{k \in K} (a_k - y_k, b_k).$$

Mivel $[a, b - y]$ kompakt, ezért létezik $K^* \subset K$ véges halmaz, hogy

$$[a, b - y] \subset [a, b - y] \subset \bigcup_{k \in K^*} (a_k - y_k, b_k) \subset \bigcup_{k \in K^*} [a_k - y_k, b_k].$$

Tekintsük az

$$A_k := [a, b - y] \cap [a_k - y_k, b_k) \setminus \bigcup_{\substack{j \in K^* \\ j < k}} [a_j - y_j, b_j) \quad (k \in K^*)$$

halmazokat. Ekkor $[a, b - y] = \bigcup_{k \in K^*} A_k$ diszjunkt felbontás és $\mathcal{T}$ félgyűrű volta miatt minden A_k előáll $T_{k,1}, T_{k,2}, \dots, T_{k,m_k} \in \mathcal{T}$ diszjunkt halmazok uniójaként $\implies$

$$[a, b - y] = \bigcup_{k \in K^*} \bigcup_{j=1}^{m_k} T_{k,j}$$

$\mathcal{T}$ -beli diszjunkt felbontás, továbbá $[a_k - y_k, b_k) \setminus A_k$ is előáll $T_{k,1}^*, T_{k,2}^*, \dots, T_{k,m_k}^* \in \mathcal{T}$ diszjunkt halmazok uniójaként $\implies$

$$[a_k - y_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^{m_k} T_{k,j} \cup \bigcup_{j=1}^{m_k^*} T_{k,j}^*$$

$$\mathcal{T}\text{-beli diszjunkt felbontás} \implies \nu([a, b - y]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{véges add.}}}{=} \sum_{k \in K^*} \sum_{j=1}^{m_k} \nu(T_{k,j}) \leq$$

$$\leq \sum_{k \in K^*} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \nu(T_{k,j}) + \sum_{j=1}^{m_k^*} \nu(T_{k,j}^*) \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{véges add.}}}{=} \sum_{k \in K^*} \nu([a_k - y_k, b_k)) \underset{\substack{\uparrow \\ (2.19)}}{\leq} \sum_{k \in K^*} \left(\nu(T_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leq$$

$\leq \sum_{k \in K} \nu(T_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k \in K} \nu(T_k) + \varepsilon$. Tehát, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és $y \in \mathbb{R}^n$, melynek minden koordinátája pozitív, akkor

$$\nu([a, b - y]) \leq \sum_{k \in K} \nu(T_k) + \varepsilon.$$

Ebből F balról való folytonossága miatt, ha y minden koordinátája felülről tart 0-hoz, akkor kapjuk, hogy

$$\nu(T) \leq \sum_{k \in K} \nu(T_k) + \varepsilon.$$

Ebből $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel adódik, hogy $\nu(T) \leq \sum_{k \in K} \nu(T_k)$, azaz ν szubadditív. $\square$

2.6. Hausdorff-mérték

A következőkben definiált Hausdorff-mérték az ívhossz általánosítása, melyet nem premértékből származtatunk.

2.67. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $\mathcal{D}_\varepsilon := \{A \subset X : \text{diam } A < \varepsilon\}$, ahol $\varepsilon > 0$ és $\text{diam } A$ az A halmaz átmérője, azaz $\text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, ha $A \neq \emptyset$ és $\text{diam } \emptyset := 0$. Legyen továbbá $p > 0$ és

$$\nu_{\varepsilon,p} : \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow [0, \infty], \quad \nu_{\varepsilon,p}(A) := (\text{diam } A)^p.$$

Jelölje $\mu_{\varepsilon,p}$ a $\nu_{\varepsilon,p}$ -hez tartozó külső mértéket, és legyen

$$\mathcal{H}_{X,p} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \quad \mathcal{H}_{X,p}(B) := \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\varepsilon,p}(B).$$

Ekkor $\mathcal{H}_{X,p}$ külső mérték, melyet *Hausdorff-féle külső mértéknek* nevezzük. Ennek a $\mathcal{H}_{X,p}$ -mérhető halmazok rendszerére vett leszűkítést p -dimenziós *Hausdorff-mértéknek* nevezzük az (X, d) metrikus téren.

Az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus térben értelmezett $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n,p}$ Hausdorff-féle külső mértéket a továbbiakban mindig a szokásos d metrikával értjük, azaz $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

2.68. *Megjegyzés.* $\Sigma_{\varepsilon,p}(B) := \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^p : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}$ jelöléssel, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ esetén $\mathcal{D}_{\varepsilon_1} \subset \mathcal{D}_{\varepsilon_2} \implies \Sigma_{\varepsilon_1,p}(B) \subset \Sigma_{\varepsilon_2,p}(B) \implies$

$$\mu_{\varepsilon_1,p}(B) = \inf \Sigma_{\varepsilon_1,p}(B) \geq \inf \Sigma_{\varepsilon_2,p}(B) = \mu_{\varepsilon_2,p}(B),$$

azaz $\mu_{\varepsilon,p}(B)$ értéke nő, ha ε értéke csökken. Ezért van a $\mathcal{H}_{X,p}$ definíciójában szuprémum. Másrészt ebből az is látható, hogy $\sup$ helyett írható $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0}$ (0-ban vett jobb oldali határérték) is, azaz

$$\mathcal{H}_{X,p}(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_{\varepsilon,p}(B) \quad \forall B \subset X. \quad (2.20)$$

2.69. Tétel. $\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}$ a Lebesgue-féle külső mértékkel azonos.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{D}_\varepsilon^*$ az ε -nál rövidebb intervallumok halmaza (beleértve az egyelemű halmazokat is), $\mathcal{D}$ a korlátos intervallumok halmaza (beleértve az egyelemű halmazokat is),

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon(B) &:= \left\{ \sum_{i \in I} \text{diam } A_i : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}, \\ \Sigma_\varepsilon^*(B) &:= \left\{ \sum_{i \in I} \text{diam } A_i : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon^* (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}, \\ \Sigma(B) &:= \left\{ \sum_{i \in I} \text{diam } A_i : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D} (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}. \end{aligned}$$

Mivel $A \in \mathcal{D}_\varepsilon$ esetén létezik $A^* \in \mathcal{D}_\varepsilon^*$, hogy $A \subset A^*$ és $\text{diam } A^* = \text{diam } A$, ezért

$$\Sigma_\varepsilon(B) = \Sigma_\varepsilon^*(B) \quad \forall \varepsilon > 0, B \subset \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Másrészt $A \in \mathcal{D}$ esetén létezik $A_1^*, \dots, A_n^* \in \mathcal{D}_\varepsilon^*$ diszjunkt rendszer, hogy $A = A_1^* \cup \dots \cup A_n^*$. Így $\Sigma(B) = \Sigma_\varepsilon^*(B) \stackrel{(2.21)}{=} \Sigma_\varepsilon(B) \quad \forall \varepsilon > 0, B \subset \mathbb{R} \implies \mathcal{H}_{\mathbb{R},1}(B) =$
 $= \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\varepsilon,1}(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \Sigma_\varepsilon(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \Sigma(B) = \inf \Sigma(B) = \lambda(B) \quad \forall B \subset \mathbb{R}. \quad \square$

2.70. Definíció. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n,1}$ -mérhető görbe, akkor a $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n,1}(B)$ értéket a B *ívhosszának* nevezzük.

2.71. Tétel. Ha $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrikus terek, $L \in \mathbb{R}_+$ és $g: A \rightarrow Y$ ($A \subset X$) olyan függvény, melyre

$$d_2(g(x), g(y)) \leq L d_1(x, y) \quad \forall x, y \in A,$$

akkor

$$\mathcal{H}_{Y,p}(g(A)) \leq L^p \mathcal{H}_{X,p}(A).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{D}_\varepsilon := \{H \subset X : \text{diam } H < \varepsilon\}$, $\mathcal{D}'_\varepsilon := \{H \subset Y : \text{diam } H < \varepsilon\}$ és

$$\Sigma_\varepsilon(A) := \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^p : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}.$$

Jelölje $\mu_{\varepsilon,p}$ illetve $\mu'_{\varepsilon,p}$ azon külső mértékeket, melyekből származtattuk a $\mathcal{H}_{X,p}$ illetve $\mathcal{H}_{Y,p}$ Hausdorff-féle külső mértékeket. Ha $\Sigma_\varepsilon(A) \neq \emptyset$, akkor legyen $I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon$ ($i \in I$), $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies g(A) \subset g\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} g(A_i) \implies \mu'_{L\varepsilon,p}(g(A)) \leq \mu'_{L\varepsilon,p}(g(A_i)) \stackrel{\text{szubadd.}}{\leq} \sum_{i \in I} \mu'_{L\varepsilon,p}(g(A_i)) \leq \sum_{i \in I} (\text{diam } g(A_i))^p \stackrel{\text{Lipshitz-tul.}}{\leq} \sum_{i \in I} L^p (\text{diam } A_i)^p \implies L^{-p} \mu'_{L\varepsilon,p}(g(A)) \leq \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^p \implies$
 $\text{alsó korlátja } \Sigma_\varepsilon(A)\text{-nak} \implies$

$$L^{-p} \mu'_{L\varepsilon,p}(g(A)) \leq \inf \Sigma_\varepsilon(A) = \mu_{\varepsilon,p}(A). \quad (2.22)$$

Ha $\Sigma_\varepsilon(A) = \emptyset$, akkor $\mu_{\varepsilon,p}(A) = \infty$, így (2.22) ekkor is teljesül. A (2.22) következményeként kapjuk a tétel állítását. $\square$

2.72. Tétel. Legyenek $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrikus terek, $L \in \mathbb{R}_+$ és $g: X \rightarrow Y$ olyan függvény, melyre

$$d_2(g(x), g(y)) = L d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Ekkor $A \subset X$ esetén

$$\mathcal{H}_{Y,p}(g(A)) = L^p \mathcal{H}_{X,p}(A),$$

továbbá, ha az A $\mathcal{H}_{X,p}$ -mérhető, akkor $g(A)$ $\mathcal{H}_{Y,p}$ -mérhető.

Bizonyítás. A g invertálható függvény, ugyanis ellenkező esetben létezne $x, y \in X$, hogy $x \neq y$ és $g(x) = g(y)$, melyből $0 = d_2(g(x), g(y)) = Ld_1(x, y) \neq 0$, ami ellentmondás. Ekkor

$$g^{-1}: Y \rightarrow X, \quad \text{és} \quad d_1(g^{-1}(u), g^{-1}(v)) = L^{-1}d_2(u, v) \quad \forall u, v \in Y.$$

Így g -re és g^{-1} -re is alkalmazhatjuk a 2.71. tételt:

$$\mathcal{H}_{Y,p}(g(A)) \leq L^p \mathcal{H}_{X,p}(A) \quad \text{és} \quad \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(g(A))) \leq L^{-p} \mathcal{H}_{Y,p}(g(A)),$$

melyből kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

$$\begin{aligned} \text{Legyen } A \text{ } \mathcal{H}_{X,p}\text{-mérhető és } T \subset Y. \text{ Ekkor a korábbiak miatt } L^{-p}(\mathcal{H}_{Y,p}(T \cap \\ \cap g(A)) + \mathcal{H}_{Y,p}(T \setminus g(A))) &= \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(T \cap g(A))) + \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(T \setminus g(A))) = \\ = \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(T) \cap A) + \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(T) \setminus A) &= \mathcal{H}_{X,p}(g^{-1}(T)) \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ } \mathcal{H}_{X,p}\text{-mérhető}}}{=} L^{-p} \mathcal{H}_{Y,p}(T) \implies \\ g(A) \text{ } \mathcal{H}_{Y,p}\text{-mérhető.} \end{aligned}$$

□

A következő tétel szerint, ami az előző következménye, $\mathcal{H}_{X,p}$ invariáns az egybevágóságra, azaz a távolságtartó transzformációkra.

2.73. Tétel (Egybevágóság-invariancia). *Legyen (X, d) metrikus tér és $g: X \rightarrow X$ olyan függvény, melyre*

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Ekkor $A \subset X$ esetén

$$\mathcal{H}_{X,p}(g(A)) = \mathcal{H}_{X,p}(A),$$

továbbá, ha az A $\mathcal{H}_{X,p}$ -mérhető, akkor $g(A)$ is az.

Egy gömbfelület 3 dimenziós alakzat, de valójában már két adattal is megadható egy gömbfelületen található pont helyzete. Gondoljunk például a Föld esetén a szélességi és hosszúsági körökre. Tehát ilyen értelemben a gömbfelület 2 dimenziós. Ezt a dimenziószámot a Hausdorff-mértékkel tudjuk megadni.

2.74. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $B \subset X$ és

$$\dim_{\mathcal{H}} B := \inf\{p > 0 : \mathcal{H}_{X,p}(B) = 0\}.$$

A $\dim_{\mathcal{H}} B$ értéket a B *Hausdorff-dimenziójának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\inf \emptyset = \infty$ miatt, ha $\mathcal{H}_{X,p}(B) > 0$ minden $p > 0$ esetén, akkor $\dim_{\mathcal{H}} B = \infty$.

A Hausdorff-dimenzió tulajdonságainak vizsgálatában a következő tételnek fontos szerepe van.

2.75. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér, $0 < p < q$ és $B \subset X$.*

① *Ha $\mathcal{H}_{X,p}(B) < \infty$, akkor $\mathcal{H}_{X,q}(B) = 0$.*

② Ha $\mathcal{H}_{X,q}(B) > 0$, akkor $\mathcal{H}_{X,p}(B) = \infty$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}_{X,p}(B) < \infty$, $\varepsilon > 0$ és $A \in \mathcal{D}_\varepsilon$ (azaz $\text{diam } A < \varepsilon$). Ekkor

$$(\text{diam } A)^q = (\text{diam } A)^{q-p}(\text{diam } A)^p \leq \varepsilon^{q-p}(\text{diam } A)^p.$$

Így

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon,q}(B) &= \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^q : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i \in I} \varepsilon^{q-p} (\text{diam } A_i)^p : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} = \\ &= \varepsilon^{q-p} \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^p : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} = \\ &= \varepsilon^{q-p} \mu_{\varepsilon,p}(B). \end{aligned}$$

Ebből $\mathcal{H}_{X,p}(B) = \lim_{\substack{\uparrow \\ \varepsilon \rightarrow 0+0}} \mu_{\varepsilon,p}(B) \in \mathbb{R}$ miatt kapjuk, hogy $\mathcal{H}_{X,q}(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_{\varepsilon,q}(B) \leq$
(2.20)

$\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon^{q-p} \mu_{\varepsilon,p}(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon^{q-p} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \mu_{\varepsilon,p}(B) = 0 \cdot \mathcal{H}_{X,p}(B) = 0$, azaz ① teljesül.

Legyen $\mathcal{H}_{X,q}(B) > 0$ és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}_{X,p}(B) < \infty$. Ekkor ①-ből $\mathcal{H}_{X,q}(B) = 0$, ami ellentmondás. Így ② is teljesül. $\square$

2.76. Tétel. Legyen (X, d) metrikus tér és $B \subset X$. Legfeljebb egy olyan $p_0 > 0$ létezik, melyre $\mathcal{H}_{X,p_0}(B) \in \mathbb{R}_+$, és ekkor $\dim_{\mathcal{H}} B = p_0$.

Bizonyítás. Ha létezik ilyen p_0 , akkor a 2.75. tétel miatt, $0 < p < p_0 < q$ esetén $\mathcal{H}_{X,p}(B) = \infty$ és $\mathcal{H}_{X,q}(B) = 0$, amiből következik az állítás. $\square$

2.77. Tétel. Legyen (X, d) metrikus tér, $B \subset X$ és $d \in [0, \infty]$. Ekkor $d = \dim_{\mathcal{H}} B$ pontosan abban az esetben teljesül, ha

$$\mathcal{H}_{X,p}(B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p > d, \\ \infty, & \text{ha } 0 < p < d. \end{cases} \quad (2.23)$$

Bizonyítás. Ha (2.23) teljesül, akkor a $\dim_{\mathcal{H}}$ definíciójából triviálisan következik, hogy $d = \dim_{\mathcal{H}} B$. Megfordítva, most legyen $d = \dim_{\mathcal{H}} B$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $p > d$ esetén $\mathcal{H}_{X,p}(B) > 0$. Ekkor a 2.75. tétel miatt $\mathcal{H}_{X,q}(B) = \infty \ \forall q < p$ esetén $\implies \dim_{\mathcal{H}} B \geq p$, ami ellentmondás. Így $p > d$ esetén $\mathcal{H}_{X,p}(B) = 0$.

Végül ismét indirekt módon tegyük fel, hogy $0 < p < d$ esetén $\mathcal{H}_{X,p}(B) < \infty$. Ekkor a 2.75. tétel miatt $\mathcal{H}_{X,q}(B) = 0 \ \forall q > p$ esetén $\implies \dim_{\mathcal{H}} B \leq p$, ami ellentmondás. Így $0 < p < d$ esetén $\mathcal{H}_{X,p}(B) = \infty$. $\square$

2.78. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér és $A \subset B \subset X$. Ekkor $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$.*

Bizonyítás. Ha $\dim_{\mathcal{H}} B = \infty$, akkor az állítás triviálisan teljesül. Most tegyük fel, hogy $\dim_{\mathcal{H}} B < \infty$, és legyen s_n olyan számsorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \dim_{\mathcal{H}} B$ és $s_n > \dim_{\mathcal{H}} B \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor a 2.77. tételből $\mathcal{H}_{X, s_n}(B) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, így a külső mérték monotonitása miatt $\mathcal{H}_{X, s_n}(A) \leq \mathcal{H}_{X, s_n}(B) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathcal{H}_{X, s_n}(A) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \dim_{\mathcal{H}} A \leq s_n \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \dim_{\mathcal{H}} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \dim_{\mathcal{H}} B$. $\square$

2.79. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér és $A_i \subset X \ (i \in I \subset \mathbb{N})$. Ekkor*

$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i \in I} A_i = \sup_{i \in I} \dim_{\mathcal{H}} A_i.$$

Bizonyítás. Legyen $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor $A_i \subset A \ \forall i \in I$, így a 2.78. tétel miatt $\dim_{\mathcal{H}} A_i \leq \dim_{\mathcal{H}} A \ \forall i \in I \implies \sup_{i \in I} \dim_{\mathcal{H}} A_i \leq \dim_{\mathcal{H}} A$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\sup_{i \in I} \dim_{\mathcal{H}} A_i < \dim_{\mathcal{H}} A$. Ekkor létezik $p > 0$, hogy $\dim_{\mathcal{H}} A_i < p < \dim_{\mathcal{H}} A \ \forall i \in I$. Így a 2.77. tételből $\mathcal{H}_{X, p}(A_i) = 0 \ \forall i \in I$ és $\mathcal{H}_{X, p}(A) = \infty$, ami nem lehet, hiszen a szubadditivitás miatt $\mathcal{H}_{X, p}(A) \leq \sum_{i \in I} \mathcal{H}_{X, p}(A_i) = 0$. $\square$

2.80. Tétel. *Ha $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrikus terek, $L \in \mathbb{R}_+$ és $g: A \rightarrow Y \ (A \subset X)$ olyan függvény, melyre*

$$d_2(g(x), g(y)) \leq L d_1(x, y) \quad \forall x, y \in A,$$

akkor

$$\dim_{\mathcal{H}} g(A) \leq \dim_{\mathcal{H}} A.$$

Bizonyítás. Legyen $H := \{p > 0 : \mathcal{H}_{X, p}(A) = 0\}$, $H^* := \{p > 0 : \mathcal{H}_{Y, p}(g(A)) = 0\}$ és $p \in H$. Ekkor a 2.71. tétel miatt $\mathcal{H}_{Y, p}(g(A)) \leq L^p \mathcal{H}_{X, p}(A) = 0 \implies \mathcal{H}_{Y, p}(g(A)) = 0 \implies p \in H^* \implies H \subset H^* \implies \dim_{\mathcal{H}} A = \inf H \geq \inf H^* = \dim_{\mathcal{H}} g(A)$. $\square$

2.81. Tétel. *Ha $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrikus terek, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_+$ és $g: A \rightarrow Y \ (A \subset X)$ olyan függvény, melyre*

$$L_1 d_1(x, y) \leq d_2(g(x), g(y)) \leq L_2 d_1(x, y) \quad \forall x, y \in A,$$

akkor

$$\dim_{\mathcal{H}} g(A) = \dim_{\mathcal{H}} A.$$

Bizonyítás. Ekkor g invertálható, ugyanis ellenkező esetben létezne $x, y \in A$, hogy $x \neq y$ és $g(x) = g(y)$, melyből $0 < L_1 d_1(x, y) \leq d_2(g(x), g(y)) = 0$, ami nem lehet. Ekkor $g^{-1}: g(A) \rightarrow X$ és

$$L_2^{-1} d_2(u, v) \leq d_1(g^{-1}(u), g^{-1}(v)) \leq L_1^{-1} d_2(u, v) \quad \forall u, v \in g(A).$$

Így g -re és g^{-1} -re is alkalmazhatjuk a 2.80. tételt, mely szerint $\dim_{\mathcal{H}} g(A) \leq \dim_{\mathcal{H}} A$ és $\dim_{\mathcal{H}} g^{-1}(g(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}} g(A) \implies$ állítás. $\square$

A következő tétel szerint, ami az előző következménye, a Hausdorff-dimenzió invariáns a hasonlóságra, azaz az aránytartó transzformációkra.

2.82. Tétel (Hasonlóság-invariancia). *Ha (X, d) metrikus tér, $L \in \mathbb{R}_+$ és $g: X \rightarrow X$ olyan függvény, melyre*

$$d(g(x), g(y)) = Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

akkor $A \subset X$ esetén

$$\dim_{\mathcal{H}} g(A) = \dim_{\mathcal{H}} A.$$

2.83. Példa. Az $\mathbb{R}$ Hausdorff-dimenziója 1.

Bizonyítás. A 2.69. tétel miatt $\mathcal{H}_{\mathbb{R},1}([n, n+1]) = \lambda([n, n+1]) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies$ 2.76. tételből $\dim_{\mathcal{H}} [n, n+1] = 1 \implies$ 2.79. tételből $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R} = \dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1] = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathcal{H}} [n, n+1] = 1.$ $\square$

2.84. Példa. Az $\mathbb{R}^2$ Hausdorff-dimenziója 2.

Bizonyítás. Legyen $T_{nm} = [n, n+1] \times [m, m+1]$ ($n, m \in \mathbb{Z}$). Ekkor a 6.41. és 6.17. tételek miatt $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(T_{nm}) = \frac{4}{\pi} \lambda([n, n+1]) \lambda([m, m+1]) = \frac{4}{\pi} \implies$ 2.76. tételből $\dim_{\mathcal{H}} T_{nm} = 2 \implies$ 2.79. tételből $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^2 = \dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} T_{nm} = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathcal{H}} T_{nm} = 2.$ $\square$

2.85. Példa. Gömbfelszín Hausdorff-dimenziója 2.

Bizonyítás. Legyen $A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\}$ és

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(u, v) := \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right).$$

Ekkor $g(A)$ az origó középpontú egység sugarú gömbfelszín egy részhalmaza. Geometria megfontolásokkal látható, hogy ekkor léteznek $0 < c_1 < c_2 < \frac{\pi}{2}$ konstansok úgy, hogy minden $x, y \in A$ esetén van olyan $\alpha \in [c_1, c_2]$, melyre

$$\frac{|x - y|}{|g(x) - g(y)|} = \cos \alpha.$$

Mivel $0 < \cos c_2 \leq \cos \alpha \leq \cos c_1$, így

$$\cos c_2 \leq \frac{|x - y|}{|g(x) - g(y)|} \leq \cos c_1,$$

melyből

$$\frac{1}{\cos c_1} |x - y| \leq |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{\cos c_2} |x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

Így a 2.81. tétel miatt $\dim_{\mathcal{H}} g(A) = \dim_{\mathcal{H}} A$. De a 6.41. és 6.17. tételek szerint $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2, 2}(A) = \frac{4}{\pi} \lambda \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \right) \lambda \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \right) = \frac{1}{4\pi} \implies$ 2.76. tételből $\dim_{\mathcal{H}} A = 2$, így tehát azt kaptuk, hogy $\dim_{\mathcal{H}} g(A) = 2$.

A $g(A)$ -nak bármilyen origó középpontú forgatását tekintve, annak szintén 2 a Hausdorff-dimenziója a hasonlóság-invariancia miatt. Mivel az origó középpontú egység sugarú gömbfelszín előáll véges sok ilyen $g(A)$ elforgatott uniójaként, ezért a 2.79. tételt használva kapjuk, hogy az origó középpontú egység sugarú gömbfelszínre igaz az állítás. Ebből ismét használva hasonlóság-invarianciát, tetszőleges gömbfelszínre is igaz az állítás. $\square$

2.86. Példa. A Cantor-féle triadikus halmaz Hausdorff-dimenziója $\log_3 2$.

Bizonyítás. Jelölje C a Cantor-féle triadikus halmazt, $\mathcal{D}_\varepsilon := \{A \subset \mathbb{R} : \text{diam } A < \varepsilon\}$, $s := \log_3 2$,

$$\Sigma_{\varepsilon, s}(C) := \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^s : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), C \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\},$$

és $\mu_{\varepsilon, s}$ azon külső mértékek, melyekből $\mathcal{H}_{\mathbb{R}, s}$ származik. A 2.54. definícióban szereplő C_n -ek esetén $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ és C_n 2^n darab 3^{-n} hosszú zárt részintervallumokból áll. Jelöljük ezeket $D_1^{(n)}, \dots, D_{2^n}^{(n)}$ módon.

► Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $3^{-n(\varepsilon)} < \varepsilon$. Ekkor $D_i^{(n(\varepsilon))} \in \mathcal{D}_\varepsilon$ és $C \subset C_{n(\varepsilon)} = \bigcup_{i=1}^{2^{n(\varepsilon)}} D_i^{(n(\varepsilon))} \implies \sum_{i=1}^{2^{n(\varepsilon)}} (\text{diam } D_i^{(n(\varepsilon))})^s = \sum_{i=1}^{2^{n(\varepsilon)}} (3^{-n(\varepsilon)})^s = 2^{n(\varepsilon)} \cdot 3^{-sn(\varepsilon)} = 1 \in \Sigma_{\varepsilon, s}(C) \implies \mu_{\varepsilon, s}(C) = \inf \Sigma_{\varepsilon, s}(C) \leq 1 \implies$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}, s}(C) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\varepsilon, s}(C) \leq 1. \quad (2.24)$$

► $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon \ (i \in I), C \subset \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$, hogy

$$\mu_{\varepsilon, s}(C) + \varepsilon > \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^s. \quad (2.25)$$

Legyen $a_i := \inf A_i - \frac{\varepsilon}{2} \text{diam } A_i$ és $b_i := \sup A_i + \frac{\varepsilon}{2} \text{diam } A_i$. Ekkor $I_i := (a_i, b_i) \supset A_i$ és $\text{diam } I_i = b_i - a_i = \sup A_i - \inf A_i + \varepsilon \text{diam } A_i = (1 + \varepsilon) \text{diam } A_i \implies$

$$\sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^s = \sum_{i \in I} ((1 + \varepsilon)^{-1} \text{diam } I_i)^s = (1 + \varepsilon)^{-s} \sum_{i \in I} (\text{diam } I_i)^s.$$

Így (2.25) miatt

$$\mu_{\varepsilon, s}(C) + \varepsilon > (1 + \varepsilon)^{-s} \sum_{i \in I} (\text{diam } I_i)^s. \quad (2.26)$$

A C zárt halmazok metszete, így maga is zárt. Másrészt korlátos is, így kapjuk, hogy C kompakt. Emiatt, mivel I_i ($i \in I$) nyílt lefedése C -nek, ezért kiválasztható közülük véges sok, például $I_1, \dots, I_m$, hogy $C \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$3^{-k} \leq \min\{\text{diam } I_1, \dots, \text{diam } I_n\}.$$

Osztályozzuk az $\{I_i, \dots, I_m\}$ halmazt a következő módon:

- A H_1 osztályban legyenek azon I_j -k, melyekre $3^{-1} \leq \text{diam } I_j$.
- A H_2 osztályban legyenek azon I_j -k, melyekre $3^{-2} \leq \text{diam } I_j < 3^{-1}$.
- A H_3 osztályban legyenek azon I_j -k, melyekre $3^{-3} \leq \text{diam } I_j < 3^{-2}$.
- $\vdots$
- A H_k osztályban legyenek azon I_j -k, melyekre $3^{-k} \leq \text{diam } I_j < 3^{-(k-1)}$.

A H_l osztály elemeinek a számát jelölje N_l . Ekkor

$$\sum_{i=1}^m (\text{diam } I_i)^s \geq \sum_{l=1}^k N_l (3^{-l})^s = \sum_{l=1}^k N_l 2^{-l}. \quad (2.27)$$

Ha $I_j \in H_l$, akkor a C_l részintervallumaiból legfeljebb 2 darab van, mely metszi I_j -t. $\implies C_{l+1}$ részintervallumaiból legfeljebb 2^2 darab van, mely metszi I_j -t. $\implies C_{l+2}$ részintervallumaiból legfeljebb 2^3 darab van, mely metszi I_j -t. Ezt folytatva, kapjuk, hogy $C_k = C_{l+(k-l)}$ részintervallumaiból legfeljebb 2^{k-l+1} darab van, mely metszi I_j -t. $\implies C_k$ részintervallumaiból legfeljebb $N_l 2^{k-l+1}$ darab van, mely metszi az

$\bigcup_{I_j \in H_l} I_j$ halmazt. $\implies C_k$ részintervallumaiból legfeljebb $\sum_{l=1}^k N_l 2^{k-l+1}$ darab van, mely

metszi az $\bigcup_{i=1}^m I_j$ halmazt. De $C \subset \bigcup_{i=1}^m I_j$, így ennek a C_k minden részintervallumával

kell lennie metszetének, azaz ezek száma legalább 2^k . $\implies 2^k \leq \sum_{l=1}^k N_l 2^{k-l+1} \implies$

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{l=1}^k N_l 2^{-l} \leq \sum_{i=1}^m (\text{diam } I_i)^s \leq \sum_{i \in I} (\text{diam } I_i)^s \underset{(2.26)}{<} (1 + \varepsilon)^s (\mu_{\varepsilon, s}(C) + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

$\implies$

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (1 + \varepsilon)^s (\mu_{\varepsilon, s}(C) + \varepsilon) = \mathcal{H}_{\mathbb{R}, s}(C).$$

Ez és a (2.24) alapján $\mathcal{H}_{\mathbb{R}, s}(C) \in \mathbb{R}_+$, így a 2.76. tételből $\dim_{\mathcal{H}} C = s = \log_3 2$. $\square$

3. fejezet

Borel-mérhető halmazok

Legyenek $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$) és $\mathbb{R}_b^n := \mathbb{R}_b \times \cdots \times \mathbb{R}_b$ ($\mathbb{R}_b^1 := \mathbb{R}_b$) n -szeres Descartes-szorzatok. Jelöljük az $\mathbb{R}^n$ -beli nyílt halmazok rendszerét $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ módon. Az $\mathbb{R}^n$ -beli nyíltságot a szokásos metrika szerint értjük.

3.1. *Megjegyzés.* Ismert, hogy $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ -beli halmazok uniója, illetve véges sok $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ -beli halmaz metszete szintén $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ -beli halmaz.

A következő tételhez szükség van a sűrű halmaz fogalmára. Az $S \subset \mathbb{R}$ *sűrű halmaz* $\mathbb{R}$ -ben, ha $\mathbb{R}$ minden nyílt intervallumában végtelen sok S -beli elem van. Például $\mathbb{Q}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$ -ben.

3.2. **Tétel.** Legyen $S \subset \mathbb{R}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$ -ben, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(S) &:= \{(a, b) : a, b \in S, a < b\}, \\ \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S) &:= \{V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n : V_i \in \mathcal{I}(S) \ \forall i = 1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : I \text{ halmaz és } T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S) \ \forall i \in I \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H} := \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : I \text{ halmaz és } T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S) \ \forall i \in I \right\}$ és $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Ha $N = \emptyset$, akkor $I = \emptyset$ választással kapjuk, hogy $N \in \mathcal{H}$. Ha $N \neq \emptyset$, akkor minden $x \in N$ esetén létezik $T_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S)$, melyre $x \in T_x \subset N$ teljesül. $\implies \bigcup_{x \in N} T_x \subset N$. Másrészt, ha $x_0 \in N$, akkor $x_0 \in T_{x_0} \implies x_0 \in \bigcup_{x \in N} T_x \implies N \subset \bigcup_{x \in N} T_x \implies N = \bigcup_{x \in N} T_x \implies N \in \mathcal{H} \implies \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}$. Mivel a fordított tartalmazás triviálisan teljesül, így kapjuk az állítást. $\square$

3.3. **Tétel.** Az előző tétel jelöléseivel

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bizonyítás. $\mathcal{I}(\mathbb{Q})$ megszámlálhatóan végtelen számosságú, ezért $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})$ is az. Így a 3.2. tételből

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}) \ \forall i \in \mathbb{N} \right\} \subset \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Másrészt szintén a 3.2. tétel miatt

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ \forall i \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^n),$$

melyből kapjuk az állítást. □

3.4. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy $N_1, \dots, N_n \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ esetén $N_1 \times \dots \times N_n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

A 3.2. tétel mintájára lehetőségünk van az $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmazok definiálására metrika nélkül, topológikus úton.

3.5. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$ -ben, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_b(S) &:= \{(a, b), (c, \infty], [-\infty, d) : a, b, c, d \in S, \ a < b\}, \\ \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S) &:= \{V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n : V_i \in \mathcal{I}_b(S) \ \forall i = 1, 2, \dots, n\} \text{ és} \\ \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) &:= \left\{ \bigcup_{i \in I} T_i : I \text{ halmaz és } T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S) \ \forall i \in I \right\}. \end{aligned}$$

Ekkor az $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ elemeit az $\mathbb{R}_b^n$ *nyílt halmazainak* nevezzük. Egy $\mathbb{R}_b^n$ -beli halmazt *zártnak* nevezünk, ha komplementere nyílt.

3.6. *Megjegyzés.* $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ egyértelműen meghatározott, azaz független az S választásától. Ez abból következik, hogy ha $S, S^* \subset \mathbb{R}$ sűrű halmazok $\mathbb{R}$ -ben, és $V \in \mathcal{I}_b(S^*)$, akkor léteznek $V^{(k)} \in \mathcal{I}_b(S)$ ($k \in \mathbb{N}$) halmazok, hogy $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^{(k)}$.

3.7. *Megjegyzés.*

- ① $I = \emptyset$ választással kapjuk, hogy $\emptyset \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$.
- ② Legyenek $I := \{1, 2\} \times \dots \times \{1, 2\}$, $V_1 := [-\infty, 1)$, $V_2 := (0, \infty]$ és $T_i := V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n}$, ahol $i = (i_1, \dots, i_n) \in I$. Ekkor $\mathbb{R}_b^n = \bigcup_{i \in I} T_i$, így $\mathbb{R}_b^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$.
- ③ $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$.
- ④ $N_1, \dots, N_n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b)$ esetén $N_1 \times \dots \times N_n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$.

A következő tétel a 3.3. tételhez hasonlóan bizonyítható.

3.8. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, \mathbb{R}) \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.9. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ pontosan abban az esetben teljesül, ha $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Létezik I halmaz és $T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$ ($i \in I$), hogy $H = \bigcup_{i \in I} T_i \Rightarrow T_i \subset H \subset \mathbb{R}^n \forall i \in I \Rightarrow T_i = V_1^{(i)} \times \cdots \times V_n^{(i)}$ alakú, ahol $V_1^{(i)}, \dots, V_n^{(i)} \in \mathcal{I}_b(S)$ és egyik sem $(c, \infty]$ vagy $[-\infty, d)$ alakú $\Rightarrow V_1^{(i)}, \dots, V_n^{(i)} \in \mathcal{I}(S) \Rightarrow T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S) \forall i \in I \Rightarrow H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

► „ $\Leftarrow$ ” $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ miatt kapjuk az állítást. $\square$

3.10. Tétel. $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmazok uniója, illetve véges sok $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz metszete szintén $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Bizonyítás. ① ► Minden $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz $\mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$ -beli halmazok uniója, így $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmazok uniója is az. Vagyis $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmazok uniója $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz.

② ► a) $A, B \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b, S)$ esetén $A \cap B \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b, S)$ vagy $A \cap B = \emptyset$.

b) $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$ esetén léteznek $A_i, B_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b, S)$ ($i = 1, \dots, n$) halmazok, hogy $T_1 = A_1 \times \cdots \times A_n$ és $T_2 = B_1 \times \cdots \times B_n \Rightarrow T_1 \cap T_2 = (A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n) \Rightarrow a)$ miatt $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ vagy $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$.

c) $H_1, H_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ esetén léteznek I, J ill. $T_i^{(1)}, T_j^{(2)} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$ ($i \in I, j \in J$) halmazok, hogy $H_1 = \bigcup_{i \in I} T_i^{(1)}$ és $H_2 = \bigcup_{j \in J} T_j^{(2)} \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (T_i^{(1)} \cap T_j^{(2)}) \Rightarrow b)$ alapján $H_1 \cap H_2$ vagy üres halmaz, vagy $\mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$ -beli halmazok uniója $\Rightarrow H_1 \cap H_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$. Ebből teljes indukcióval kapjuk, hogy véges sok $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz metszete $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz. $\square$

3.11. Tétel. Ha $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor $H \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

Bizonyítás. $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ és $\mathbb{R}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) \Rightarrow$ a 3.10. tétel miatt $H \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) \Rightarrow$ a 3.9. tétel miatt $H \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

3.12. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazai által generált σ -algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ módon jelöljük, és elemeit az $\mathbb{R}^n$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük. Az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazai által generált σ -algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ módon jelöljük, és elemeit az $\mathbb{R}_b^n$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük.

3.13. *Megjegyzés.* Mivel $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$, így $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$. Másrészt minden nyílt, illetve minden zárt halmaz Borel-mérhető.

3.14. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ a következő halmazok egyike:

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}, \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}, \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}, \\ \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}, \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}, i = 1, \dots, n\}\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Speciálisan $n = 1$ esetén $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{H})$.

Bizonyítás. ► A 3.3. tételből $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \implies \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, ami az állítás az első $\mathcal{H}$ -ra.

► Ha $\mathcal{H}_1 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ és $[a_i, b_i] \in \mathcal{H}_1$ ($i = 1, \dots, n$), akkor $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times \dots \times (a_n - \frac{1}{k}, b_n)$, azaz $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\} \subset \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Másrészt $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2^k}, b_1) \times \dots \times [a_n + \frac{b_n - a_n}{2^k}, b_n)$, azaz $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\}) \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \subset \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\}) \implies \mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ választással teljesül az állítás.

► Ha $\mathcal{H}_2 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$, akkor minden $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_2, i = 1, \dots, n\}$ -beli halmaz előáll megszámlálhatóan végtelen sok $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\}$ -beli halmaz uniójaként, így

$$\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_2, i = 1, \dots, n\} \subset \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\}).$$

Másrészt minden $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\}$ -beli halmaz előáll két $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_2, i = 1, \dots, n\}$ -beli halmazok különbségként, így

$$\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_1, i = 1, \dots, n\} \subset \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{H}_2, i = 1, \dots, n\}).$$

$\implies \mathcal{H} = \mathcal{H}_2$ esetén teljesül az állítás. A többi állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

A következő tétel szerint a Borel-mérhető halmazok egyben Lebesgue- illetve Lebesgue–Stieltjes-mérhetőek is.

3.15. Tétel. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ és $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_F$, ahol $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Bizonyítás. A 2.49. tétel miatt $\mathcal{H} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \subset \mathcal{L}$. Mivel $\mathcal{L}$ σ -algebra, ezért $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}$. A 3.14. tétel miatt $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, így $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$.

A Lebesgue–Stieltjes-mérték definíciójában szereplő $\mathcal{T}$ -re teljesül a 2.66. tétel miatt, hogy $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}_F$. Mivel $\mathcal{L}_F$ σ -algebra, ezért $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}_F$. Másrészt a 3.14. tétel miatt $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, így $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_F$. $\square$

3.16. Tétel. Borel-mérhető halmazok Descartes-szorzata Borel-mérhető, azaz

- ① $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
- ② $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b)$ esetén $A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$.

Bizonyítás. ► ① feltétele esetén legyen

$$\mathcal{H} = \{U \times \mathbb{R} : U \in \mathcal{N}(\mathbb{R})\} \quad \text{és} \quad \mathcal{H}^* = \{U : U \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H})\}.$$

Ekkor $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ σ -algebra a következők miatt:

- 1) $\mathbb{R} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \implies \mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{H}) \implies \mathbb{R} \in \mathcal{H}^*$.
- 2) $A \in \mathcal{H}^*$ esetén $A \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H}) \implies \overline{A} \times \mathbb{R} = \overline{A} \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H}) \implies \overline{A} \in \mathcal{H}^*$.

3) $A_i \in \mathcal{H}^*$ ($i \in \mathbb{N}$) esetén $A_i \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H})$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times \mathbb{R}) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H}) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}^*$.

Most legyen $U \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \implies U \times \mathbb{R} \in \mathcal{H} \implies U \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H}) \implies U \in \mathcal{H}^* \implies \mathcal{N}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}^* \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}^*$, hiszen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a legszűkebb olyan σ -algebra, mely $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ -t tartalmazza, továbbá $\mathcal{H}^*$ σ -algebra. $\implies A_1 \in \mathcal{H}^* \implies A_1 \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{H})$.

Másrészt $U \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ esetén $U \times \mathbb{R} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2) \implies \mathcal{H} \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^2) \implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Így azt kaptuk, hogy $A_1 \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\mathbb{R} \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. $\implies A_1 \times A_2 = (A_1 \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times A_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ezzel $n = 2$ esetén bizonyítottuk az ① állítást. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re hasonló az eljárás.

► ② hasonlóan bizonyítható az előző ponthoz. (A 4.10. megjegyzésben adunk majd egy másik bizonyítást is erre a tételre a Borel-mérhető függvények segítségével.) $\square$

3.17. Tétel.

① $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n\})$

② $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n) = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b), i = 1, \dots, n\})$

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{H} := \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n\}.$$

A 3.3. tétel miatt $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \implies \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \implies$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})). \quad (3.1)$$

Ebből $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ miatt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}(\mathbb{R})) \supset \mathcal{I}(\mathbb{R}) \implies \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{H} \subset \sigma(\mathcal{H}) \implies \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \subset \sigma(\mathcal{H}) \implies (3.1)$ miatt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{H}). \quad (3.2)$$

Legyen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies$ 3.16. tétel miatt $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \implies \mathcal{H} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \implies (3.2)$ miatt teljesül ①. A tétel másik állítása hasonlóan bizonyítható. $\square$

A későbbiekben szükségünk lesz a Borel-mérhető halmazok rendszerének számosságára. Ennek megállapításához bevezetjük az ún. Szuszlin-operáció fogalmát.

3.18. Definíció. Jelölje $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ az $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ típusú függvények (azaz a pozitív egész értékű sorozatok) halmazát, $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ esetén legyen $s|k := (s(1), s(2), \dots, s(k))$ és $\Sigma := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$. Ha $\mathcal{A}$ egy tetszőleges halmazrendszer, akkor

$$S(\mathcal{A}) := \left\{ \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(s|k) \quad : \quad F: \Sigma \rightarrow \mathcal{A} \right\}.$$

Az $\bigcup_{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(s|k)$ halmazt az $F: \Sigma \rightarrow \mathcal{A}$ függvény *Szuszin-operációjának* nevezzük.

3.19. Tétel. $S(S(\mathcal{A})) = S(\mathcal{A})$ minden $\mathcal{A}$ halmazrendszer esetén.

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F: \Sigma \rightarrow \mathcal{A}$, $F(\sigma) = A$ Szuszlin-operációja A , így $A \in S(\mathcal{A}) \implies \mathcal{A} \subset S(\mathcal{A}) \implies S(\mathcal{A}) \subset S(S(\mathcal{A}))$. Még azt kell belátni, hogy $S(S(\mathcal{A})) \subset S(\mathcal{A})$.

Legyen $A \in S(S(\mathcal{A}))$. Ekkor létezik $F: \Sigma \rightarrow S(\mathcal{A})$, hogy $A = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(s|k)$. De $F(s|k) \in S(\mathcal{A}) \implies \exists G_{s|k}: \Sigma \rightarrow \mathcal{A}$, hogy $F(s|k) = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{l \in \mathbb{N}} G_{s|k}(t|l) \implies$

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{l \in \mathbb{N}} G_{s|k}(t|l) \right).$$

Így $x \in A$ pontosan akkor teljesül, ha $\exists s_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, melyre $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $\exists t_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, hogy $x \in G_{s_0|k}(t_k|l) \forall l \in \mathbb{N}$ -re, azaz, ha

$$\exists t_0, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \text{ hogy } x \in G_{t_0|k}(t_k|l) \forall k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Tekintsük a

$$(k, l) \mapsto 2^k(2l - 1) \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \in \mathbb{N})$$

hozzárendelést. Könnyen látható, hogy ez bijekció $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N}$ között. A (3.3) által rögzített $t_0, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ esetén legyen

$$m_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad m_0(2^k(2l - 1)) := t_k(l) \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \in \mathbb{N})$$

és

$$H(m_0|2^k(2l - 1)) := G_{t_0|k}(t_k|l) \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Vegyük észre, hogy ha az előbbi bijekciót leszűkítjük $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -re, akkor az értékkészlete a pozitív páros egészek halmaza. Természetesen ez a leszűkítés is bijekció. Mindezekből azt kapjuk, hogy $x \in A$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $H: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{2n} \rightarrow \mathcal{A}$, melyre

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \text{ hogy } x \in H(m_0|j) \forall j \text{ pozitív páros egészre.}$$

Így $\mathbb{N}'$ -vel jelölve a pozitív páros egészek halmazát, azt kapjuk, hogy

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}'} H(m|j).$$

Legyen $n \mapsto (f(n), g(n))$ egy bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ között és

$$K(p_1, \dots, p_k) := H(f(p_1), g(p_1), f(p_2), g(p_2), \dots, f(p_k), g(p_k)).$$

Ebből kapjuk, hogy $A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K(p|k) \implies A \in S(\mathcal{A}) \implies S(S(\mathcal{A})) \subset S(\mathcal{A})$. $\square$

3.20. Jelölés. Legyen $\mathcal{H}$ egy tetszőleges halmazrendszer. Ekkor

$$\mathcal{H}^\sigma := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n : H_n \in \mathcal{H} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\mathcal{H}^\delta := \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n : H_n \in \mathcal{H} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

3.21. Tétel. $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})^\sigma = S(\mathcal{A})^\delta$ minden $\mathcal{A}$ halmazrendszer esetén.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ egy tetszőleges halmazrendszer, $H_n \in \mathcal{H} \ \forall n \in \mathbb{N}$ és

$$F, G: \Sigma \rightarrow \mathcal{H}, \quad F(n_1, \dots, n_k) := H_{n_1} \quad \text{illetve} \quad G(n_1, \dots, n_k) := H_k.$$

Ekkor F Szuszlin-operációja $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \implies \mathcal{H}^\sigma \subset S(\mathcal{H})$. Másrészt $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^\sigma$ triviálisan teljesül, így

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^\sigma \subset S(\mathcal{H}). \quad (3.4)$$

$$\implies S(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{A})^\sigma \subset S(S(\mathcal{A})) = S(\mathcal{A}) \implies S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})^\sigma.$$

G Szuszlin-operációja $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n \implies \mathcal{H}^\delta \subset S(\mathcal{H})$. Másrészt $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^\delta$ triviálisan teljesül, így

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^\delta \subset S(\mathcal{H}). \quad (3.5)$$

$$\implies S(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{A})^\delta \subset S(S(\mathcal{A})) = S(\mathcal{A}) \implies S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A})^\delta. \quad \square$$

3.22. Definíció. Jelölje $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ illetve $\mathcal{Z}(\mathbb{R}_b^n)$ az $\mathbb{R}^n$ illetve $\mathbb{R}_b^n$ zárt halmazainak rendszerét. Ekkor az $S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$ illetve $S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}_b^n))$ halmazok elemeit az $\mathbb{R}^n$ illetve $\mathbb{R}_b^n$ *analitikus halmazainak* nevezzük.

3.23. Tétel. Minden Borel-mérhető halmaz analitikus, továbbá

- ① $S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)) = S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$.
- ② $S(\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)) = S(\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)) = S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}_b^n))$.

Bizonyítás. Minden zárt halmaz előáll megszámlálhatóan végtelen sok nyílt halmaz metszeteként, illetve minden nyílt halmaz előáll megszámlálhatóan végtelen sok zárt halmaz uniójaként, azaz

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)^\delta \quad \text{és} \quad \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)^\sigma. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Így } S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) &\subset S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)^\delta) \underset{\substack{\uparrow \\ (3.5)}}{\subset} S(S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n))) = S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)) \subset S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)^\sigma) \underset{\substack{\uparrow \\ (3.4)}}{\subset} \\ &\subset S(S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))) = S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) \implies \end{aligned}$$

$$S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) = S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)). \quad (3.7)$$

Legyen

$$\mathcal{H} := \{H : H, \overline{H} \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))\},$$

ahol $\overline{H} = \mathbb{R}^n \setminus H$. A (3.6) és (3.4) miatt

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)^\sigma \subset S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) \quad (3.8)$$

és

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)). \quad (3.9)$$

Ha $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, akkor (3.8) miatt $H \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$, másrészt $\overline{H} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ és (3.9) miatt $\overline{H} \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$. Így ekkor $H \in \mathcal{H}$, melyből

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}. \quad (3.10)$$

Most belátjuk, hogy $\mathcal{H}$ σ -algebra.

- 1) Mivel $\mathbb{R}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, így (3.10) miatt $\mathbb{R}^n \in \mathcal{H}$.
- 2) Ha $H \in \mathcal{H}$, akkor $\mathcal{H}$ definíciója miatt $\overline{H} \in \mathcal{H}$.
- 3) $H_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \mathbb{N}$) esetén $H_i, \overline{H_i} \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) \forall i \in \mathbb{N}$, így a 3.21. tétel miatt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$ és $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{H_i} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{H_i} \in S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))$, azaz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \in \mathcal{H}$.

Tehát $\mathcal{H}$ σ -algebra. Ebből (3.10) miatt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H} \subset S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)),$$

ami azt jelenti, hogy a Borel-mérhető halmazok analitikusak. Mivel $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \implies S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) \subset S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subset S(S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n))) = S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)) \implies$

$$S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)).$$

Ebből és (3.7) miatt ① bizonyított. A $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n) \subset S(\mathcal{Z}(\mathbb{R}_b^n))$ és ② állítások hasonlóan bizonyíthatók. $\square$

3.24. Tétel. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ illetve $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ kontinuum számosságú.

Bizonyítás. $S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = S(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)) = S(T(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})^\sigma) \overset{(3.4)}{\subset} S(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})) \subset S(\sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}))) = S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \implies S(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})) = S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Mivel $\Sigma = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ és $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})$ is megszámlálhatóan végtelen számosságú, ezért a $\Sigma \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})$ függvények halmaza kontinuum számosságú. $\implies S(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}))$ legfeljebb kontinuum számosságú $\implies S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ legfeljebb kontinuum számosságú $\implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ miatt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ legfeljebb kontinuum számosságú.

Másrészt $B := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ és B kontinuum számosságú $\implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kontinuum számosságú. A tétel másik állítása hasonlóan bizonyítható. $\square$

3.25. *Megjegyzés.* A bizonyításban felhasználtuk, hogy a $\Sigma \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q})$ függvények halmaza kontinuum számosságú. Ehhez elég belátni, hogy az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ függvények halmaza kontinuum számosságú.

Jelöljük ezt a halmazt A -val, míg azon $b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ függvényekből álló halmazt B -vel, melyekre $\{n \in \mathbb{N} : b(n) = 1\}$ felülről nem korlátos. A $b \in B$ függvényhez

rendeljük a $0, b(1)b(2) \dots$ diadikus törtet. Ez B és $(0, 1]$ között bijekció. Így B kontinuum számosságú. Mivel $B \subset A$, ezért A legalább kontinuum számosságú.

Legyen $a \in A$. Az $a(n)$ 2-es számrendszerben legyen $a_1^{(n)} a_2^{(n)} \dots a_{k_n}^{(n)}$ alakú. Az a -hoz rendeljük a $0, a_1^{(1)} \dots a_{k_1}^{(1)} 2 a_1^{(2)} \dots a_{k_2}^{(2)} 2 a_1^{(3)} \dots a_{k_3}^{(3)} 2 \dots$ triadikus törtet. Ez invertálható függvény, ezért létezik $\mathbb{R}$ -nek olyan részhalmaza, mellyel A azonos számosságú. Így A legfeljebb kontinuum számosságú. Ebből már következik, hogy A kontinuum számosságú.

4. fejezet

Mérhető függvények

4.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek és $f: A \rightarrow Y$ ($A \subset X$). Az f **$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető függvény**, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$.

4.2. Megjegyzés. Az előző definíció jelöléseivel, ha f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető függvény, akkor $Y \in \mathcal{B}$ miatt $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$, azaz f értelmezési tartománya mérhető halmaz.

4.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f: A \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ ($A \subset X$, $n \in \mathbb{N}$). Az f **$\mathcal{A}$ -mérhető függvény**, ha $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n))$ -mérhető, azaz $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$. Ha μ az $\mathcal{A}$ -n értelmezett mérték és f $\mathcal{A}$ -mérhető, akkor azt is mondjuk, hogy f **μ -mérhető**.

4.4. Definíció. Legyen $f: H \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ ($H \subset \mathbb{R}_b^k$, $k, n \in \mathbb{N}$). Az f **Borel-mérhető függvény**, ha $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^k)$ -mérhető, azaz, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^k) \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$.

4.1. Mérhető függvények tulajdonságai

Definíció szerint egy függvény $\mathcal{A}$ -mérhetőségéhez az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazai által generált σ -algebra elemeit kell megvizsgálni. A következő tétel azt állítja, hogy valójában elég csak az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazait vizsgálni. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára.

4.5. Lemma. Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $A \in \mathcal{A}$, Y egy halmaz, $f: A \rightarrow Y$ és

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

akkor $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér.

Bizonyítás. $\blacktriangleright f^{-1}(Y) = A \in \mathcal{A} \implies Y \in \mathcal{B}$.

$\blacktriangleright B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = A \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies \overline{B} \in \mathcal{B}$.

$\blacktriangleright B_i \in \mathcal{B}$ ($i \in \mathbb{N}$) esetén $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$. Mindezekből következik az állítás. $\square$

4.6. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f: A \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ ($A \subset X$, $n \in \mathbb{N}$). Az f pontosan akkor $\mathcal{A}$ -mérhető, ha $f^{-1}(H) \in \mathcal{A} \forall H \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmazra.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Minden $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt halmaz eleme $\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ -nek, így ez az irány triviális.

► „ $\Leftarrow$ ” Az $\mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz $\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}_b^n) = A \in \mathcal{A} \Rightarrow$ a 4.5. lemma miatt

$$\mathcal{B} := \{B \subset \mathbb{R}_b^n : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

σ -algebra. Legyen $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) \Rightarrow f^{-1}(H) \in \mathcal{A} \Rightarrow H \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n) \subset \mathcal{B}$, azaz $\mathcal{B}$ olyan σ -algebra, mely tartalmazza $\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ -t $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n) = \sigma(\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)) \subset \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$ esetén $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ $\mathcal{A}$ -mérhető. $\square$

4.7. Definíció. Legyen $f: H \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ ($H \subset \mathbb{R}_b^k$, $k, n \in \mathbb{N}$) és $x_0 \in H$. Az f x_0 -ban *folytonos*, ha minden $f(x_0)$ -át tartalmazó $\mathbb{R}_b^n$ -beli nyílt U halmaz esetén van olyan x_0 -át tartalmazó $\mathbb{R}_b^k$ -beli nyílt V halmaz, melyre $f(V) \subset U$ teljesül. Az f folytonos, ha H minden pontjában folytonos.

Ha $H \subset \mathbb{R}^k$ és $R_f \subset \mathbb{R}^n$, akkor az előző definíció ekvivalens a folytonosság korábban tanult definíciójával, ugyanis $x \in T \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ esetén x -nek létezik olyan környezete, amely részhalmaza T -nek.

4.8. Tétel. Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}_b^k$ nyílt. Az $f: H \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ függvény pontosan akkor folytonos, ha $f^{-1}(A)$ nyílt $\forall A \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz esetén.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Legyen $A \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz. Ha $f^{-1}(A) = \emptyset$, akkor kész. Ha $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, akkor legyen $x \in f^{-1}(A)$, azaz $f(x) \in A \Rightarrow$ folyt. miatt $\exists V_x \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt halmaz, hogy $x \in V_x$ és $f(V_x) \subset A \Rightarrow f(V_x \cap H) \subset A \Rightarrow V_x \cap H \subset H$ miatt $x \in V_x \cap H \subset f^{-1}(A)$. Így $f^{-1}(A) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H) \Rightarrow f^{-1}(A)$ nyílt $\Rightarrow$ állítás.

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $x \in H$ és $A \subset \mathbb{R}_b^n$ olyan nyílt halmaz, melyre $f(x) \in A$. Ekkor $V := f^{-1}(A)$ választással V nyílt, $x \in V$ és $f(V) \subset A \Rightarrow f$ x -ben folytonos. $\square$

4.9. Tétel. Ha $k, n \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}_b^k$ nyílt és $f: H \rightarrow \mathbb{R}_b^n$ folytonos, akkor f Borel-mérhető.

Bizonyítás. Ha $A \subset \mathbb{R}_b^n$ nyílt, akkor a 4.8. tétel miatt $f^{-1}(A)$ nyílt $\Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b^k) \Rightarrow$ a 4.6. tétel miatt f Borel-mérhető. $\square$

4.10. Megjegyzés. A 3.16. tétel bizonyítása azon alapult, hogy $A \times \mathbb{R}$ Borel-mérhető, ha A Borel-mérhető. Ezt a 4.9. tétellel egyszerűen bizonyíthatjuk, hiszen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := x$ függvény folytonos, így Borel-mérhető, melyből ha A Borel-mérhető, akkor $f^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$ is az.

A következőkben gyakran fogunk találkozni a „majdnem mindenütt” fogalommal. Most ezt definiáljuk.

4.11. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $H, L \subset X$, $\ell: L \rightarrow \{\text{igaz}, \text{hamis}\}$ ún. *logikai függvény*, és legyen

$$H(\ell) := H \cap \{x \in L : \ell(x) = \text{igaz}\},$$

azaz $H(\ell)$ a H azon pontjainak halmaza, melyben ℓ értelmezett és értéke igaz. Azt mondjuk, hogy ℓ *μ -majdnem mindenütt* teljesül a H halmazon, ha

$$H \setminus H(\ell) \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mu(H \setminus H(\ell)) = 0,$$

azaz a H azon pontjainak halmaza, melyben ℓ nincs értelmezve vagy az értéke hamis, mérhető és mértéke 0. Ha ℓ μ -majdnem mindenütt teljesül az X halmazon, akkor azt mondjuk, hogy ℓ μ -majdnem mindenütt (vagy röviden majdnem mindenütt) teljesül. Rövidítése: *μ -m.m.* (illetve *m.m.*).

Könnyen látható, hogy ℓ pontosan akkor teljesül m.m., ha

$$X(\ell) \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mu(\overline{X(\ell)}) = 0.$$

Például legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{x}$ és

$$\ell: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{\text{igaz}, \text{hamis}\}, \quad \ell(x) := \begin{cases} \text{igaz}, & \text{ha } f(x) < g(x), \\ \text{hamis}, & \text{ha } f(x) \geq g(x). \end{cases}$$

Az ℓ logikai függvényt a továbbiakban $f < g$ módon jelöljük. Ekkor $H := [0, 1]$ esetén $H(f < g) = (0, 1) \implies H \setminus H(f < g) = \{0, 1\} \implies f < g$ λ -m.m. $[0, 1]$ -en, ahol λ a Lebesgue-mérték.

Vegyük észre, hogy $H(f \geq g) = \{1\}$ vagyis $H(f \geq g) \subset H \setminus H(f < g)$. Ez általánosságban is teljesül. Ha ℓ egy logikai függvény, és $\neg\ell$ olyan függvény, melyre $(\neg\ell)(x) = \text{igaz}$, amennyiben $\ell(x) = \text{hamis}$, és viszont, akkor $H(\neg\ell) \subset H \setminus H(\ell)$. Ez abból következik, hogy $H \setminus H(\ell)$ a $H(\neg\ell)$ elemein kívül a H azon pontjait is tartalmazza, melyekben ℓ nincs értelmezve: $H \setminus H(\ell) = H(\neg\ell) \cup (H \setminus L)$, ahol L az ℓ értelmezési tartománya. Ebből az is látható, hogy $H \subset L$ esetén $H \setminus H(\ell) = H(\neg\ell)$.

4.12. Lemma. Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek, $f: A \rightarrow Y$ ($A \subset X$) és $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) olyan rendszer, melyre $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Ha f -nek az $A \cap A_i$ -re vett leszűkítése $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető $\forall i \in I$, akkor f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető.

Bizonyítás. Jelölje f_i az f -nek az $A \cap A_i$ -re vett leszűkítését. Ekkor $B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(B) \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(f_i^{-1}(B) \cap A_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. $\square$

4.13. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, $f: A \rightarrow Y$ ($A \subset X$) és $g: H \rightarrow Y$ ($H \subset X$). Ha g $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető és $f = g$ m.m., akkor f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető.

Bizonyítás. $A_1 := X \setminus X(f = g) \in \mathcal{A}$ és $\mu(A_1) = 0 \implies A_2 := X(f = g) = \overline{A_1} \in \mathcal{A}$. Legyen f_1 ill. f_2 f -nek az $A \cap A_1$ -re ill. $A \cap A_2$ -re vett leszűkítése. Ekkor $B \in \mathcal{B}$ esetén $f_1^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A_1 \subset A_1 \implies$ teljesség miatt $f_1^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies f_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető. $f_2^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A_2 = \underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}} \cap A_2 \in \mathcal{A} \implies f_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető. $\implies$ 4.12. lemma alapján $f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető. $\square$

4.14. Tétel. Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ mérhető terek, $f: A \rightarrow Y$ ($A \subset X$) és $g: B \rightarrow Z$ ($B \subset Y$). Ha $f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető és $g(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ -mérhető, akkor $g \circ f(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ -mérhető.

Bizonyítás. $C \in \mathcal{C}$ esetén $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}}\right) \in \mathcal{A} \implies$ állítás. $\square$

4.15. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $n \in \mathbb{N}$, $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($A \subset X$, $i = 1, 2, \dots, n$) és

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}_b^n, \quad f(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Az f pontosan akkor $\mathcal{A}$ -mérhető, ha f_i $\mathcal{A}$ -mérhető $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\implies$ ” Legyen $g_i: \mathbb{R}_b^n \rightarrow \mathbb{R}_b$, $g_i(y_1, \dots, y_n) := y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Mivel a g_i függvények nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, ezért a 4.9. tétel miatt Borel-mérhetőek is. $\implies$ 4.14. tétel alapján $f_i = g_i \circ f$ $\mathcal{A}$ -mérhető.

$\blacktriangleright$ „ $\impliedby$ ” $T \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, \mathbb{R})$ esetén $T = V_1 \times \dots \times V_n$ alakú, ahol $V_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b, \mathbb{R}) \forall i = 1, \dots, n \implies V_i$ nyílt, így Borel-mérhető is $\implies f_i$ $\mathcal{A}$ -mérhetősége miatt

$$f_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{A} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Másrészt $x \in f^{-1}(T) \iff f(x) \in T \iff f_i(x) \in V_i \forall i = 1, \dots, n \iff x \in f_i^{-1}(V_i) \forall i = 1, \dots, n \iff x \in f_1^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(V_n)$. Tehát

$$f^{-1}(T) = f_1^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(V_n) \underset{\substack{\uparrow \\ (4.1)}}{\in} \mathcal{A}. \quad (4.2)$$

A 3.3. tétel miatt $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$ esetén $\exists T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, \mathbb{R})$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \implies$

$$f^{-1}(H) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(T_i)}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ \uparrow \\ (4.2)}} \in \mathcal{A} \implies \text{4.6. tétel miatt } f \text{ } \mathcal{A}\text{-mérhető.} \quad \square$$

4.16. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f: A \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($A \subset X$) és $g: B \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($B \subset X$). Ha f és g $\mathcal{A}$ -mérhetőek, akkor cf ($c \in \mathbb{R}_b$), $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f + g$, fg függvények $\mathcal{A}$ -mérhetőek.

Bizonyítás. Tekintsük a következő függvényeket:

$$\begin{aligned} h_1: \mathbb{R}_b &\rightarrow \mathbb{R}_b, & h_1(x) &:= cx \\ h_2: \mathbb{R}_b &\rightarrow \mathbb{R}_b, & h_2(x) &:= |x| \\ h_3: \mathbb{R}_b \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}_b, & h_3(x) &:= \frac{1}{x} \\ t_1: \mathbb{R}_b^2 &\rightarrow \mathbb{R}_b, & t_1(x_1, x_2) &:= \max\{x_1, x_2\} \\ t_2: \mathbb{R}_b^2 &\rightarrow \mathbb{R}_b, & t_2(x_1, x_2) &:= x_1 + x_2 \\ t_3: \mathbb{R}_b^2 &\rightarrow \mathbb{R}_b, & t_3(x_1, x_2) &:= x_1 x_2 \\ h: A \cap B &\rightarrow \mathbb{R}_b^2, & h(x) &:= (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Ezen függvények a h kivételével nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, így Borel-mérhetőek, a h pedig a 4.15. tétel miatt $\mathcal{A}$ -mérhető. Ebből a 4.14. tétel miatt a következő függvények $\mathcal{A}$ -mérhetőek: $cf = h_1 \circ f$, $|f| = h_2 \circ f$, $\frac{1}{f} = h_3 \circ f$, $\max\{f, g\} = t_1 \circ h$, $f + g = t_2 \circ h$, $fg = t_3 \circ h$. $\square$

4.17. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f: A \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($A \in \mathcal{A}$) és $S \subset \mathbb{R}$ sűrű $\mathbb{R}$ -ben. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- ① f $\mathcal{A}$ -mérhető,
- ② $X(f > a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$,
- ③ $X(f < a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$,
- ④ $X(f \geq a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$,
- ⑤ $X(f \leq a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$.

Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor $X(f = a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$.

Bizonyítás. ► Legyenek $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x < y$. Ekkor $\exists x_n, y_n, z_n \in S$, $x_n < y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), melyekre teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} 1) \quad (x, \infty] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, \infty], \text{ azaz } f^{-1}((x, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((x_n, \infty]) \\ 2) \quad [-\infty, z) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, z_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(z_n, \infty]}, \text{ azaz } f^{-1}([-\infty, z)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{f^{-1}((z_n, \infty])} \\ 3) \quad (x, y) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(x_n, \infty] \setminus (y_n, \infty)], \text{ azaz } f^{-1}((x, y)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f^{-1}((x_n, \infty]) \setminus f^{-1}((y_n, \infty])] \end{aligned}$$

Ha ② teljesül, akkor $X(f > a) = f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A} \forall a \in S$, így az 1), 2), 3) pontok miatt, ha $T \in \mathcal{I}_b(\mathbb{R})$, akkor $f^{-1}(T) \in \mathcal{A}$. Másrészt $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_b)$ esetén $\exists T_i \in \mathcal{I}_b(\mathbb{R})$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, azaz $f^{-1}(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(T_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \implies$ 4.6. tétel

miatt f $\mathcal{A}$ -mérhető $\implies$ „② $\Rightarrow$ ①”.

► $X(f > a) = f^{-1}((a, \infty])$ és $(a, \infty] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b) \implies$ „① $\Rightarrow$ ②”.

► Az „① $\Leftrightarrow$ ③” hasonlóan bizonyítható, mint az „① $\Leftrightarrow$ ②”.

► $X(f > a) = A \setminus X(f \leq a) \implies$ „② $\Leftrightarrow$ ⑤”. Hasonlóan teljesül „③ $\Leftrightarrow$ ④”.

► Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor az előbbiek miatt ④ és ⑤ is igaz $\implies X(f = a) = X(f \geq a) \cap X(f \leq a) \in \mathcal{A} \forall a \in S$. $\square$

4.18. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \nu)$ teljes mértéktér, $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ és $c \in \mathbb{R}_b$. Ha $f = c$ m.m., akkor f μ -mérhető.

Bizonyítás. $H := X(f \neq c)$ jelöléssel $H \in \mathcal{A}$ és $\mu(H) = 0$. Ha $a \in (c, \infty]$, akkor $X(f < a) = \underbrace{X(f < c)}_{A:=} \cup \underbrace{X(f = c)}_{\overline{H} \in \mathcal{A}} \cup \underbrace{X(c < f < a)}_{B:=}$. Mivel $A \subset H$ és $B \subset H$, továbbá μ teljes, ezért $A, B \in \mathcal{A} \implies X(f < a) \in \mathcal{A}$. Ha $a \in [-\infty, c]$, akkor $X(f < a) \subset H$, így μ teljessége miatt $X(f < a) \in \mathcal{A}$. Ebből a 4.17. tétel miatt f μ -mérhető. $\square$

4.2. Mérhető függvények sorozatai

Az alábbi tétel szerint egy mérhető függvényekből álló sorozat határfüggvénye – és így a konvergenciatartománya is – mérhető.

4.19. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\mathcal{A}$ -mérhető függvények és $A := \{x \in X : f_n(x) \text{ konvergens}\}$. Ekkor $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ $\mathcal{A}$ -mérhető.

Bizonyítás. ① ► Legyen $V \subset \mathbb{R}$ korlátos nyílt intervallum és A_j ($j \in \mathbb{N}$) azon pontok halmaza, melyeknek $\overline{V}$ -től való távolsága nagyobb mint $\frac{1}{j}$. Ekkor könnyen látható, hogy A_j nyílt intervallum vagy üres halmaz minden $j \in \mathbb{N}$ esetén. Így $f_k^{-1}(A_j) \in \mathcal{A} \forall k, j \in \mathbb{N}$.

► Legyen $x \in f^{-1}(V) \implies f(x) \in V \implies V$ nyílt halmaz, így $\exists j_0 \in \mathbb{N}$, hogy $(f(x) - \frac{3}{j_0}, f(x) + \frac{3}{j_0}) \subset V$, azaz $|f(x) - y| \geq \frac{3}{j_0} \forall y \in \overline{V}$. Másrészt f_n konvergenciája miatt $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{j_0} \forall k \geq n_0 \implies \forall y \in \overline{V}$ és $\forall k \geq n_0$ esetén $|f_k(x) - y| = |(f_k(x) - f(x)) - (y - f(x))| \geq \underbrace{|f_k(x) - f(x)| - |f(x) - y|}_{\geq \frac{3}{j_0}} - \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{< \frac{1}{j_0}} > \frac{2}{j_0} \implies \inf\{|f_k(x) - y| : y \in \overline{V}\} \geq \frac{2}{j_0} > \frac{1}{j_0} \forall k \geq n_0 \implies f_k(x) \in A_{j_0}$

$\forall k \geq n_0 \implies x \in f_k^{-1}(A_{j_0}) \forall k \geq n_0 \implies x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} f_k^{-1}(A_{j_0}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}(A_j) \implies$

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}(A_j). \quad (4.3)$$

► Legyen $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}(A_j) \implies \exists j_0, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} f_k^{-1}(A_{j_0}) \implies x \in f_k^{-1}(A_{j_0}) \forall k \geq n_0 \implies f_k(x) \in A_{j_0} \forall k \geq n_0 \implies \inf\{|f_k(x) - y| : y \in \overline{V}\} > \frac{1}{j_0} \forall k \geq n_0 \implies |f_k(x) - y| > \frac{1}{j_0} \forall y \in \overline{V}$ és $\forall k \geq n_0$. Másrészt f_n konvergenciája miatt $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2j_0} \forall k \geq n_1 \implies \forall y \in \overline{V}$ és $\forall k \geq \max\{n_0, n_1\}$

esetén $|f(x) - y| = |(f(x) - f_k(x)) - (y - f_k(x))| \geq ||f_k(x) - f(x)| - |f_k(x) - y|| =$
 $= \underbrace{|f_k(x) - y|}_{> \frac{1}{2j_0}} - \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{< \frac{1}{2j_0}} > \frac{1}{2j_0} \implies \inf\{|f(x) - y| : y \in \bar{V}\} \geq \frac{1}{2j_0} > 0 \implies$
 $f(x) \in V$ (hiszen $f(x) \in \bar{V}$ esetén $f(x)$ -nek $\bar{V}$ -től való távolsága 0) $\implies x \in f^{-1}(V)$
 $\implies (4.3)$ miatt

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}.$$

② ► Ha $N \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt halmaz, akkor létezik $I \subset \mathbb{N}$ és $V_i \in \mathcal{I}(\mathbb{Q})$ ($i \in I$),
 hogy $N = \bigcup_{i \in I} V_i \implies f^{-1}(N) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) \in \mathcal{A} \implies 4.6.$ tétel miatt f $\mathcal{A}$ -mérhető. $\square$
 ①

4.20. *Megjegyzés.* A 4.19. tétel és a 4.2. megjegyzés miatt, ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\mathcal{A}$ -mérhető függvények, akkor $\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergens}\} \in \mathcal{A}$, azaz a konvergenciatartomány mérhető.

4.21. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ha az f_n -ek $\mathcal{A}$ -mérhetőek $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, akkor $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim_n f_n$ és $\underline{\lim}_n f_n$ is $\mathcal{A}$ -mérhetőek.*

Bizonyítás. ► Vegyük észre, hogy a tételben szereplő függvények mindegyikének X az értelmezési tartománya. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$.

Ha $x \in X\left(\sup_{k \geq n} f_k > a\right) \implies \sup\{f_k(x) : k \geq n\} > a \implies \exists k_0 \geq n$, hogy $f_{k_0}(x) > a$
 $\implies x \in X(f_{k_0} > a) \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} X(f_k > a).$

Ha $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} X(f_k > a) \implies \exists k_0 \geq n$, hogy $x \in X(f_{k_0} > a) \implies f_{k_0}(x) > a \implies$
 $\sup\{f_k(x) : k \geq n\} \geq f_{k_0}(x) > a \implies x \in X\left(\sup_{k \geq n} f_k > a\right).$

Így $X\left(\sup_{k \geq n} f_k > a\right) = \bigcup_{k=n}^{\infty} X(f_k > a) \forall a \in \mathbb{R}$ és $\forall n \in \mathbb{N} \implies f_k$ $\mathcal{A}$ -mérhetősége és
 a 4.17. tétel miatt $\sup_{k \geq n} f_k$ $\mathcal{A}$ -mérhető $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $\implies \sup_k f_k$ $\mathcal{A}$ -mérhető.

► Hasonlóan kapjuk, hogy $X\left(\inf_{k \geq n} f_k < a\right) = \bigcup_{k=n}^{\infty} X(f_k < a) \forall a \in \mathbb{R}$ és $\forall n \in \mathbb{N} \implies$
 $\inf_{k \geq n} f_k$ $\mathcal{A}$ -mérhető $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $\implies \inf_k f_k$ $\mathcal{A}$ -mérhető.

► $g_n := \sup_{k \geq n} f_k$ az előzőek miatt $\mathcal{A}$ -mérhető minden $n \in \mathbb{N}$ -re, így ismét az előzőek
 miatt $\lim_n f_n = \inf_n g_n$ is $\mathcal{A}$ -mérhető. Hasonlóan $\underline{\lim}_n f_n$ is $\mathcal{A}$ -mérhető. $\square$

4.22. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér és $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ha az f_n -ek μ -mérhetőek $\forall n \in \mathbb{N}$ -re és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ m.m., akkor f μ -mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $A := X \setminus X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f\right)$. Ekkor $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ha $x \in \bar{A} = X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f\right) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \implies$ 1.9. tétel miatt $\overline{\lim} f_n(x) = f(x) \implies x \in X\left(\overline{\lim} f_n = f\right) \implies \bar{A} \subset X\left(\overline{\lim} f_n = f\right) \implies X \setminus X\left(\overline{\lim} f_n = f\right) \subset A \implies \mu\left(X \setminus X\left(\overline{\lim} f_n = f\right)\right) = 0 \implies \overline{\lim} f_n = f$ m.m. $\implies$ a 4.21. tétel szerint $\overline{\lim} f_n$ μ -mérhető, így a 4.13. tétel miatt f is μ -mérhető. $\square$

4.23. Tétel (Jegorov-tétel). Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ m.m. Ekkor $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$ -hoz $\exists A \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(\bar{A}) < \delta$ és az f_n egyenletesen konvergál f -hez az A -n, azaz $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{és} \quad \forall n > N.$$

Bizonyítás. Legyen $\delta \in \mathbb{R}_+$ rögzített, melyhez először megkonstruáljuk az A halmazt. Legyen

$$A_{ij} := \bigcup_{n=j}^{\infty} X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{i}\right) \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $A_{ij} \in \mathcal{A} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$. Ha $x \in X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f\right)$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \implies \exists N\left(\frac{1}{i}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N\left(\frac{1}{i}\right)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \implies j > N\left(\frac{1}{i}\right)$ -re $x \notin A_{ij} \implies x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{ik} \implies \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{ik}}_{\in \mathcal{A}} \subset \underbrace{X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq f\right)}_{\mu\text{-mértéke } 0} \implies \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{ik}\right) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ a monotonitás miatt. Mivel $A_{i1} \supset A_{i2} \supset \dots \quad \forall i \in \mathbb{N}$, így felhasználva a mértéktér végességét és a mérték folytonosságát $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_{ij}) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{ik}\right) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \forall i$ -hez $\exists j_i$, hogy $\mu(A_{ij_i}) < \frac{\delta}{2^i}$. Legyen

$$A := \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij_i}}.$$

$$\text{Ekkor } \mu(\bar{A}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij_i}\right) \underset{\text{szubadd.}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ij_i}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

Még azt kell belátni, hogy A -n egyenletes a konvergencia. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Az $i \in \mathbb{N}$ legyen úgy rögzítve, hogy $\frac{1}{i} < \varepsilon$ teljesüljön. Ekkor, ha $x \in A \implies x \notin A_{ij_i} = \bigcup_{n=j_i}^{\infty} X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{i}\right) \implies x \notin X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{i}\right) \quad \forall n \geq j_i \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon \quad \forall n \geq j_i \implies$ állítás. $\square$

4.24. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények. Azt mondjuk, hogy f_n μ -*mértékben konvergál* f -hez, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(X\left(|f_n - f| > \varepsilon\right)\right) = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+.$$

Ez a definíció korrekt, hiszen $X(|f_n - f| > \varepsilon) \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$ és $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén. Legyen $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^0(\mu)$ az X -et $\mathbb{R}$ -be képező μ -mérhető függvények osztálya, és

$$R := \{(f, g) : f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^0(\mu), f = g \text{ } \mu\text{-m.m.}\}.$$

Ekkor R ekvivalenciareláció. Tekintsük az R által létrehozott ekvivalenciaosztályozást az $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^0(\mu)$ -nek. Az $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$ halmaz tartalmazzon minden osztályból pontosan egy függvényt.

4.25. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és*

$$d: \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(f, g) := \inf \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \mu(X(|f - g| > \varepsilon)) \leq \varepsilon \right\}.$$

Ekkor $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu), d)$ metrikus tér, továbbá $f, f_n \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén f_n pontosan akkor konvergál μ -mértékben f -hez, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$.

Az előző állítást úgy is szokták mondani, hogy a mértékbeli konvergencia metrizálható.

Bizonyítás. ► Legyen $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$, $\varepsilon_0 := d(f, g)$, ε_n olyan sorozat, melyre $\varepsilon_n \geq \varepsilon_0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$ és $\mu(X(|f - g| > \varepsilon_n)) \leq \varepsilon_n \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor $X(|f - g| > \varepsilon_1) \subset X(|f - g| > \varepsilon_2) \subset \dots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} X(|f - g| > \varepsilon_n) = X(|f - g| > \varepsilon_0)$. Így a mérték folytonossága miatt $\mu(X(|f - g| > \varepsilon_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X(|f - g| > \varepsilon_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$, azaz

$$\mu(X(|f - g| > d(f, g))) \leq d(f, g) \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu). \quad (4.4)$$

Legyen $f, g, h \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(f, g) + d(g, h) &\underset{\substack{\uparrow \\ (4.4)}}{\geq} \mu(X(|f - g| > d(f, g))) + \mu(X(|g - h| > d(g, h))) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\geq} \\ &\geq \mu(X(|f - g| > d(f, g)) \cup X(|g - h| > d(g, h))). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Legyen $x \in X(|f - h| > d(f, g) + d(g, h))$ azaz $|f(x) - h(x)| > d(f, g) + d(g, h)$. Ha ekkor $|f(x) - g(x)| \leq d(f, g)$ és $|g(x) - h(x)| \leq d(g, h)$ is teljesülne, akkor $|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq d(f, g) + d(g, h)$, ami ellentmondás. Így ilyen x -re $|f(x) - g(x)| > d(f, g)$ vagy $|g(x) - h(x)| > d(g, h)$, azaz $X(|f - h| > d(f, g) + d(g, h)) \subset X(|f - g| > d(f, g)) \cup X(|g - h| > d(g, h))$.

Így μ monotonitása és (4.5) miatt $d(f, g) + d(g, h) \geq \mu(X(|f - h| > d(f, g) + d(g, h))) \underset{\substack{\uparrow \\ d \text{ def.}}}{\geq} d(f, h)$, azaz d -re teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

Ha $d(f, g) = 0$, akkor (4.4) miatt $\mu\left(X(|f - g| > 0)\right) = 0 \implies \mu(X(f \neq g)) = 0 \implies f = g$.

Ha $f = g$, akkor $\mu\left(X(|f - g| > \varepsilon)\right) = 0 < \varepsilon \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies d(f, g) = 0$.

A $d(f, g) \geq 0$ és $d(f, g) = d(g, f)$ tulajdonságok triviálisan teljesülnek. Ezzel bizonyítottuk, hogy $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu), d)$ metrikus tér.

► Most tegyük fel, hogy $f, f_n \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$), és f_n μ -mértékben konvergál f -hez, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(X(|f_n - f| > \varepsilon)\right) = 0 \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$n \geq N$ esetén $\mu\left(X(|f_n - f| > \varepsilon)\right) < \varepsilon \implies d(f_n, f) \leq \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$.

► Megfordítva, ha $f, f_n \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$), és $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$, akkor $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $d(f_n, f) < \min\{\varepsilon, \delta\} \implies$

$\mu\left(X(|f_n - f| > \varepsilon)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon.}}}{\leq} \mu\left(X(|f_n - f| > \min\{\varepsilon, \delta\})\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon.}}}{\leq} \mu\left(X(|f_n - f| > d(f_n, f))\right) \underset{(4.4)}{\leq} d(f_n, f) < \min\{\varepsilon, \delta\} \leq \delta \forall n \geq N \implies f_n \text{ } \mu\text{-mértékben konvergál } f\text{-hez.}$ □

4.26. Tétel (Lebesgue-tétel). Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ m.m. Ekkor f_n μ -mértékben konvergál f -hez.

Bizonyítás. Legyenek $\delta \in \mathbb{R}_+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies$ Jegorov-tétel miatt $\exists A \in \mathcal{A}$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(\overline{A}) < \delta$ és $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$ és $\forall n > N \implies A \subset X(|f_n - f| < \varepsilon) \forall n > N \implies X(|f_n - f| > \varepsilon) \subset X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset \overline{A} \forall n > N \implies$

$\mu\left(X(|f_n - f| > \varepsilon)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon.}}}{\leq} \mu(\overline{A}) < \delta \quad \forall n > N \implies \text{állítás.}$ □

4.27. Tétel (Riesz-féle kiválasztási tétel). Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények és f_n μ -mértékben konvergál f -hez, akkor f_n -nek létezik olyan f_{n_k} részsorozata, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$ m.m.

Bizonyítás. $\delta \in \mathbb{R}_+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\mu\left(X(|f_n - f| > \varepsilon)\right) < \delta \forall n > N \implies \varepsilon = \frac{1}{k}$ és $\delta = \frac{1}{2^k}$ választással $\forall k \in \mathbb{N}$ -hez $\exists N_k \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mu\left(X\left(|f_n - f| > \frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k} \quad \forall n > N_k.$$

Így $\exists n_1 < n_2 < \dots$ pozitív egészekből álló sorozat, hogy

$$\underbrace{\mu\left(X\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right)\right)}_{B_k :=} < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Legyen $A_i := \bigcup_{k=i}^{\infty} B_k$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$ és $\mu(A_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(B_k) \underset{\text{szubadd.}}{<} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} \implies \mu\left(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}_{A:=}\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0 \implies \mu(A) = 0.$

Ha $x \in \overline{A} \implies x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \implies \exists n_0$, hogy $x \in \overline{A_{n_0}} = \bigcap_{k=n_0}^{\infty} \overline{B_k} \implies x \in \overline{B_k} \forall k \geq n_0 \implies |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \forall k \geq n_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \implies x \in X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right) \implies \overline{A} \subset X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right) \implies X \setminus X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right) \subset A.$

Legyen $H := \{x \in X : f_{n_k}(x) \text{ konvergens}\}$ és $g: H \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$. Ekkor a 4.19. tétel miatt g μ -mérhető $\implies g - f$ μ -mérhető $\implies X(g - f = 0) = X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right) \in \mathcal{A} \implies X \setminus X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right) \in \mathcal{A}$, így a monotonitás miatt $\mu\left(X \setminus X\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f\right)\right) \leq \mu(A) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$ m.m. $\square$

4.28. Definíció. A véges értékkészletű függvényeket *egyszerű függvényeknek* nevezzük. Speciálisan, ha X egy halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt az A *indikátorának* nevezzük.

4.29. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $A \subset X$. A χ_A pontosan akkor $\mathcal{A}$ -mérhető, ha $A \in \mathcal{A}$.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\implies$ ” $A = X(\chi_A = 1) \in \mathcal{A}$.

$\blacktriangleright$ „ $\impliedby$ ” $X(\chi_A < a) = \emptyset$, ha $a \leq 0$, $X(\chi_A < a) = \overline{A}$, ha $0 < a \leq 1$ és $X(\chi_A < a) = X$, ha $a > 1 \implies X(\chi_A < a) \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R} \implies \chi_A$ $\mathcal{A}$ -mérhető. $\square$

4.30. Megjegyzés. Ha $s: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ egyszerű függvény és $R_s = \{y_1, \dots, y_n\}$, akkor

$$s = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{A_i},$$

ahol $A_i = X(s = y_i)$. Ha s mérhető függvény, akkor az A_i ($i = 1, \dots, n$) halmazok mérhetőek, így a χ_{A_i} ($i = 1, \dots, n$) indikátorok is mérhetőek. Az állítás fordítottja is teljesül, azaz véges sok mérhető indikátor lineáris kombinációja mérhető egyszerű függvény.

4.31. Tétel (Approximációs tétel). Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f: X \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{A}$ -mérhető, akkor léteznek $s_n: X \rightarrow [0, \infty)$ ($n \in \mathbb{N}$) $\mathcal{A}$ -mérhető egyszerű függvények, melyekre $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $s_0: X \rightarrow [0, \infty)$, $s_0(x) := 0$,

$$A_n := X \left(f \geq s_{n-1} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{és} \quad s_n := s_{n-1} + \frac{1}{n} \chi_{A_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az s_n függvények triviálisan olyan $\mathcal{A}$ -mérhető egyszerű függvények, melyekre $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ teljesül. Be fogjuk látni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$. Legyen $x \in X$.

$$\text{Ha } f(x) = \infty \implies x \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \chi_{A_n}(x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies s_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty = f(x).$$

Ha $f(x) < \infty$, akkor belátjuk, hogy végtelen sok n -re $x \notin A_n$. Ezzel ellentétben tegyük fel, hogy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $x \in A_n \quad \forall n \geq n_0$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = s_{n_0-1}(x) + \sum_{i=n_0}^n \frac{1}{i} \quad \forall n \geq n_0, \quad (4.7)$$

$$\text{így } n \geq n_0 \text{ esetén } \infty > f(x) \geq \underset{x \in A_n}{s_{n-1}(x)} + \frac{1}{n} = \underset{\chi_{A_n}(x)=1}{s_n(x)} = \underset{(4.7)}{s_{n_0-1}(x) + \sum_{i=n_0}^n \frac{1}{i}} \implies \sum_{i=n_0}^n \frac{1}{i} \text{ felülről korlátos, ami nem teljesül} \implies \text{végtelen sok } n\text{-re } x \notin A_n \implies$$

$$f(x) < s_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.} \quad (4.8)$$

Ezután teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) \geq s_{n-1}(x). \quad (4.9)$$

$n = 1$ -re triviális. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra teljesül, de $n = k + 1$ -re nem teljesül (4.9). Ekkor $f(x) < s_k(x) = s_{k-1}(x) + \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \leq \underset{\text{ind. felt.}}{f(x) + \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)} \implies 0 <$

$< \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \implies \chi_{A_k}(x) = 1$, azaz $x \in A_k$. Ezt visszaírva az előző egyenlőtlenségbe: $f(x) < s_{k-1}(x) + \frac{1}{k}$, azaz $x \notin A_k$, ami ellentmondás. Ezzel (4.9) bizonyított. A (4.8) és (4.9) egyenlőtlenségek alapján

$$0 \leq f(x) - s_{n-1}(x) < \frac{1}{n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.}$$

Így létezik olyan $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ pozitív egészekből álló számsorozat, hogy $0 \leq f(x) - s_{n_k-1}(x) < \frac{1}{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) - s_{n_k-1}(x)) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(x) = f(x)$. Másrészt $s_n(x)$ monoton növekedő, így nem lehet egynél több torlódási pontja, melyből $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$. $\square$

5. fejezet

Integrál

5.1. Nemnegatív mérhető függvények integrálja

5.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető és

$$D_n := \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D_n$, akkor legyenek

$$A_i := X(y_i \leq f < y_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geq 2),$$

$$A_n := X(y_n \leq f).$$

Az f -nek y -hoz tartozó *integrálközelítő összege*

$$s(f, y) := \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i).$$

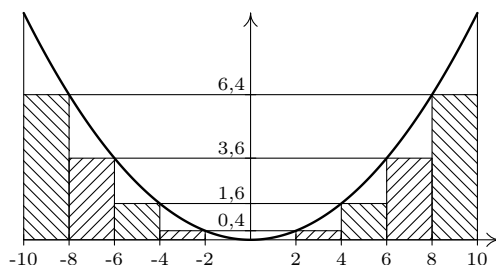
Az f *integrálja*

$$\int f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x) := \sup \{s(f, y) : n \in \mathbb{N}, y \in D_n\}.$$

5.2. Megjegyzés. A beosztás finomításával az integrálközelítő összeg nem csökken, így minden határon túl finomodó beosztássorozat esetén az integrálközelítő összegek sorozatának határértéke a pontos felső korlátjával egyezik meg.

Minden nemnegatív mérhető függvénynek létezik integrálja és értéke $[0, \infty]$ -beli.

Legyen például $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a Lebesgue-mértéktér $[-10, 10]$ -hez tartozó altere (lásd 14. oldal), és $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{10}$. Ekkor $n = 4$, $y_1 = 0,4$, $y_2 = 1,6$, $y_3 = 3,6$ és $y_4 = 6,4$ választással $A_1 = (-4, -2] \cup [2, 4)$, $A_2 = (-6, -4] \cup [4, 6)$, $A_3 = (-8, -6] \cup [6, 8)$, $A_4 = [-10, -8] \cup [8, 10]$.



Így $\mu(A_i) = 4 \forall i = 1, 2, 3, 4$, melyből $s(f, y) = 4 \cdot 0,4 + 4 \cdot 1,6 + 4 \cdot 3,6 + 4 \cdot 6,4 = 48$.

5.3. Megjegyzés. A definícióban szereplő A_i halmazok a legbővebb olyan diszjunkt halmazok, melyek mérhetőek és az $y_i \leq f(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) feltételnek eleget tesznek. Így

$$I_f := \left\{ \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) : n \in \mathbb{N}, y_i \in [0, \infty) (i = 1, \dots, n), \right. \\ \left. A_i \in \mathcal{A} (i = 1, \dots, n) \text{ diszjunktak} \right. \\ \left. \text{és } y_i \leq f(x) \forall x \in A_i (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

jelöléssel

$$\int f \, d\mu = \sup I_f.$$

5.4. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Az f A feletti integrálja

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f(x) \, d\mu(x) := \int f \chi_A \, d\mu.$$

Az előző definícióban $f \chi_A$ μ -mérhető nemnegatív függvény, így annak integrálja definiált. Másrészt $\chi_X \equiv 1$, így $\int_X f \, d\mu = \int f \, d\mu$.

5.5. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f \, d\mu = 0$.

Bizonyítás. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ ($i = 1, \dots, n$), $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, n$) diszjunktak, és $y_i \leq f(x) \chi_A(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$). Ekkor $y_i > 0$ és $x \in A_i$ esetén $0 < y_i \leq f(x) \chi_A(x)$, azaz $\chi_A(x) > 0$, így $x \in A$. Tehát $y_i > 0$ esetén $A_i \subset A$, így $\mu(A_i) \leq \mu(A) = 0$ miatt $\mu(A_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) = 0 \implies I_{f \chi_A} = \{0\} \implies \int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu = \sup I_{f \chi_A} = 0$. $\square$

5.6. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető függvények.

- ① (monotonitás) Ha $f \leq g$ m.m., akkor $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
- ② Ha $f = g$ m.m., akkor $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.
- ③ (Markov-egyenlőtlenség) Ha $\alpha \in [0, \infty)$, akkor $\int f \, d\mu \geq \alpha \mu(X(f \geq \alpha))$.
- ④ Ha $\int f \, d\mu < \infty$, akkor $f < \infty$ m.m.
- ⑤ $\int f \, d\mu = 0$ pontosan akkor, ha $f = 0$ m.m.
- ⑥ (pozitív homogenitás) Ha $\alpha \in [0, \infty)$, akkor $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- ⑦ Ha $R_f = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}$, akkor $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(X(f = y_i))$.

Bizonyítás. ► ① feltételével és $H := X(f > g)$ jelöléssel $H \in \mathcal{A}$ és $\mu(H) = 0$. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ ($i = 1, \dots, n$), $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, n$) diszjunktak, és $y_i \leq f(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$). Ekkor $\sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \in I_f$.

Másrészt $A_i \setminus H \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, n$) diszjunktak, és $y_i \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in A_i \setminus H$ ($i = 1, \dots, n$) $\implies \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i \setminus H) \in I_g$. De $\mu(A_i) = \mu(A_i \setminus H) + \underbrace{\mu(A_i \cap H)}_0 \implies$

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \in I_g \implies I_f \subset I_g \implies \sup I_f \leq \sup I_g \implies \textcircled{1}.$$

► ② feltételével, $X(f < g) \subset X(f \neq g)$ miatt $\mu(X(f < g)) \leq \mu(X(f \neq g)) = 0 \implies \mu(X(f < g)) = 0 \implies f \geq g$ m.m. $\implies$ (① miatt) $\int f d\mu \geq \int g d\mu$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\int f d\mu \leq \int g d\mu \implies \textcircled{2}$.

► $n = 1$, $y_1 = \alpha$ és $A_1 = X(\alpha \leq f)$ választással $\alpha \mu(X(\alpha \leq f)) \in I_f \implies \textcircled{3}$.

► Ha $K := \int f d\mu < \infty \implies \mathbb{R} \ni K \underset{\textcircled{3}}{\geq} n \mu(X(f \geq n)) \geq n \mu(X(f = \infty)) \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu(X(f = \infty)) = 0 \implies \textcircled{4}$.

► $0 = \int f d\mu$ esetén $0 \underset{\textcircled{3}}{\geq} \frac{1}{n} \mu(X(f \geq \frac{1}{n})) \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu(X(f \geq \frac{1}{n})) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X(f \geq \frac{1}{n})) \underset{\text{folyt.}}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X(f \geq \frac{1}{n})\right) = \mu(X(f > 0)) = \mu(X(f \neq 0)) \implies$$

$f = 0$ m.m.

Ha $f = 0$ m.m. $\implies A := X(f \neq 0)$ jelöléssel $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0 \implies f = f \chi_A$ és az 5.5. tétel miatt $\int f d\mu = \int_A f d\mu = 0$. Ezzel ⑤ bizonyított.

► Legyen $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ ($i = 1, \dots, n$), $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, n$) diszjunktak, és $y_i \leq f(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$) $\implies \alpha y_i \leq \alpha f(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$) $\implies \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \in I_f$ és $\sum_{i=1}^n \alpha y_i \mu(A_i) \in I_{\alpha f} \implies \alpha I_f := \{\alpha x : x \in I_f\} \subset I_{\alpha f} \implies \alpha \int f d\mu = \alpha \sup I_f = \sup \alpha I_f \leq \sup I_{\alpha f} = \int \alpha f d\mu \implies$

$$\alpha \int f d\mu \leq \int \alpha f d\mu \quad \forall \alpha \in [0, \infty). \quad (5.1)$$

Ha $\alpha > 0$, akkor $\beta := \frac{1}{\alpha}$ és $g := \alpha f$ jelöléssel (5.1) miatt $\beta \int g d\mu \leq \int \beta g d\mu \implies \frac{1}{\alpha} \int \alpha f d\mu \leq \int \frac{1}{\alpha} \alpha f d\mu \implies \int \alpha f d\mu \leq \alpha \int f d\mu$, így (5.1) miatt ⑥ teljesül.

Ha $\alpha = 0$, akkor ⑤ miatt teljesül ⑥. Ezzel ⑥ bizonyított.

► Legyen $R_f = \{y_1, \dots, y_n\}$, ahol $y_1 < y_2 < \dots < y_n \implies y := (y_1, \dots, y_n) \in D_n$ és $A_i = X(f = y_i) \forall i = 1, \dots, n \implies$

$$\int f d\mu \geq s(f, y) = \sum_{i=1}^n y_i \mu(X(f = y_i)). \quad (5.2)$$

Ezután legyen $m \in \mathbb{N}$, $y'_j \in [0, \infty)$ ($j = 1, \dots, m$), $A'_j \in \mathcal{A}$ ($j = 1, \dots, m$) diszjunkt rendszer és $y'_j \leq f(x) \forall x \in A'_j$ ($j = 1, \dots, m$). Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m y'_j \mu(A'_j) &= \sum_{j=1}^m y'_j \mu\left(A'_j \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^n X(f = y_i)}_X\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y'_j \mu\left(A'_j \cap X(f = y_i)\right) \in I_f. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ha $y'_j > y_i$, akkor $y'_j \mu\left(\underbrace{A'_j \cap X(f = y_i)}_{\emptyset}\right) = 0 \leq y_i \mu\left(A'_j \cap X(f = y_i)\right)$, illetve

ha $y'_j \leq y_i$, akkor $y'_j \mu\left(A'_j \cap X(f = y_i)\right) \leq y_i \mu\left(A'_j \cap X(f = y_i)\right) \implies (5.3)$ miatt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m y'_j \mu(A'_j) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i \mu\left(A'_j \cap X(f = y_i)\right) = \sum_{i=1}^n y_i \mu\left(X(f = y_i) \cap \bigcup_{j=1}^m A'_j\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu\left(X(f = y_i)\right) \implies \int f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^n y_i \mu\left(X(f = y_i)\right). \end{aligned}$$

Így (5.2) miatt $\implies \textcircled{7}$. □

5.7. Tétel (Fatou-lemma). Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető függvények $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor

$$\underline{\lim} \int f_n \, d\mu \geq \int \underline{\lim} f_n \, d\mu.$$

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy az adott feltételekkel $\underline{\lim} f_n$ nemnegatív μ -mérhető, így az integrálja definiált.

Legyen $m \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ ($i = 1, \dots, m$), $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, m$) diszjunktak, és $y_i \leq \underline{\lim} f_n(x) \forall x \in A_i$ ($i = 1, \dots, m$) $\implies$ (lásd 5.3. megjegyzés)

$$\sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i) \in I_{\underline{\lim} f_n}. \quad (5.4)$$

Legyen $0 < t < 1$ és

$$A_{in} := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_i(f_k \geq ty_i).$$

Mivel $A_{i1} \subset A_{i2} \subset \dots$, ezért a folytonosság miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{in}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in}\right). \quad (5.5)$$

$$x \in A_i \text{ esetén } \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x) = \underline{\lim} f_n(x) \geq y_i \geq \underset{\substack{0 < t < 1 \text{ és } y_i \geq 0}}{\uparrow} ty_i \implies$$

$$\exists z \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \inf_{k \geq z} f_k(x) \geq ty_i \implies f_k(x) \geq ty_i \forall k \geq z \implies x \in A_i(f_k(x) \geq ty_i) \forall k \geq z$$

$\implies x \in \bigcap_{k=z}^{\infty} A_i(f_k \geq ty_i) = A_{iz} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in} \implies A_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in}$. A fordított tartalmazás $A_{in} \subset A_i$ miatt teljesül, így $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in} \implies$ (5.5) miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{in}) = \mu(A_i). \quad (5.6)$$

$x \in A_{in}$ esetén $f_n(x) > ty_i \implies \sum_{i=1}^m ty_i \mu(A_{in}) \in I_{f_n} \implies \sum_{i=1}^m ty_i \mu(A_{in}) \leq \int f_n d\mu \implies t \sum_{i=1}^m y_i \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{in}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$. De az 1.9. tétel (10. oldal) és (5.6) miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{in}) = \mu(A_i) \implies t \sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \implies t \uparrow 1$ határátmenettel $\sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \implies$ (5.4) miatt $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \sup I_{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$. $\square$

5.8. Tétel (Beppo Levi monoton konvergencia tétele). *Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető függvények $\forall n \in \mathbb{N}$ -re és $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Bizonyítás. Mivel $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, ezért $\sup_n f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \implies$ a 4.21. tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ X -en értelmezett μ -mérhető nemnegatív függvény, azaz az integrálja definiált. Másrészt az integrál monotonitása miatt (5.6. tétel ① pontja) $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

$f_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ $\forall m \in \mathbb{N} \implies$ integrál monotonitása miatt $\int f_m d\mu \leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ $\forall m \in \mathbb{N} \implies$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m d\mu \leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu. \quad (5.7)$$

Az 1.9. tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$, így a Fatou-lemma alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \implies$ (5.7) miatt kapjuk az állítást. $\square$

5.9. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_i: X \rightarrow [0, \infty]$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények. Ekkor*

$$\sum_{i \in I} \int f_i d\mu = \int \left(\sum_{i \in I} f_i \right) d\mu.$$

Bizonyítás. Legyenek $s, u: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető egyszerű függvények, melyekre $R_s = \{x_1, \dots, x_k\}$, $R_u = \{y_1, \dots, y_l\}$ és $R_{s+u} = \{z_1, \dots, z_m\} \implies$ 5.6. tétel ⑦ pontja miatt

$$\begin{aligned} \int (s + u) d\mu &= \sum_{r=1}^m z_r \mu(X(s + u = z_r)) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_i + y_j) \mu(X(s = x_i) \cap X(u = y_j)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_i \mu(X(s = x_i) \cap X(u = y_j)) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l y_j \mu(X(s = x_i) \cap X(u = y_j)) = \\
&= \sum_{i=1}^k x_i \mu(X(s = x_i)) + \sum_{j=1}^l y_j \mu(X(u = y_j)) = \\
&= \int s \, d\mu + \int u \, d\mu.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $I = \mathbb{N}$, vagy $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $I = \{1, 2, \dots, N\}$.

① ► Először tegyük fel, hogy $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Ha $N = 1$, akkor az állítás triviális. Most legyen $N \geq 2$. Ekkor $\sum_{i \in I} f_i$ μ -mérhető nemnegatív függvény, így az integrálja definiált. Alkalmazzuk az approximációs tételt. f_1 -hez válasszuk az ottaninak megfelelő s_n ill. f_2 -höz az u_n egyszerű függvénysorozatokat $\implies$

$$\begin{aligned}
\int (f_1 + f_2) \, d\mu &= \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + u_n) \, d\mu \stackrel{\text{Levi}}{=} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (s_n + u_n) \, d\mu \stackrel{(5.8)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int s_n \, d\mu + \int u_n \, d\mu \right) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \, d\mu}_{\exists \text{ mert } \int s_n \, d\mu \text{ mon.}} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu}_{\exists \text{ mert } \int u_n \, d\mu \text{ mon.}} \stackrel{\text{Levi}}{=} \\
&= \int \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \, d\mu + \int \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \, d\mu \stackrel{\text{approx. tétel}}{=} \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.
\end{aligned}$$

Ebből teljes indukcióval kapjuk az állítást.

② ► Most legyen $I = \mathbb{N}$. Mivel $\sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} f_i \, \forall n \in \mathbb{N}$ és $\sum_{i=1}^n f_i$ μ -mérhető $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ X -en értelmezett és a 4.19. tétel miatt μ -mérhető, azaz az integrálja definiált $\implies \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \, d\mu = \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i \right) \, d\mu \stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{i=1}^n f_i \right) \, d\mu \stackrel{\text{①}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int f_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu$. Ezzel teljes a bizonyítás. $\square$

5.2. Mérhető függvények integrálja

Tetszőleges mérhető függvény integráljának bevezetéséhez szükségünk lesz a függvény pozitív ill. negatív részének fogalmára.

5.10. Definíció. Ha $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$, akkor f *pozitív része* $f^+ := f \chi_{X(f>0)}$ illetve f *negatív része* $f^- := -f \chi_{X(f<0)}$.

5.11. Lemma. Legyen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_b$. Ekkor

- ① $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$,
- ② $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$,
- ③ $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$, $(f + g)^- \leq f^- + g^-$.

Bizonyítás. ► ① triviálisan teljesül az f^+ és f^- definíciójából.

► ② következik ①-ből.

$$\begin{aligned} (f+g)^+ &= \frac{1}{2}(|f+g| + f+g) \leq \frac{1}{2}(|f| + |g| + f+g) = f^+ + g^+. \text{ Hasonlóan} \\ (f+g)^- &= \frac{1}{2}(|f+g| - f-g) \leq \frac{1}{2}(|f| + |g| - f-g) = f^- + g^- \implies \textcircled{3}. \end{aligned}$$

5.12. Lemma. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$. Az f pontosan akkor μ -mérhető, ha f^+ és f^- μ -mérhetőek.

Bizonyítás. Az állítás az 5.11. lemmából és a 4.16. tételből következik. $\square$

5.13. Lemma. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ -mérhető függvények. Az $f = g$ m.m. pontosan akkor, ha $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m.

Bizonyítás. f és g μ -mérhetősége miatt f^+, f^-, g^+ és g^- is μ -mérhetőek $\implies X(f = g) \in \mathcal{A}$, $X(f \neq g) \in \mathcal{A}$, $X(f^+ = g^+) \in \mathcal{A}$, $X(f^- = g^-) \in \mathcal{A}$, $X(f^+ \neq g^+) \in \mathcal{A}$, $X(f^- \neq g^-) \in \mathcal{A}$.

► „ $\implies$ ” $x \in X(f = g)$ esetén $f(x) = g(x) \implies f^+(x) = g^+(x) \implies x \in X(f^+ = g^+) \implies X(f = g) \subset X(f^+ = g^+) \implies X(f^+ \neq g^+) \subset X(f \neq g) \implies$ monotonitás miatt $\mu(X(f^+ \neq g^+)) \leq \mu(X(f \neq g)) = 0 \implies \mu(X(f^+ \neq g^+)) = 0 \implies f^+ = g^+$ m.m. Hasonlóan bizonyítható, hogy $f^- = g^-$ m.m.

► „ $\impliedby$ ” $x \in X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-)$ esetén $f^+(x) = g^+(x)$ és $f^-(x) = g^-(x) \implies f(x) = g(x) \implies x \in X(f = g) \implies X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-) \subset X(f = g) \implies X(f \neq g) \subset X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-) \implies \mu(X(f \neq g)) \leq \mu(X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-)) \leq \mu(X(f^+ \neq g^+)) + \mu(X(f^- \neq g^-)) = 0 \implies \mu(X(f \neq g)) = 0 \implies f = g$ m.m. $\square$

Egy függvény pozitív illetve negatív része is nemnegatív függvény, ezért ha mérhetőek, akkor egyben definiált az integráljuk is. Ezt használjuk fel a következő definícióban.

5.14. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ -mérhető függvény. Azt mondjuk, hogy f -nek létezik az integrálja, ha

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad \text{vagy} \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

Ekkor az f integrálja

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Ha $\int f d\mu \in \mathbb{R}$, akkor f -et integrálhatónak nevezzük.

Tehát megkülönböztetjük a „*létezik az integrálja*” és az „*integrálható*” fogalmakat. Az első esetben megengedjük a ∞ és $-\infty$ értékeket is, de a másodikban nem. Hasonló a különbség a „*létezik a határértéke*” és a „*konvergens*” fogalmak között.

5.15. *Megjegyzés.* $\int f d\mu > -\infty$ esetén $\int f^- d\mu \in \mathbb{R}$, illetve $\int f d\mu < \infty$ esetén $\int f^+ d\mu \in \mathbb{R}$.

5.16. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ -mérhető függvény és $A \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy *f -nek létezik az integrálja A felett*, ha $f\chi_A$ -nak létezik az integrálja, és ekkor

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x) d\mu(x) := \int f\chi_A d\mu.$$

Ha $\int_A f d\mu \in \mathbb{R}$, akkor f -et *integrálhatónak* nevezzük A felett.

5.17. *Megjegyzés.* $A = X$ választással azt kapjuk, hogy $\int_X f d\mu = \int f d\mu$.

5.18. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$ és $f: A \rightarrow \mathbb{R}_b$. Azt mondjuk, hogy *f -nek létezik az integrálja A felett*, ha az

$$f^*: X \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja, és ekkor

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x) d\mu(x) := \int f^* d\mu.$$

Ha $\int_A f d\mu \in \mathbb{R}$, akkor f -et *integrálhatónak* nevezzük A felett.

A következő tétel szerint a mérték kiterjesztésével az integrál nem változik.

5.19. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ σ -algebra, μ' a μ -nek $\mathcal{A}'$ -re vett leszűkítése és $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ' -mérhető függvény. Ekkor f μ -mérhető is, és

$$\int_A f d\mu = \int_A f d\mu' \quad \forall A \in \mathcal{A}'.$$

Az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal egyszerre létezik, vagy nem létezik, és ha létezik, akkor egyenlők.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ f μ' -mérhető $\implies B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_b)$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}' \implies \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ miatt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies f$ μ -mérhető.

$\blacktriangleright$ Ha f nemnegatív, akkor az 5.1. definíció jelöléseivel $A_i \in \mathcal{A}'$ és $A_i \in \mathcal{A}$, továbbá $\mu'(A_i) = \mu(A_i) \implies \int f d\mu' = \int f d\mu$.

$\blacktriangleright$ Általános esetben az előzőek miatt $\int f^+ d\mu' = \int f^+ d\mu$ és $\int f^- d\mu' = \int f^- d\mu \implies \int f d\mu' = \int f d\mu$, ahol az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal egyszerre létezik, vagy nem létezik, és ha létezik, akkor egyenlők.

$\blacktriangleright$ $A \in \mathcal{A}'$ esetén $f\chi_A$ μ' -mérhető, így az előzőek alapján $f\chi_A$ μ -mérhető is, és $\int f\chi_A d\mu' = \int f\chi_A d\mu$, feltéve, hogy létezik valamelyik oldal. $\square$

5.20. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékű, $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ -mérhető függvény, $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ekkor f integrálható A felett, továbbá $\int_A f d\mu = 0$.

Bizonyítás. $\int (f\chi_A)^+ d\mu = \int f^+ \chi_A d\mu = \int_A f^+ d\mu = 0$ az 5.5. tétel miatt. Hasonlóan $\int (f\chi_A)^- d\mu = 0$. Így definíció alapján kapjuk a tételt. $\square$

5.21. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékű és $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ μ -mérhetőek.

- ① Ha $f = g$ m.m. és $\exists \int f d\mu$, akkor $\exists \int g d\mu$ és $\int g d\mu = \int f d\mu$.
- ② Az f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, továbbá ekkor $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
- ③ (homogenitás) Ha $\exists \int f d\mu$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\exists \int \alpha f d\mu$ és $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.
- ④ (additivitás) Ha az $\int f d\mu + \int g d\mu$ értelmezett, akkor $\exists \int (f + g) d\mu$, továbbá $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- ⑤ Ha $f \leq g$ és $\exists \int f d\mu > -\infty$ (vagy $\exists \int g d\mu < \infty$), akkor $\exists \int f d\mu$, $\exists \int g d\mu$ és $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- ⑥ (majoráns kritérium) Ha $|f| \leq g$ m.m. és g integrálható, akkor f integrálható.
- ⑦ Ha f^2 és g^2 integrálhatóak, akkor fg is integrálható.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ ① feltételeivel $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m., továbbá $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu \implies$ ①.

$\uparrow$
5.6. tétel ②

$\blacktriangleright |f|$ integrálható $\iff \mathbb{R} \ni \int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu \stackrel{\uparrow}{=} \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \iff$

$\uparrow$
5.9. tétel

$\int f^+ d\mu \in \mathbb{R}$ és $\int f^- d\mu \in \mathbb{R} \iff f$ integrálható. Másrészt, ha f integrálható, akkor $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq |\int f^+ d\mu| + |\int f^- d\mu| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \stackrel{\uparrow}{=} \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu \implies$ ②.

$\uparrow$
5.9. tétel

$\blacktriangleright$ Tegyük fel, hogy $\exists \int f d\mu$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ha $\alpha \geq 0$, akkor az 5.6. tétel ⑥ pontja miatt $\int (\alpha f)^+ d\mu = \int \alpha f^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu < \infty$, ha $\int f^+ d\mu < \infty$, illetve $\int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^- d\mu < \infty$, ha $\int f^- d\mu < \infty$.

$\exists \int f d\mu$, azaz $\int f^+ d\mu < \infty$ vagy $\int f^- d\mu < \infty \implies$

$\int (\alpha f)^+ d\mu < \infty$ vagy $\int (\alpha f)^- d\mu < \infty \implies \exists \int \alpha f d\mu$. Másrészt ekkor szintén az 5.6. tétel ⑥ pontja miatt

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \\ &= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = \alpha \int f d\mu. \end{aligned}$$

Ha $\alpha < 0$, akkor $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ és $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$, melyből az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, hogy $\exists \int \alpha f d\mu$, másrészt

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int (-\alpha f^-) d\mu - \int (-\alpha f^+) d\mu = \\ &= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = \alpha \int f d\mu. \end{aligned}$$

Ezzel ③ bizonyított.

► Tegyük fel, hogy $S := \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ értelmezett. $S \in \mathbb{R}$ esetén $\int f \, d\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g \, d\mu \in \mathbb{R} \implies \int f^+ \, d\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g^+ \, d\mu \in \mathbb{R} \implies \infty > \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu = \int (f^+ + g^+) \, d\mu \geq \int (f + g)^+ \, d\mu \implies \exists \int (f + g) \, d\mu$.

$\uparrow$
5.11. lemma

$S = \infty$ esetén $\int f \, d\mu > -\infty$ és $\int g \, d\mu > -\infty \implies$ az 5.15. megjegyzés miatt $\infty > \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f^- + g^-) \, d\mu \geq \int (f + g)^- \, d\mu \implies \exists \int (f + g) \, d\mu$.

$\uparrow$
5.11. lemma

$S = -\infty$ esetén $\int f \, d\mu < \infty$ és $\int g \, d\mu < \infty \implies$ az 5.15. megjegyzés miatt $\infty > \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu = \int (f^+ + g^+) \, d\mu \geq \int (f + g)^+ \, d\mu \implies \exists \int (f + g) \, d\mu$. A ④

$\uparrow$
5.11. lemma

bizonyításához még az egyenlőséget kell belátni.

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies$$

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \implies$$

$$\int (f + g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f + g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu \implies \textcircled{4}.$$

► $f \leq g$ esetén $f^+ \leq g^+$ és $f^- \geq g^-$, így az 5.15. megjegyzés miatt,

1) ha $\exists \int f \, d\mu > -\infty \implies \infty > \int f^- \, d\mu \geq \int g^- \, d\mu \implies \exists \int g \, d\mu$,

2) ha $\exists \int g \, d\mu < \infty \implies \infty > \int g^+ \, d\mu \geq \int f^+ \, d\mu \implies \exists \int f \, d\mu$.

Az ⑤ bizonyításához még az egyenlőtlenséget kell belátni. Mivel $\int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$ és $-\int f^- \, d\mu \leq -\int g^- \, d\mu$, így a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk ⑤-öt.

► ⑥ feltételeivel $g^+ \geq g^+ - g^- = g \geq |f|$ m.m. $\implies \int |f| \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu \in \mathbb{R}$, hiszen g integrálható $\implies \int |f| \, d\mu \in \mathbb{R} \implies$ ② miatt f integrálható, azaz ⑥ teljesül.

► ⑦ feltétele és ④ miatt $f^2 + g^2$ integrálható $\implies$ ③ miatt $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ integrálható, másrészt $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2) \implies$ ⑥ miatt fg integrálható. $\square$

5.22. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$, $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) diszjunktak és $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Ha $\exists \int_A f \, d\mu$, akkor $\exists \int_{A_i} f \, d\mu$ és $\exists \int_{A_i} f \, d\mu \, \forall i \in I$, továbbá

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{i \in I} \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Bizonyítás. $\int (f\chi_A)^+ \, d\mu = \int f^+ \chi_A \, d\mu \leq \int f^+ \, d\mu < \infty$ vagy $\int (f\chi_A)^- \, d\mu = \int f^- \chi_A \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu < \infty \implies \exists \int f \chi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu$. Hasonlóan látható, hogy $\exists \int_{A_i} f \, d\mu \, \forall i \in I$. Ezután azt bizonyítjuk, hogy

$$g\chi_A = \sum_{i \in I} g\chi_{A_i}, \quad (5.9)$$

ahol $g: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ tetszőleges függvény. $x \in A$ esetén létezik pontosan egy i_0 index, melyre $x \in A_{i_0} \implies \sum_{i \in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = g(x)\chi_{A_{i_0}}(x) = g(x)\chi_A(x)$, illetve $x \notin A$ esetén $x \notin A_i \, \forall i \in I \implies \sum_{i \in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = 0 = g(x)\chi_A(x) \implies (5.9)$. Most rátérünk az

egyenlőség bizonyítására. $\int f \chi_A d\mu = \int f^+ \chi_A d\mu - \int f^- \chi_A d\mu \stackrel{(5.9)}{=} \sum_{i \in I} \left(\int f^+ \chi_{A_i} d\mu - \int f^- \chi_{A_i} d\mu \right) = \sum_{i \in I} \int f \chi_{A_i} d\mu \implies$ állítás. $\square$

5.23. Tétel (Lebesgue majorált konvergencia tétele). *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $g, f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ ($n \in \mathbb{N}$) μ -mérhető függvények. Ha g integrálható, $|f_n| \leq g$ m.m. $\forall n \in \mathbb{N}$ -re és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ m.m., akkor f , f_n és $|f_n - f|$ integrálható függvények $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Bizonyítás. $B := X \setminus X(|f_n| \leq g)$, $C := X \setminus X(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f)$ és $A := B \cup C$. Ekkor $\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = 0 \implies \mu(A) = 0$. Legyenek

$$\tilde{f} := f \chi_{\bar{A}}, \quad \tilde{f}_n := f_n \chi_{\bar{A}}, \quad \tilde{g} := g \chi_{\bar{A}}.$$

► Belátjuk, hogy

$$f = \tilde{f} \text{ m.m.}, \quad f_n = \tilde{f}_n \text{ m.m.}, \quad g = \tilde{g} \text{ m.m.}, \quad |f_n - f| = |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \text{ m.m.} \quad (5.10)$$

$x \in \bar{A}$ esetén $f(x) = \tilde{f}(x) \implies x \in X(f = \tilde{f}) \implies \bar{A} \subset X(f = \tilde{f}) \implies X \setminus X(f = \tilde{f}) \subset A \implies \mu(X \setminus X(f = \tilde{f})) = 0 \implies f = \tilde{f}$ m.m. A többi hasonlóan bizonyítható.

► Ha $x \in \bar{A}$, akkor $x \in \bar{B}$ és $x \in \bar{C}$, így $|\tilde{f}_n(x)| = |f_n(x)| \leq g(x) = \tilde{g}(x)$ illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \tilde{f}(x)$. Ha $x \in A$, akkor $\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) = 0$. Így

$$|\tilde{f}_n| \leq \tilde{g} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n = \tilde{f}. \quad (5.11)$$

► f_n a majoráns kritérium miatt integrálható. Most tegyük fel, hogy $|\tilde{f}(x)| > \tilde{g}(x)$ valamely $x \in X$ -re. $\implies$ (5.11) miatt $|\tilde{f}(x)| > \tilde{g}(x) \geq |\tilde{f}_n(x)| \forall n \in \mathbb{N}$, amely $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{f}_n| = |\tilde{f}|$ miatt nem lehet. Így

$$|\tilde{f}| \leq \tilde{g}. \quad (5.12)$$

Mivel $\tilde{g}$ (5.10) miatt integrálható, így (5.12) és a majoráns kritérium szerint $\tilde{f}$ integrálható, amiből (5.10) miatt f is integrálható. Végül (5.11) és (5.12) miatt

$$|\tilde{f}_n - \tilde{f}| \leq |\tilde{f}_n| + |\tilde{f}| \leq 2\tilde{g}, \quad (5.13)$$

amiből a majoráns kritérium szerint $|\tilde{f}_n - \tilde{f}|$ integrálható. Így (5.10) miatt $|f_n - f|$ is integrálható.

► (5.13) miatt $2\tilde{g} - |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \geq 0$, így erre alkalmazva a Fatou-lemmát:

$$\underline{\lim} \int (2\tilde{g} - |\tilde{f}_n - \tilde{f}|) d\mu \geq \int \underline{\lim} (2\tilde{g} - |\tilde{f}_n - \tilde{f}|) d\mu \stackrel{(5.11)}{=} \int 2\tilde{g} d\mu \implies$$

$0 \geq \int 2\tilde{g} \, d\mu - \liminf \int (2\tilde{g} - |\tilde{f}_n - \tilde{f}|) \, d\mu = \int 2\tilde{g} \, d\mu + \overline{\lim} \int (|\tilde{f}_n - \tilde{f}| - 2\tilde{g}) \, d\mu = \int 2\tilde{g} \, d\mu +$
 $+ \overline{\lim} \left(\int |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \, d\mu - \int 2\tilde{g} \, d\mu \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1.8. megj.}}}{=} \int 2\tilde{g} \, d\mu + \overline{\lim} \int |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \, d\mu - \int 2\tilde{g} \, d\mu = \overline{\lim} \int |\tilde{f}_n -$
 $-\tilde{f}| \, d\mu \geq \overline{\lim} \left| \int (\tilde{f}_n - \tilde{f}) \, d\mu \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1.8. megj.}}}{=} \overline{\lim} \left| \int \tilde{f}_n \, d\mu - \int \tilde{f} \, d\mu \right| \geq 0 \implies \overline{\lim} \left| \int \tilde{f}_n \, d\mu - \int \tilde{f} \, d\mu \right| = 0$
 és $\overline{\lim} \int |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \, d\mu = 0 \implies$ 1.10. tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int \tilde{f}_n \, d\mu - \int \tilde{f} \, d\mu \right| = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\tilde{f}_n -$
 $-\tilde{f}| \, d\mu = 0 \implies$ (5.10) alapján kapjuk az állítást. $\square$

5.24. Tétel (Az integrál abszolút folytonossága). Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ integrálható függvény. Ekkor $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ -hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, hogy $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta$ esetén $\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $f_n := \min\{|f|, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ha $|f(x)| \in \mathbb{R}$, akkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n_0 > |f(x)| \implies f_n(x) = |f(x)| \, \forall n \geq n_0$ esetén $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |f(x)|$. Ha $|f(x)| = \infty$, akkor $f_n(x) = n \, \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty = |f(x)| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = |f|$. Másrészt $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, ezért a Beppo Levi tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int |f| \, d\mu$. Mivel f integrálható, ezért $|f|$ is az $\implies f_n \leq |f|$ és a majoráns kritérium miatt f_n is integrálható $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. Mindezekből $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu - \int |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int f_n \, d\mu - \int |f| \, d\mu) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - |f|) \, d\mu = 0 \implies \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{\varepsilon}{2} > \left| \int (f_m - |f|) \, d\mu \right| = \int (|f| - f_m) \, d\mu \geq 0. \quad (5.14)$$

Legyen $\delta := \frac{\varepsilon}{2m}$ és $A \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\mu(A) < \delta$. Ekkor $\int |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_{A^c} |f| \, d\mu =$
 $= \int (|f| - f_m) \chi_A \, d\mu + \int f_m \chi_A \, d\mu \leq \int (|f| - f_m) \, d\mu + \int m \chi_A \, d\mu = \int (|f| - f_m) \, d\mu +$
 $+ m\mu(A) \underset{\substack{\uparrow \\ (5.14)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + m\delta = \varepsilon. \quad \square$

5.3. Komplex értékű függvények integrálja

5.25. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h: X \rightarrow \mathbb{C}$, $h(x) = f(x) + ig(x)$. Ha f és g μ -mérhetőek, akkor azt mondjuk, hogy h μ -mérhető. Az f függvényt a h *valós részének* (jele $\Re h$), a g függvényt pedig a h *képzetes részének* (jele $\Im h$) nevezzük.

5.26. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $h_1, h_2: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mérhetőek. Azt mondjuk, hogy $h_1 = h_2$ m.m., ha a valós és képzetes részeik rendre m.m. megegyeznek.

5.27. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Azt mondjuk, hogy $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ integrálható, ha a valós és képzetes része is integrálható, azaz létezik az integráljuk és azok végesek. Ekkor

$$\int h \, d\mu = \int h(x) \, d\mu(x) := \int \Re h \, d\mu + i \int \Im h \, d\mu.$$

Ha h valós és képzetes része is integrálható $A \in \mathcal{A}$ felett, akkor azt mondjuk, hogy h integrálható A felett, és

$$\int_A h \, d\mu = \int_A h(x) \, d\mu(x) := \int_A \Re h \, d\mu + i \int_A \Im h \, d\mu.$$

5.28. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mérhető függvény, $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ekkor h integrálható A felett, továbbá $\int_A h \, d\mu = 0$.

Bizonyítás. Az 5.20. tétel következménye. □

5.29. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $h, h_1, h_2: X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -mérhetőek.

- ① Ha $h_1 = h_2$ m.m. és h_1 integrálható, akkor h_2 is integrálható és $\int h_1 \, d\mu = \int h_2 \, d\mu$.
- ② A h pontosan akkor integrálható, ha $|h|$ integrálható, továbbá ekkor $|\int h \, d\mu| \leq \int |h| \, d\mu$. (Emlékeztetőül, ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)
- ③ (homogenitás) Ha h integrálható és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor αh is integrálható, továbbá $\int \alpha h \, d\mu = \alpha \int h \, d\mu$.
- ④ (additivitás) Ha h_1 és h_2 integrálhatóak, akkor $h_1 + h_2$ is integrálható, továbbá $\int (h_1 + h_2) \, d\mu = \int h_1 \, d\mu + \int h_2 \, d\mu$.
- ⑤ (majoráns kritérium) Ha $z: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ integrálható és $|h| \leq z$ m.m., akkor h is integrálható.
- ⑥ Ha h integrálható, akkor minden $A \in \mathcal{A}$ esetén h integrálható A felett is.

Bizonyítás. ► Az ① ③ ④ állítások az 5.21. tétel ① ③ ④ pontjaiból következnek.

► ② bizonyításához először tegyük fel, hogy h integrálható. $\implies |\Re h|$ és $|\Im h|$ integrálhatóak $\implies |h| = \sqrt{(\Re h)^2 + (\Im h)^2} \leq |\Re h| + |\Im h|$ miatt $|h|$ is integrálható.

Megfordítva, ha $|h|$ integrálható, akkor $|\Re h| = \sqrt{(\Re h)^2} \leq \sqrt{(\Re h)^2 + (\Im h)^2} = |h|$ miatt $\Re h$ is integrálható. Hasonlóan $\Im h$ is integrálható, így h integrálható.

Ha $|\int h \, d\mu| = 0$, akkor $\int \Re h \, d\mu = \int \Im h \, d\mu = 0 \implies \Re h = \Im h = 0$ m.m. $\implies |h| = 0$ m.m. $\implies |\int h \, d\mu| \leq \int |h| \, d\mu$.

Most tegyük fel, hogy $|\int h \, d\mu| \in \mathbb{R}_+$. Könnyen látható, hogy

$$|ab + cd| \leq \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

hiszen ekvivalens a $0 \leq (ad - bc)^2$ egyenlőtlenséggel. Ebből következően

$$\begin{aligned} \left| \int h \, d\mu \right|^2 &= \left(\int \Re h \, d\mu \right)^2 + \left(\int \Im h \, d\mu \right)^2 = \\ &= \left| \int \left(\Re h \int \Re h \, d\mu + \Im h \int \Im h \, d\mu \right) \, d\mu \right| \leq \int \left| \Re h \int \Re h \, d\mu + \Im h \int \Im h \, d\mu \right| \, d\mu \leq \\ &\leq \int \sqrt{(\Re h)^2 + (\Im h)^2} \sqrt{\left(\int \Re h \, d\mu \right)^2 + \left(\int \Im h \, d\mu \right)^2} \, d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int |h| \cdot \left| \int h \, d\mu \right| \, d\mu = \left| \int h \, d\mu \right| \cdot \int |h| \, d\mu,$$

melyből kapjuk, hogy $\left| \int h \, d\mu \right| \leq \int |h| \, d\mu$. Ezzel ② bizonyított.

► ⑤ feltételével $|\Re h| = \sqrt{(\Re h)^2} \leq \sqrt{(\Re h)^2 + (\Im h)^2} = |h| \leq z \text{ m.m.} \implies \Re h$ integrálható. Hasonlóan $\Im h$ is integrálható, így h integrálható. Ezzel ⑤ bizonyított.

► Ha h integrálható és $A \in \mathcal{A}$, akkor $|\Re h|$ integrálható $\implies |\Re h| \chi_A \leq |\Re h|$ miatt $\Re h$ integrálható A felett. Hasonlóan $\Im h$ is integrálható A felett $\implies$ ⑥ $\square$

5.30. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $h: X \rightarrow \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) diszjunktak és $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Ha h integrálható, akkor

$$\int_A h \, d\mu = \sum_{i \in I} \int_{A_i} h \, d\mu.$$

Bizonyítás. Az 5.22. tétel következménye. $\square$

5.4. Riemann-integrál

A következő szakaszban definiált Lebesgue-integrál a Riemann-integrál általánosítása. Ezért először ismételjük át a Riemann-integrál fogalmát.

5.31. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A $D := \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ halmaz beosztása az $[a, b]$ intervallumnak, ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$. Jelöljük $\|D\|$ -vel a D finomságát, azaz

$$\|D\| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}.$$

Legyen $\mathcal{D}_{[a,b]}$ az $[a, b]$ összes beosztásának halmaza. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és

$$s(f, D) := \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \inf\{f(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\},$$

$$S(f, D) := \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \sup\{f(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}.$$

Vegyük észre, hogy

$$s(f, D) \leq \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \sup R_f = (b - a) \sup R_f, \quad (5.15)$$

$$S(f, D) \geq \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \inf R_f = (b - a) \inf R_f. \quad (5.16)$$

Legyenek

$$I_*(f) := \sup\{s(f, D) : D \in \mathcal{D}_{[a,b]}\}, \quad (\text{Darboux-féle alsó integrál})$$

$$I^*(f) := \inf\{S(f, D) : D \in \mathcal{D}_{[a,b]}\}. \quad (\text{Darboux-féle felső integrál})$$

Mivel (5.15) miatt $\{s(f, D) : D \in \mathcal{D}_{[a,b]}\}$ felülről korlátos halmaz, ill. (5.16) miatt $\{S(f, D) : D \in \mathcal{D}_{[a,b]}\}$ alulról korlátos halmaz, ezért $I_*(f) \in \mathbb{R}$ és $I^*(f) \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható**, ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor ezt a közös értéket az f **Riemann-integráljának** nevezzük. Jele: $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$.

5.32. Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény és

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ és } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Az f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha H Jordan-mérhető, továbbá ekkor H Jordan-mértéke $\int_a^b f$.

Bizonyítás. A Darboux-féle alsó ill. felső integrál és a Jordan-mérték definíciójánál használt jelöléseket fogjuk használni. Legyen $c := \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ és $T := [a, b] \times [0, c]$. Ekkor $H \subset T$. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} A &:= \{s(f, D) : D \text{ beosztása } [a, b]\text{-nek}\} \\ B &:= \{m_*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\}. \end{aligned}$$

Legyen $D_1 \times D_2$ egy tetszőleges beosztása T -nek. Ekkor könnyen látható, hogy $m_*(H, D_1 \times D_2) \leq s(f, D_1)$. Vagyis B -ből tetszőlegesen kiválasztva egy elemet, az A -ban találhatunk ennél nagyobb elemet. Így $m_*(H) = \sup B \leq \sup A = I_*(f)$.

Másrészt, ha $D_1 = \{x_0, \dots, x_k\}$ ($x_0 < \dots < x_k$) az $[a, b]$ egy tetszőleges beosztása, akkor $y_i := \inf\{f(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) $y_0 := 0$ és $y_{k+1} := c$ jelöléssel $D_2 := \{y_0, \dots, y_{k+1}\}$ a $[0, c]$ egy beosztása. Így $D_1 \times D_2$ a T -nek egy beosztása, továbbá $s(f, D_1) = m_*(H, D_1 \times D_2)$. Azaz A -ból kiválasztva egy elemet, az benne van B -ben is, vagyis $A \subset B \implies I_*(f) = \sup A \leq \sup B = m_*(H) \implies I_*(f) = m_*(H)$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $I^*(f) = m^*(H)$. Ezekből már következik az állítás. $\square$

5.33. Lemma. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}$. Ha $D_1 \subset D_2$, akkor $s(f, D_1) \leq s(f, D_2)$ és $S(f, D_1) \geq S(f, D_2)$.

Bizonyítás. Legyen $D_1 := \{x_1, \dots, x_k\}$. Ha D_2 egy ponttal bővebb D_1 -nél, azaz $\exists i_0 \in \{1, \dots, k\}$ és $\exists x^* \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, hogy $D_2 = \{x_1, \dots, x_{i_0-1}, x^*, x_{i_0}, \dots, x_k\}$, akkor $(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \inf\{f(x) : x_{i_0-1} < x \leq x_{i_0}\} = (x_{i_0} - x^*) \inf\{f(x) : x_{i_0-1} < x \leq x_{i_0}\} + (x^* - x_{i_0-1}) \inf\{f(x) : x_{i_0-1} < x \leq x_{i_0}\} \leq (x_{i_0} - x^*) \inf\{f(x) : x^* < x \leq x_{i_0}\} + (x^* - x_{i_0-1}) \inf\{f(x) : x_{i_0-1} < x \leq x^*\} \implies s(f, D_1) \leq s(f, D_2)$. Hasonlóan bizonyítható a másik egyenlőtlenség. Ebből teljes indukcióval kapjuk tetszőleges $D_2 \supset D_1$ -re az állítást. $\square$

5.34. Lemma. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény és $D_k \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ ($k \in \mathbb{N}$). Ha $\|D_k\| < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(f, D_k) = I_*(f) \quad \text{és} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, D_k) = I^*(f).$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor létezik olyan $D = \{x_0, \dots, x_{r+1}\} \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, hogy $s(f, D) > I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} \implies$

$$\begin{aligned} I_*(f) - s(f, D_k) &= I_*(f) - s(f, D) + s(f, D) - s(f, D_k) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + s(f, D) - s(f, D_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + s(f, D \cup D_k) - s(f, D_k). \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.33. lemma

Legyen $K \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $|f(x)| < K \ \forall x \in [a, b]$, és $k_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{1}{k_0} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4Kr}, \min\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, r\} \right\}.$$

Legyen $k > k_0$ egész szám. Ekkor $\|D_k\| < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} \leq \min\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, r\} \implies D_k = \{y_0, \dots, y_n\}$ jelöléssel minden (y_{j-1}, y_j) ($j = 1, \dots, n$) intervallumban legfeljebb egy lehet az $x_1, \dots, x_r$ pontok közül. Legyen i és j olyan, hogy $y_{j-1} < x_i < y_j$. Ekkor $\alpha_j^* := \inf f((x_i, y_j])$, $\alpha_j^{**} := \inf f((y_{j-1}, x_i])$, $\alpha_j := \inf f((y_{j-1}, y_j])$ jelöléssel $(y_j - x_i)\alpha_j^* + (x_i - y_{j-1})\alpha_j^{**} - (y_j - y_{j-1})\alpha_j = (\alpha_j^* - \alpha_j)(y_j - x_i) + (\alpha_j^{**} - \alpha_j)(x_i - y_{j-1}) \leq 2K(y_j - x_i) + 2K(x_i - y_{j-1}) = 2K(y_j - y_{j-1}) \leq 2K\|D_k\| < 2K\frac{1}{k_0} \leq 2K\frac{\varepsilon}{4Kr} = \frac{\varepsilon}{2r} \implies s(f, D \cup D_k) - s(f, D_k) < \frac{\varepsilon}{2} \implies (5.17)$ miatt $I_*(f) - s(f, D_k) < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, D_k) = I_*(f)$. A másik állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

5.35. Tétel. Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrálható függvények és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor cf és $f + g$ is Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Definíció alapján, ha $D_k \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ ($\|D_k\| < \frac{1}{k} \ \forall k \in \mathbb{N}$), akkor $c \geq 0$ esetén $S(cf, D_k) = cS(f, D_k)$, $s(cf, D_k) = cs(f, D_k)$ és $c < 0$ esetén $S(cf, D_k) = cs(f, D_k)$, $s(cf, D_k) = cS(f, D_k)$, illetve $S(f + g, D_k) = S(f, D_k) + S(g, D_k)$, $s(f + g, D_k) = s(f, D_k) + s(g, D_k)$. Mindezekből az 5.34. lemma alapján kapjuk az állítást. $\square$

5.36. Tétel. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrálható, akkor f^+ , f^- és $|f|$ is az, továbbá

$$\int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- \quad \text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} D &:= \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}_{[a,b]}, \\ m_i^+ &:= \inf\{f^+(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}, \\ m_i^- &:= \inf\{f^-(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_i &:= \inf\{f(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}, \\
M_i^+ &:= \sup\{f^+(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}, \\
M_i^- &:= \sup\{f^-(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}, \\
M_i &:= \sup\{f(x) : x_{i-1} < x \leq x_i\}.
\end{aligned}$$

Ha $f(x) < 0 \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i]$, akkor

$$\begin{aligned}
M_i^+ - m_i^+ &= 0 - 0 = 0 \leq M_i - m_i, \\
M_i^- - m_i^- &= (-m_i) - (-M_i) = M_i - m_i.
\end{aligned}$$

Ha $f(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i]$, akkor

$$\begin{aligned}
M_i^+ - m_i^+ &= M_i - m_i, \\
M_i^- - m_i^- &= 0 - 0 = 0 \leq M_i - m_i.
\end{aligned}$$

Minden más esetben $m_i < 0$ és $M_i > 0$, így ekkor

$$\begin{aligned}
M_i^+ - m_i^+ &= M_i - 0 < M_i - m_i, \\
M_i^- - m_i^- &= (-m_i) - 0 < M_i - m_i.
\end{aligned}$$

Mindezek miatt $M_i^+ - m_i^+ \leq M_i - m_i$ és $M_i^- - m_i^- \leq M_i - m_i$, így

$$\begin{aligned}
S(f^+, D) - s(f^+, D) &\leq S(f, D) - s(f, D), \\
S(f^-, D) - s(f^-, D) &\leq S(f, D) - s(f, D).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Most legyen $D_k \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ ($\|D_k\| < \frac{1}{k} \ \forall k \in \mathbb{N}$). Ekkor (5.18) miatt

$$\begin{aligned}
S(f^+, D_k) - s(f^+, D_k) &\leq S(f, D_k) - s(f, D_k), \\
S(f^-, D_k) - s(f^-, D_k) &\leq S(f, D_k) - s(f, D_k),
\end{aligned}$$

így az 5.34. lemmából $0 \leq I^*(f^+) - I_*(f^+) = \lim_{k \rightarrow \infty} (S(f^+, D_k) - s(f^+, D_k)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (S(f, D_k) - s(f, D_k)) = I^*(f) - I_*(f) = 0 \implies I^*(f^+) = I_*(f^+)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $I^*(f^-) = I_*(f^-)$. Ezekből f^+ és f^- Riemann-integrálható. Így $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$ és az 5.35. tétel miatt kapjuk a további állításokat. $\square$

5.37. Megjegyzés. Ha $|f|$ Riemann-integrálható, abból még nem következik, hogy f is az. Például

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{különben,} \end{cases}$$

esetén $|f|$ Riemann-integrálható, de f nem.

5.38. Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrálható, és $c, d \in [a, b]$, $c < d$. Ekkor f -nek $[c, d]$ -re vett leszűkítése is Riemann-integrálható, továbbá ezt az integrált $\int_c^d f = \int_c^d f(x) dx$ módon jelöljük.

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy f Riemann-integrálható a $[c, d]$ intervallumon. Bevezetjük még az $\int_c^c f = \int_c^c f(x) dx := 0$ jelölést is.

Bizonyítás. Legyen $D_k \in \mathcal{D}_{[c,d]}$ ($\|D_k\| < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$). Ekkor létezik $D_k^* \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, hogy $D_k = D_k^* \cap [c, d]$ és $\|D_k^*\| < \frac{1}{k}$. Legyen g az f $[c, d]$ -re vett leszűkítése. Ekkor $S(g, D_k) \leq S(f, D_k^*)$ és $s(g, D_k) \geq s(f, D_k^*) \implies S(g, D_k) - s(g, D_k) \leq S(f, D_k^*) - s(f, D_k^*) \implies 0 \leq I^*(g) - I_*(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (S(g, D_k) - s(g, D_k)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (S(f, D_k^*) - s(f, D_k^*)) = I^*(f) - I_*(f) = 0 \implies I^*(g) = I_*(g) \implies$ állítás. $\square$

5.39. Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) és $a < c < b$. Ha f Riemann-integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon, akkor az $[a, b]$ intervallumon is az, továbbá

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $D_1 \in \mathcal{D}_{[a,c]}$ és $D_2 \in \mathcal{D}_{[c,b]}$. Ekkor $D := D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, másrészt $S(f, D) = S(f_1, D_1) + S(f_2, D_2)$, ahol f_1 az f $[a, c]$ -re illetve f_2 az f $[c, b]$ -re vett leszűkítése. Ekkor az 5.34. lemma miatt $I^*(f) = I^*(f_1) + I^*(f_2)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $I_*(f) = I_*(f_1) + I_*(f_2)$. Mindezekből kapjuk az állítást. $\square$

5.40. Tétel (Newton–Leibniz-formula). Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrálható függvény. Ha $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon és primitív függvénye f -nek az (a, b) intervallumon, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Az $F(b) - F(a)$ értéket $[F(x)]_a^b$ módon is szokták jelölni.

Bizonyítás. Legyen $D_k := \{x_0^{(k)}, \dots, x_{r_k}^{(k)}\} \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ ($\|D_k\| < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$). A Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik $h_i^{(k)} \in (x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)})$, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{r_k} (F(x_i^{(k)}) - F(x_{i-1}^{(k)})) = \sum_{i=1}^{r_k} f(h_i^{(k)}) (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}).$$

Másrészt

$$s(f, D_k) \leq \sum_{i=1}^{r_k} f(h_i^{(k)}) (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \leq S(f, D_k).$$

Mindezekből és az 5.34. lemmából kapjuk, hogy $I_*(f) \leq F(b) - F(a) \leq I^*(f)$, amiből következik az állítás. $\square$

5.41. Tétel. Legyenek $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$) Riemann-integrálható függvények. Ha az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f is Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia miatt $\varepsilon_n := \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)|$ nullsorozat. Az ε_n definíciójából

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [a, b],$$

amiből egyrészt f korlátos, azaz létezik $I_*(f)$ és $I^*(f)$, másrészt

$$\int_a^b f_n - \varepsilon_n(b-a) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \int_a^b f_n + \varepsilon_n(b-a) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq 2\varepsilon_n(b-a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mivel ε_n nullsorozat, így kapjuk az állítást. $\square$

5.42. Tétel. Legyenek $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$) Riemann-integrálható függvények. Ha $f_1 + \dots + f_n$ egyenletesen konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Az $s_n := f_1 + \dots + f_n$ egyenletesen konvergál a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvényhez, így az 5.41. tételből $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k$. $\square$

5.43. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $(-\infty, a] \subset H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy létezik az $\int_{-\infty}^a f = \int_{-\infty}^a f(x) dx$ *improprius integrál*, ha f Riemann-integrálható a $(-\infty, a]$ minden korlátos részintervallumán, és létezik a $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \int_{a-t}^a f$ függvény ∞ -ben vett határértéke (akár véges vagy ∞ vagy $-\infty$). Ekkor

$$\int_{-\infty}^a f := \lim_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

5.44. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $[a, \infty) \subset H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy létezik az $\int_a^\infty f = \int_a^\infty f(x) dx$ *improprius integrál*, ha f Riemann-integrálható az $[a, \infty)$ minden korlátos részintervallumán, és létezik a $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \int_a^{a+t} f$ függvény ∞ -ben vett határértéke (akár véges vagy ∞ vagy $-\infty$). Ekkor

$$\int_a^\infty f := \lim_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

5.45. Definíció. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy létezik az $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ *improprius integrál*, ha f Riemann-integrálható minden korlátos intervallumon, és létezik a $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \int_{-t}^t f$ függvény ∞ -ben vett határértéke (akár véges vagy ∞ vagy $-\infty$). Ekkor

$$\int_{-\infty}^\infty f := \lim_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

5.46. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ha léteznek az $\int_{-\infty}^a f$ és $\int_a^\infty f$ improprius integrálok, és értelmezett az összegük, akkor létezik $\int_{-\infty}^\infty f$ is, továbbá

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f.$$

Bizonyítás. $\int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^a f + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^a f + \int_a^t f \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f = \int_{-\infty}^\infty f.$ $\square$

A Riemann-integrál fogalma is kiterjeszthető komplex értékű függvényekre.

5.47. Definíció. A $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) függvény Riemann-integrálható, ha $\Re h$ és $\Im h$ Riemann-integrálhatóak, továbbá ekkor $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b h := \int_a^b \Re h + i \int_a^b \Im h$.

5.48. Definíció. Legyen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tegyük fel, hogy léteznek az $\int_{-\infty}^\infty \Re h$ illetve $\int_{-\infty}^\infty \Im h$ improprius integrálok és azok végesek. Ekkor azt mondjuk, hogy h -nak létezik az $\int_{-\infty}^\infty h$ improprius integrálja és $\int_{-\infty}^\infty h(x) dx = \int_{-\infty}^\infty h := \int_{-\infty}^\infty \Re h + i \int_{-\infty}^\infty \Im h$.

5.49. Megjegyzés. Értelemszerű módosításokkal értelmezhető a további improprius integrálok is komplex értékű függvényekre. Könnyen látható, hogy a komplex értékű függvények Riemann- illetve improprius integrálja is additív és homogén.

5.5. Lebesgue-integrál

5.50. Definíció. A Lebesgue-mérték szerinti integrált *Lebesgue-integrálnak* nevezzük. Ha egy függvénynek létezik Lebesgue-integrálja és az véges, akkor azt mondjuk hogy a függvény *Lebesgue-integrálható*.

5.51. Megjegyzés. Legyen λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_b$ Borel-mérhető függvény. Ekkor az 5.19. tétel szerint f λ -mérhető is, és $\int_B f d\lambda' = \int_B f d\lambda$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ebben a szakaszban bizonyítjuk, hogy a Lebesgue-integrál általánosabb fogalom, mint a Riemann-integrál, továbbá megadjuk a Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételét is.

Megmutatjuk, hogy Lebesgue-integrálhatóságból nem következik a Riemann-integrálhatóság. Legyen például

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor

$$f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{ha } x \notin [0, 1] \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

jelöléssel

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \int f^* d\lambda = 1 \cdot \underbrace{\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1])}_0 + 0 \cdot \lambda(\overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}) = 0.$$

Másrészt $s(f, D) = 0$ és $S(f, D) = 1 \quad \forall D \in \mathcal{D}_{[0,1]} \implies I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1 \implies f$ Riemann-szerint nem integrálható.

Rátérünk annak belátására, hogy a Riemann-integrálhatóságból következik a Lebesgue-integrálhatóság. Ehhez szükségünk lesz néhány segédfüggvényre.

5.52. Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény, $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} m_\delta(x) &:= \inf \{ f(y) : y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \}, & \delta \in \mathbb{R}_+, \\ M_\delta(x) &:= \sup \{ f(y) : y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \}, & \delta \in \mathbb{R}_+, \\ m(x) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} m_\delta(x), & (f \text{ alsó Baire-függvénye}) \\ M(x) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} M_\delta(x). & (f \text{ felső Baire-függvénye}) \end{aligned}$$

Az $m_\delta(x)$ ill. $M_\delta(x)$ a δ változó szerint monoton csökkenő ill. növekvő, így az $m(x)$ ill. $M(x)$ definíciója korrekt. Másrészt az f korlátossága miatt $m_\delta(x) \in \mathbb{R}$ és $M_\delta(x) \in \mathbb{R}$. Mivel rögzített $x \in [a, b]$ esetén $m_\delta(x) \leq f(x) \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+$, ezért $m(x) \leq f(x)$. Hasonlóan $M_\delta(x) \geq f(x) \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+$, ezért $M(x) \geq f(x)$. Összefoglalva

$$-\infty < m_\delta(x) \leq m(x) \leq f(x) \leq M(x) \leq M_\delta(x) < \infty \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall \delta \in \mathbb{R}_+. \quad (5.19)$$

5.53. Lemma. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény és $x \in [a, b]$. Az f pontosan akkor folytonos az x pontban, ha $m(x) = M(x)$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, hogy $y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Másrészt $\exists y_1, y_2 \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)$, hogy $f(y_1) < m_\delta(x) + \frac{\varepsilon}{4}$ és $f(y_2) > M_\delta(x) - \frac{\varepsilon}{4}$. Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{\varepsilon}{2} > |f(y_2) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| \geq |f(y_2) - f(x) + f(x) - f(y_1)| = |f(y_2) - f(y_1)| \geq f(y_2) - f(y_1) > M_\delta(x) - m_\delta(x) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ (5.19)}}{\geq} M(x) - m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \implies$$

$0 \leq M(x) - m(x) < \varepsilon \implies \varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $M(x) = m(x)$.

► „ $\Leftarrow$ ” Az (5.19) miatt $f(x) = m(x) = M(x)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor $\exists \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+$, hogy $M_{\delta_1}(x) - M(x) < \varepsilon$ és $m(x) - m_{\delta_2}(x) < \varepsilon$. Ekkor $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással $\forall y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)$ esetén $m_{\delta_2}(x) \leq f(y) \leq M_{\delta_1}(x)$. Mindezekből $-\varepsilon < m_{\delta_2}(x) - m(x) \leq f(y) - f(x) \leq M_{\delta_1}(x) - M(x) < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies$ az f x -ben folytonos. $\square$

5.54. Lemma. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény. Ekkor

$$I_*(f) = \int_{[a,b]} m \, d\lambda \quad \text{és} \quad I^*(f) = \int_{[a,b]} M \, d\lambda.$$

Bizonyítás. Legyenek $D_k = \{x_0^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}\} \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ ($k \in \mathbb{N}$) olyan beosztások, melyekre $\|D_k\| < \frac{1}{k} \, \forall k \in \mathbb{N}$ és $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ teljesül. Ekkor legyenek

$$\begin{aligned} m_i^{(k)} &:= \inf\{f(x) : x_{i-1}^{(k)} < x \leq x_i^{(k)}\} \quad (k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n_k), \\ M_i^{(k)} &:= \sup\{f(x) : x_{i-1}^{(k)} < x \leq x_i^{(k)}\} \quad (k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n_k), \\ A_k &: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_k(x) := m_i^{(k)}, \text{ ha } x_{i-1}^{(k)} < x \leq x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n_k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ F_k &: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_k(x) := M_i^{(k)}, \text{ ha } x_{i-1}^{(k)} < x \leq x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n_k \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Mivel az A_k, F_k függvények értékkészletei megszámlálható számosságúak, ezért bármely Borel-halmaz ezek általi ősképe is megszámlálható, azaz Lebesgue-mérhető halmaz. Így ezek a függvények λ -mérhetőek. A konstrukcióból látható, hogy

$$\left. \begin{aligned} s(f, D_k) &= \sum_{i=1}^{n_k} (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) m_i^{(k)} = \int_{[a,b]} A_k \, d\lambda \\ S(f, D_k) &= \sum_{i=1}^{n_k} (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) M_i^{(k)} = \int_{[a,b]} F_k \, d\lambda \end{aligned} \right\} \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5.20)$$

másrészt $A_k(x) \leq A_{k+1}(x) \leq f(x) \leq F_{k+1}(x) \leq F_k(x) \, \forall k \in \mathbb{N}$ és $\forall x \in (a, b] \implies A_k(x)$ és $F_k(x)$ konvergens sorozatok minden $x \in (a, b]$ -re.

► Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x \in [a, b] \setminus D_k$. Ekkor $\exists i \in \mathbb{N}$ és $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, hogy

$$(x - \delta, x + \delta) \subset (x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}) \subset (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}),$$

hiszen $x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} < \frac{1}{k} \implies$

$$m_{\frac{1}{k}}(x) \leq \underbrace{m_i^{(k)}}_{A_k(x)} \leq m_\delta(x) \leq m(x) \leq M(x) \leq M_\delta(x) \leq \underbrace{M_i^{(k)}}_{F_k(x)} \leq M_{\frac{1}{k}}(x) \implies$$

Ha $x \in [a, b] \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} D_l$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $m_{\frac{1}{k}}(x) \leq A_k(x) \leq m(x)$ és $M(x) \leq F_k(x) \leq M_{\frac{1}{k}}(x) \implies \forall x \in [a, b] \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} D_l$ esetén $m(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{\frac{1}{k}}(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(x) \leq m(x)$ és $M(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M_{\frac{1}{k}}(x) = M(x) \implies$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = m \quad \text{és} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = M \quad \lambda\text{-m.m. az } [a, b] \text{ intervallumon.} \quad (5.21)$$

► Legyen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \sup R_f$, ha $x \in [a, b]$ és $g(x) := 0$, ha $x \notin [a, b]$. Ekkor g Lebesgue-integrálható és az 5.18. definícióban bevezetett jelöléssel $A_k^* \leq F_k^* \leq g$. Másrészt (5.21) miatt $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^* = m^*$ λ -m.m. és $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k^* = M^*$ λ -m.m., így a 4.22. tétel miatt m^* és M^* λ -mérhetőek. Mindezek alapján az A_k^* és F_k^* függvénytípusokra alkalmazható Lebesgue majorált konvergencia tétele:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} m \, d\lambda &= \int m^* \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int A_k^* \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} A_k \, d\lambda \stackrel{(5.20)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, D_k) \stackrel{5.34. \text{ lemma}}{=} I_*(f) \text{ és} \\ \int_{[a,b]} M \, d\lambda &= \int M^* \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int F_k^* \, d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} F_k \, d\lambda \stackrel{(5.20)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, D_k) \stackrel{5.34. \text{ lemma}}{=} I^*(f). \quad \square \end{aligned}$$

5.55. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) korlátos függvény. Az f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha folytonos λ -m.m. $[a, b]$ -n.*

Bizonyítás. ► „ $\implies$ ” Az 5.54. lemma miatt $\int_{[a,b]} (M - m) \, d\lambda = 0 \implies$ az 5.6. tétel ⑤ pontja miatt $M - m = 0$ λ -m.m. $[a, b]$ -n $\implies$ 5.53. lemma miatt f folytonos λ -m.m. $[a, b]$ -n.

► „ $\impliedby$ ” 5.53. lemma miatt $M = m$ λ -m.m. $[a, b]$ -n $\implies$ 5.21. tétel ① pontja miatt $\int_{[a,b]} m \, d\lambda = \int_{[a,b]} M \, d\lambda \implies$ 5.54. lemma miatt f Riemann-integrálható. $\square$

5.56. Tétel. *Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrálható, akkor f Lebesgue-integrálható is $[a, b]$ felett és*

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. A Lebesgue-kritérium miatt f folytonos λ -m.m. $[a, b]$ -n $\implies$ 5.53. lemma miatt $M = m$ λ -m.m. $[a, b]$ -n. Így (5.19) miatt $m = f$ λ -m.m. $[a, b]$ -n $\implies$ 5.54. lemma alapján $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_{[a,b]} m \, d\lambda = I_*(f) = \int_a^b f.$ $\square$

5.57. *Megjegyzés.* A Lebesgue-integrál hasonló kapcsolatban van a Lebesgue-mértékkel, mint a Riemann-integrál a Jordan-mértékkel (lásd a 6.29–6.31. tételeket).

5.58. Tétel. *Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre létezik az $\int_{-\infty}^{\infty} f$ improprius integrál, akkor f -nek létezik a Lebesgue-integrálja és*

$$\int f \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Bizonyítás. A feltétel miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $\int_{-n}^n f$, továbbá $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f \implies$ 5.56. tétel miatt f Lebesgue-integrálható $[-n, n]$ felett minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $\int_{-n}^n f = \int_{[-n, n]} f \, d\lambda \implies \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]} f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \chi_{[-n, n]} \, d\lambda$, ami a majorált konvergencia tétel miatt egyenlő $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f \chi_{[-n, n]} \, d\lambda = \int f \, d\lambda$ -val. $\square$

A következő két állítás hasonlóan bizonyítható.

5.59. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $(-\infty, a] \subset H \subset \mathbb{R}$ és létezik az $\int_{-\infty}^a f$ improprius integrál. Ekkor f -nek létezik a Lebesgue-integrálja $(-\infty, a]$ felett és*

$$\int_{(-\infty, a]} f \, d\lambda = \int_{-\infty}^a f.$$

5.60. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $[a, \infty) \subset H \subset \mathbb{R}$ és létezik az $\int_a^{\infty} f$ improprius integrál. Ekkor f -nek létezik a Lebesgue-integrálja $[a, \infty)$ felett és*

$$\int_{[a, \infty)} f \, d\lambda = \int_a^{\infty} f.$$

A következő tétel az ún. helyettesítéssel integrálás egy speciális esete. Az általános tétel bizonyítása hosszadalmas, így csak azt az esetet taglaljuk, amelyre a későbbiekben szükségünk lesz.

5.61. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_b$, melynek létezik Lebesgue-integrálja. Ekkor*

$$\int f \, d\lambda = |a| \int f(ax + b) \, d\lambda(x).$$

Bizonyítás. Legyen először f nemnegatív, és vezessük be a következő jelöléseket:
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_b$, $h(x) := f(ax+b)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$, $0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n < \infty$,
 $y := (y_1, \dots, y_n)$,

$$\begin{aligned} A_i &:= \{x \in \mathbb{R} : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geq 2), \\ A_n &:= \{x \in \mathbb{R} : y_n \leq f(x)\}, \\ s(f, y) &:= y_1 \lambda(A_1) + \dots + y_n \lambda(A_n) \\ B_i &:= \{x \in \mathbb{R} : y_i \leq h(x) < y_{i+1}\} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geq 2), \\ B_n &:= \{x \in \mathbb{R} : y_n \leq h(x)\}, \\ s(h, y) &:= y_1 \lambda(B_1) + \dots + y_n \lambda(B_n). \end{aligned}$$

Ha $i \in \{1, \dots, n-1\}$ és $x \in B_i$, akkor $y_i \leq f(ax+b) < y_{i+1} \implies ax+b \in A_i \implies x = g(ax+b) \in g(A_i) \implies B_i \subset g(A_i)$. Ha $i \in \{1, \dots, n-1\}$ és $x \in g(A_i)$, akkor $ax+b = g^{-1}(x) \in g^{-1}(g(A_i)) = A_i \implies y_i \leq f(ax+b) < y_{i+1} \implies x \in B_i \implies g(A_i) \subset B_i \implies B_i = g(A_i)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $B_n = g(A_n)$.

Így $s(h, y) = y_1 \lambda(g(A_1)) + \dots + y_n \lambda(g(A_n)) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{|a|} (y_1 \lambda(A_1) + \dots + y_n \lambda(A_n)) =$
 $\stackrel{2.51. \text{ tétel}}{=} \frac{1}{|a|} s(f, y)$, amiből már következik az állítás. Általános esetben $\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda = |a| \int f^+(ax+b) \, d\lambda(x) - |a| \int f^-(ax+b) \, d\lambda(x) = |a| \int f(ax+b) \, d\lambda(x)$. $\square$

6. fejezet

Mértékterek szorzata

6.1. Kétszeres integrál, Fubini-tétel

6.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és

$$\gamma: \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \rightarrow [0, \infty], \quad \gamma(A \times B) := \mu(A)\nu(B).$$

A γ -hoz tartozó külső mértéket jelöljük $\mu \otimes \nu$ -vel. A $\mu \otimes \nu$ -mérhető halmazok rendszerét jelöljük $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -vel. A $\mu \otimes \nu$ -nek $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -re vett leszűkítését a *μ és ν mértékek szorzatának* nevezzük, és ezt is $\mu \otimes \nu$ -vel jelöljük. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ teljes mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek *szorzatterének* nevezzük.

6.2. Definíció. Legyen $n \geq 3$ egész és $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ mértékterek $(i = 1, 2, \dots, n)$. Rekurzióval definiáljuk a

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n := (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$$

külső mértéket az $X_1 \times \dots \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ -en. Legyen

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n.$$

A $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ külső mérték leszűkítését $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ -re a μ_i -k szorzatának nevezzük és szintén $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ -nel jelöljük. Ha $X_1 = \dots = X_n$, $\mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_n$ és $\mu_i = \dots = \mu_n$, akkor a $\mu^n := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ és $\mathcal{A}^n := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ jelöléseket használjuk. Ugyanezt a jelölést használjuk $n = 2$ esetén is.

6.3. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_b$. Tegyük fel, hogy a

$$g_y: X \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad g_y(x) := f(x, y)$$

függvénynek ν -szerint majdnem minden $y \in Y$ esetén létezik az integrálja μ -szerint, és a

$$h: Y \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad h(y) = \begin{cases} \int g_y d\mu, & \text{ha } \exists \int g_y d\mu, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja ν -szerint. Ekkor azt mondjuk, hogy f -nek létezik az

$$\iint f d\mu d\nu = \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) := \int h d\nu$$

kétszeres integrálja. Hasonlóan értelmezhető $\iint f d\nu d\mu = \iint f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$ is.

6.4. Lemma. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &:= \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}, \\ \mathcal{P}_1 &:= \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_0 \right\}, \\ \mathcal{P}_2 &:= \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{P}_1 \right\}, \\ \mathcal{F} &:= \{S \subset X \times Y : \exists \iint \chi_S d\mu d\nu\}, \\ \varrho(S) &:= \iint \chi_S d\mu d\nu, \text{ ahol } S \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Ekkor teljesülnek a következők:

- ① Ha $S_j \in \mathcal{F}$ ($j \in \mathbb{N}$) diszjunktak, akkor $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F}$ és $\sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j) = \varrho\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right)$.
- ② Ha $S_j \in \mathcal{F}$ ($j \in \mathbb{N}$), $S_1 \supset S_2 \supset \dots$ és $\varrho(S_1) < \infty$, akkor $\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F}$ és $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(S_j) = \varrho\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j\right)$.
- ③ Ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$, akkor $A \times B \in \mathcal{F}$ és $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
- ④ $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$.
- ⑤ Ha $S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0$, akkor $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{P}_0$.
- ⑥ Ha $S \in \mathcal{P}_0$, akkor $\exists S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0$, hogy $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ és $\bar{S} = S_1 \cup S_2$.
- ⑦ $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$.
- ⑧ Ha $T_1, T_2 \in \mathcal{P}_1$, akkor $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{P}_1$.
- ⑨ Ha $S \subset X \times Y$, akkor $(\mu \otimes \nu)(S) = \inf\{\varrho(T) : S \subset T \in \mathcal{P}_1\}$.
- ⑩ Ha $S \subset X \times Y$, akkor $\exists W \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}$, hogy $S \subset W$ és $(\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) = \varrho(W)$.

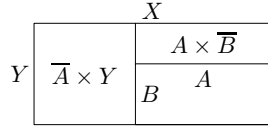
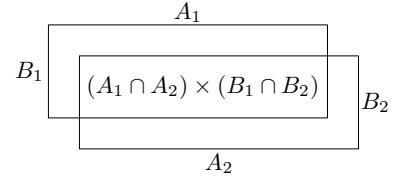
Bizonyítás. ► ① feltételével és $S^* := \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ jelöléssel az 5.9. tétel miatt teljesül, hogy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \iint \chi_{S_j} d\mu d\nu = \iint \left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{S_j} \right) d\mu d\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diszjunkttság}}}{=} \iint \chi_{S^*} d\mu d\nu \implies \text{①}.$$

► ② feltételei esetén legyen $S^{**} := \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ és $(x, y) \in X \times Y$. Ha $\exists j_0 \in \mathbb{N}$, hogy $(x, y) \notin S_{j_0} \implies (x, y) \notin S_j \forall j \geq j_0$ és $(x, y) \notin S^{**} \implies \chi_{S_j}(x, y) = 0 \forall j \geq j_0$ és $\chi_{S^{**}}(x, y) = 0$. Ha $(x, y) \in S_j \forall j \in \mathbb{N} \implies \chi_{S_j}(x, y) = 1 \forall j \in \mathbb{N}$ és $\chi_{S^{**}}(x, y) = 1$. Mindezekből $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_{S_j} = \chi_{S^{**}}$, másrészt $\chi_{S_j} \leq \chi_{S_1} \forall j \in \mathbb{N}$. Így a majorált konvergencia tétel miatt $\lim_{j \rightarrow \infty} \int \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x) = \int \chi_{S^{**}}(x, y) d\mu(x) \forall y \in Y$. Ezenkívül $\int \chi_{S_j}(x, y) d\mu(x) \leq \int \chi_{S_1}(x, y) d\mu(x) \forall j \in \mathbb{N}$. Így ismét alkalmazva a majorált konvergencia tételt $\lim_{j \rightarrow \infty} \iint \chi_{S_j} d\mu d\nu = \iint \chi_{S^{**}} d\mu d\nu \implies \text{②}$.

► $A \times B \in \mathcal{P}_0$ esetén $\iint \chi_{A \times B} d\mu d\nu = \iint \chi_A \chi_B d\mu d\nu = \int \chi_B \left(\underbrace{\int \chi_A d\mu}_{\mu(A)} \right) d\nu = \mu(A)\nu(B) \implies \text{③ és ④}.$

► $S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0$ esetén $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ és $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, hogy $S_1 = A_1 \times B_1$ és $S_2 = A_2 \times B_2 \implies S_1 \cap S_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{P}_0 \implies \textcircled{5}$.



► $S \in \mathcal{P}_0$ esetén $\exists A \in \mathcal{A}$ és $\exists B \in \mathcal{B}$, hogy $S = A \times B \implies \bar{S} = \underbrace{(\bar{A} \times Y)}_{:=S_1} \cup \underbrace{(A \times \bar{B})}_{:=S_2} \implies \textcircled{6}$.

► Legyen $T \in \mathcal{P}_1 \implies \exists S_i \in \mathcal{P}_0$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Ekkor $\textcircled{6}$ miatt $\exists S_1^{(i)}, S_2^{(i)} \in \mathcal{P}_0$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $S_1^{(i)} \cap S_2^{(i)} = \emptyset$ és $\bar{S}_i = S_1^{(i)} \cup S_2^{(i)}$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_n \text{ előáll véges sok } \mathcal{P}_0\text{-beli diszjunkt halmaz uniójaként.} \quad (6.1)$$

$n = 1$ -re $\bar{S}_1 = S_1^{(1)} \cup S_2^{(1)}$ miatt igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra teljesül (6.1), azaz $\exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{P}_0$ diszjunkt rendszer, hogy $\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_k = A_1 \cup \dots \cup A_r$. Ekkor $\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{k+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_r) \cap \bar{S}_{k+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_r) \cap (S_1^{(k+1)} \cup S_2^{(k+1)}) = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{l=1}^r \underbrace{[A_l \cap S_j^{(k+1)}]}_{\textcircled{5} \implies \in \mathcal{P}_0}$. Ezzel (6.1) bizonyított. Legyen

$$T_1 := S_1 \quad \text{és} \quad T_i := \bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{i-1} \cap S_i \quad (i \geq 2).$$

Ekkor T_i ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer és $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. Másrészt (6.1) és $\textcircled{5}$ miatt T_i előáll véges sok $\mathcal{P}_0$ -beli diszjunkt halmaz uniójaként. Mindezekből

$$T \in \mathcal{P}_1 \text{ megszámlálhatóan végtelen sok } \mathcal{P}_0\text{-beli diszjunkt halmaz uniója.} \quad (6.2)$$

Ebből $\textcircled{4}$ és $\textcircled{1}$ miatt $T \in \mathcal{F} \implies \textcircled{7}$.

► $T_1, T_2 \in \mathcal{P}_1$ esetén $\exists S_i^{(1)}, S_j^{(2)} \in \mathcal{P}_0$ ($i, j \in \mathbb{N}$), hogy $T_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^{(1)}$ és $T_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j^{(2)} \implies T_1 \cap T_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^{(1)} \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j^{(2)} \right) = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \underbrace{(S_i^{(1)} \cap S_j^{(2)})}_{\textcircled{5} \implies \in \mathcal{P}_0} \in \mathcal{P}_1 \implies \textcircled{8}$.

► Legyen $S \subset X \times Y$ és $H := \left\{ \sum_{i \in I} \mu(A_i) \nu(B_i) : I \subset \mathbb{N}, A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0 \text{ } (i \in I), S \subset \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \right\} \implies (\mu \otimes \nu)(S) = \inf H$. Ha $I \subset \mathbb{N}$ és $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$ ($i \in I$), akkor legyen $A_i \times B_i := \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ és $\sum_{i \in I} \mu(A_i) \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \implies H = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) : A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0 \text{ } (i \in \mathbb{N}), S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \right\}$. Ha $T \in \mathcal{P}_1$, akkor $\textcircled{7}$ miatt $T \in \mathcal{F}$, azaz $\exists \varrho(T)$. Így definiálható a következő halmaz:

$$H^* := \{\varrho(T) : S \subset T \in \mathcal{P}_1\}.$$

Legyen $T \in \mathcal{P}_1 \implies \exists A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$. Ha $(x, y) \in X \times Y$ esetén $\chi_T(x, y) = 1$, akkor $\exists i_0$, hogy $(x, y) \in A_{i_0} \times B_{i_0}$, azaz $\chi_{A_{i_0} \times B_{i_0}}(x, y) = 1 \implies \chi_T \leq \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i} \implies \varrho(T) = \iint \chi_T d\mu d\nu \leq \iint \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i} d\mu d\nu \underset{A_i \times B_i \in \mathcal{F}}{\uparrow} = \sum_{i=1}^{\infty} \iint \chi_{A_i \times B_i} d\mu d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \varrho(A_i \times B_i) \underset{\textcircled{3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \implies \inf H^* \leq \inf H$.

(6.2) szerint $\exists A_i^* \times B_i^* \in \mathcal{P}_0$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, hogy $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^* \times B_i^* \implies \chi_T = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i^* \times B_i^*}$, így az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $\varrho(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^*) \nu(B_i^*) \implies H^* \subset H \implies \inf H^* \geq \inf H$. Mindezekből $\inf H^* = \inf H \implies \textcircled{9}$.

► Legyen $S \subset X \times Y$. Ha $(\mu \otimes \nu)(S) = \infty$, akkor legyen $W := X \times Y \implies W \in \mathcal{P}_2$ és $W \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$. A külső mérték monotonitása miatt $(\mu \otimes \nu)(W) = \infty$, illetve $\textcircled{9}$ alapján $\infty = \inf\{\varrho(T) : S \subset T \in \mathcal{P}_1\} \implies \varrho(T) = \infty$, ha $S \subset T \in \mathcal{P}_1 \implies \varrho(W) = \infty$, hiszen $S \subset W \in \mathcal{P}_1 \implies \textcircled{10}$.

Most tegyük fel, hogy $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$. Ekkor $\textcircled{9}$ miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez $\exists T_n \in \mathcal{P}_1$, hogy $S \subset T_n$ és $\varrho(T_n) < (\mu \otimes \nu)(S) + \frac{1}{n}$. Legyen $V_i := T_i \cap \dots \cap T_i$ ($i \in \mathbb{N}$) és $W := \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$. Ekkor $S \subset W$ és $\textcircled{8}$ miatt $V_i \in \mathcal{P}_1 \forall i \in \mathbb{N}$, azaz $W \in \mathcal{P}_2$. Mivel $\varrho(V_1) < \infty$, $V_1 \supset V_2 \supset \dots$, és $\textcircled{7}$ miatt $V_i \in \mathcal{F}$, ezért $\textcircled{2}$ szerint $W \in \mathcal{F}$ és

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(V_i) = \varrho(W). \quad (6.3)$$

$S \subset V_i \implies \textcircled{9}$ miatt $(\mu \otimes \nu)(S) \leq \varrho(V_i) \leq \varrho(T_i) < (\mu \otimes \nu)(S) + \frac{1}{i} \implies (\mu \otimes \nu)(S) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(V_i) \underset{\textcircled{6.3}}{=} \varrho(W)$. Másrészt $W \subset V_i \implies \textcircled{9}$ miatt $(\mu \otimes \nu)(W) \leq \varrho(V_i) \leq \varrho(T_i) < (\mu \otimes \nu)(S) + \frac{1}{i} \underset{\textcircled{6.3}}{\leq} (\mu \otimes \nu)(W) + \frac{1}{i} \implies (\mu \otimes \nu)(W) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varrho(V_i) \underset{\textcircled{6.3}}{=} \varrho(W)$. Ezzel $\textcircled{10}$ bizonyítását is befejeztük. $\square$

6.5. Tétel. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek. Ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$, akkor $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ és $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Bizonyítás. A bizonyításban a 6.4. lemma jelöléseit használjuk. Először az egyenlőséget látjuk be:

$(\mu \otimes \nu)(A \times B) \underset{\textcircled{9}}{=} \inf\{\varrho(T) : A \times B \subset T \in \mathcal{P}_1\} \underset{A \times B \in \mathcal{P}_1}{\leq} \varrho(A \times B) \underset{\textcircled{3}}{=} \mu(A)\nu(B)$. Ebben az egyenlőtlenségben „ $\leq$ ” helyére „ $\geq$ ” is írható, mert $A \times B \subset T \in \mathcal{P}_1$ esetén $\varrho(A \times B) \leq \varrho(T)$. Így $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Még azt kell belátni, hogy $V := A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Legyen $S \subset X \times Y$. Ekkor $\textcircled{9}$ miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez $\exists T_n \in \mathcal{P}_1$, hogy $S \subset T_n$ és $(\mu \otimes \nu)(S) + \frac{1}{n} \geq \varrho(T_n) = \varrho(\underbrace{T_n \cap V}_{\substack{\text{5.9. tétel} \\ \in \mathcal{P}_1}}) +$

$+ \varrho(\underbrace{T_n \setminus V}_{\in \mathcal{P}_1}) \underset{\textcircled{9}}{\geq} (\mu \otimes \nu)(S \cap V) + (\mu \otimes \nu)(S \setminus V) \implies n \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy V $\mu \otimes \nu$ -mérhető, azaz $V \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $\square$

Ebből a tételből teljes indukcióval kapjuk a következő állítást.

6.6. Tétel. *Ha $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ mértékterek és $A_i \in \mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, n$), akkor $A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ és $(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$.*

Ennek speciális esete a következő tétel.

6.7. Tétel. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$, akkor $B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{A}^n$ és $\mu^n(B_1 \times \dots \times B_n) = \mu(B_1) \cdots \mu(B_n)$.*

A következőkben a kétszeres integrálok egy fontos tulajdonságát taglaljuk.

6.8. Tétel (Fubini-tétel). *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ teljes mértékterek, továbbá $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_b$ egy olyan függvény, mely egy σ -véges halmazon kívül eltűnik, azaz $\exists H \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ -véges halmaz, hogy $f(x, y) = 0 \ \forall (x, y) \in \overline{H}$ -ra. Ha f -nek létezik az integrálja $\mu \otimes \nu$ -szerint, akkor léteznek az alábbi integrálok és*

$$\int f \, d(\mu \otimes \nu) = \iint f \, d\mu \, d\nu = \iint f \, d\nu \, d\mu. \quad (6.4)$$

Bizonyítás. A 6.4. lemma jelöléseit fogjuk használni.

► Legyen $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Ekkor $\textcircled{10}$ szerint $\exists W \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}$, hogy $\varrho(W) = (\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W)$ és $S \subset W$.

a) Tegyük fel, hogy $(\mu \otimes \nu)(S) = 0$, azaz $\varrho(W) = 0$. A W ún. felső metszete legyen $W^y := \{x \in X : (x, y) \in W\}$ ($y \in Y$). Ekkor $x \in W^y$ pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) \in W$, azaz $\chi_W(x, y) = \chi_{W^y}(x) \ \forall (x, y) \in X \times Y \implies W \in \mathcal{F}$ miatt χ_{W^y} μ -mérhető, így a 4.29. tétel miatt $W^y \in \mathcal{A} \implies \int \chi_W(x, y) \, d\mu(x) = \int \chi_{W^y} \, d\mu = \mu(W^y) \ \forall y \in Y \implies \varrho(W) = \iint \chi_W \, d\mu \, d\nu = \int \mu(W^y) \, d\nu(y) = 0 \implies H := \{y \in Y : \mu(W^y) \neq 0\}$ jelöléssel $H \in \mathcal{B}$ és $\mu(H) = 0$. Másrészt μ teljessége és $S^y := \{x \in X : (x, y) \in S\} \subset W^y$ miatt $y \in \overline{H}$ esetén $S^y \in \mathcal{A}$ és $\mu(S^y) = 0$

$\implies h: Y \rightarrow \mathbb{R}_b$, $h(y) := \mu(S^y)$ jelöléssel $h = 0$ ν -m.m. $\implies$ 4.18. tétel szerint h ν -mérhető $\implies$ 5.6. tétel $\textcircled{5}$ pontja miatt $0 = \int \mu(S^y) \, d\nu(y)$

$$= \iint \chi_{S^y} \, d\mu \, d\nu(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \chi_S(x, y) = \chi_{S^y}(x)}}{=} \iint \chi_S \, d\mu \, d\nu = \varrho(S).$$

$S^y \in \mathcal{A} \implies \chi_{S^y} \ \mu$ -mérhető

Ezzel bizonyítottuk, hogy $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ és $(\mu \otimes \nu)(S) = 0$ esetén $S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(S) = 0$.

b) Tegyük fel, hogy $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$. A 6.5. tétel szerint $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, így $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ -algebra volta miatt $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies W \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies W \setminus S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Másrészt $(\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) < \infty$. Így $(\mu \otimes \nu)(W \setminus S) = 0 \implies a)$ miatt $W \setminus S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(W \setminus S) = 0$. Mivel $S \subset W$, ezért $\chi_{W \setminus S} = \chi_W - \chi_S$. Összefoglalva tehát $W, W \setminus S \in \mathcal{F}$, $\chi_S = \chi_W - \chi_{W \setminus S}$ és $\varrho(W \setminus S) = 0$. Így az integrál homogenitása és additivitása miatt $S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(S) = \varrho(W) - \varrho(W \setminus S) = \varrho(W) = (\mu \otimes \nu)(S)$. Tehát

$$S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \text{ és } (\mu \otimes \nu)(S) < \infty \text{ esetén } \int \chi_S \, d(\mu \otimes \nu) = \iint \chi_S \, d\mu \, d\nu. \quad (6.5)$$

► Legyen $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ -véges $\implies \exists A_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$), hogy $(\mu \otimes \nu)(A_i) < \infty$ $\forall i \in I$ és $S \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies B_i := S \cap A_i$ jelöléssel $S = \bigcup_{i \in I} B_i$ és $(\mu \otimes \nu)(B_i) < \infty$ $\forall i \in I$
 $\implies S_i := B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$ jelöléssel $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ diszjunkt felbontás és $(\mu \otimes \nu)(S_i) < \infty$ $\forall i \in I \implies \int \chi_S d(\mu \otimes \nu) = \sum_{i \in I} \int \chi_{S_i} d(\mu \otimes \nu) \stackrel{(6.5)}{=} \sum_{i \in I} \iint \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint \sum_{i \in I} \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint \chi_S d\mu d\nu$. Tehát

$$\text{ha } S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \text{ } \sigma\text{-véges, akkor } \int \chi_S d(\mu \otimes \nu) = \iint \chi_S d\mu d\nu. \quad (6.6)$$

► Legyen $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ $\mu \otimes \nu$ -mérhető egyszerű függvény, mely H -n kívül eltűnik, és tegyük fel, hogy $R_f = \{y_1, \dots, y_n\}$. Ekkor $S_i := X(f = y_i)$ jelöléssel $f = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{S_i}$ és S_i σ -véges $\implies \int f d(\mu \otimes \nu) = \sum_{i=1}^n y_i \int \chi_{S_i} d(\mu \otimes \nu) \stackrel{(6.6)}{=} \sum_{i=1}^n y_i \iint \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint \sum_{i=1}^n y_i \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint f d\mu d\nu$.

► Legyen $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ $\mu \otimes \nu$ -mérhető függvény, mely H -n kívül eltűnik. Ekkor az approximációs tétel, az előző pont és a Beppo Levi tétel miatt teljesül (6.4) első egyenlősége.

► Ha az $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_b$ függvénynek létezik az integrálja és H -n kívül eltűnik, akkor az előző pontból és az integrál definíciójából kapjuk a (6.4) első egyenlőségét. A (6.4) második egyenlősége hasonlóan mutatható meg. $\square$

6.9. Tétel. *Ha $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ mértékterek, akkor*

$$\sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\}) \subset \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n.$$

Bizonyítás. $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ a 6.6. tétel miatt, melyből adódik az állítás. $\square$

Ezen tétel kapcsán felmerül a következő kérdés. Tekintsük $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ -nek

$$\mathcal{H} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\})$$

halmazra vett leszűkítését. Az így kapott függvény (az előző és a 6.6. tétel szerint) olyan mérték az $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{H})$ mértéktéren, ami

$$\gamma: \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad \gamma(A_1 \times \dots \times A_n) := \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$$

kiterjesztése. De vajon létezik-e másik ilyen tulajdonságú mérték? A következő tétel szerint σ -véges esetben nem.

6.10. Tétel. *Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ σ -véges mértékterek,*

$$\gamma: \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad \gamma(A_1 \times \dots \times A_n) := \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i),$$

és $\mathcal{H} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n\})$. Ekkor pontosan egy mérték létezik az $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{H})$ mértéktéren, mely γ -nak kiterjesztése. Ez a mérték $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ -nek $\mathcal{H}$ -ra vett leszűkítése. A továbbiakban ezt a mértéket $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ módon fogjuk jelölni.

Bizonyítás. A 6.9. és 6.6. tételek miatt $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ valóban γ -nak mértékké való kiterjesztése $\mathcal{H}$ -ra. A 2.19. tétel miatt γ értelmezési tartománya félgyűrű, amely tartalmazza az $X_1 \times \dots \times X_n$ halmazt, továbbá γ σ -additív (hiszen a $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ mérték leszűkítése) és a feltétel miatt σ -véges is. Így a Caratheodory-féle kiterjesztési tétel miatt $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ az egyetlen olyan mérték $\mathcal{H}$ -n, amely γ -nak kiterjesztése. $\square$

A $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ mértéket rekurzív módon is definiálhatjuk a következő tétel miatt.

6.11. Tétel. *Legyenek $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ σ -véges mértékterek. Ekkor*

$$\mu_1 \times \dots \times \mu_{n+1} = (\mu_1 \times \dots \times \mu_n) \times \mu_{n+1}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy a két függvény értelmezési tartománya megegyezik, azaz

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n\} \\ \mathcal{K} &:= \{A \times A_{n+1} : A \in \sigma(\mathcal{H}), A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}\} \\ \mathcal{S} &:= \{A_1 \times \dots \times A_{n+1} : A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}\} \end{aligned}$$

jelölésekkel $\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{S})$. Legyen

$$\mathcal{K}^* := \{A \in \sigma(\mathcal{H}) : A \times A_{n+1} \in \sigma(\mathcal{S}) \quad \forall A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1} \text{ esetén}\}.$$

Ekkor teljesülnek a következők.

- 1) $X_1 \times \dots \times X_n \in \mathcal{K}^*$.
- 2) Ha $B_i \in \mathcal{K}^* (i \in \mathbb{N}) \implies B_i \in \sigma(\mathcal{H})$ és $B_i \times A_{n+1} \in \sigma(\mathcal{S})$, ha $A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \sigma(\mathcal{H})$ és $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \times A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \times A_{n+1}) \in \sigma(\mathcal{S}) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{K}^*$.
- 3) Ha $A \in \mathcal{K}^* \implies A \in \sigma(\mathcal{H})$ és $A \times A_{n+1} \in \sigma(\mathcal{S})$, ha $A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1} \implies \overline{A} \in \sigma(\mathcal{H})$ és $\overline{A} \times A_{n+1} = \overline{A \times A_{n+1}} \setminus (X_1 \times \dots \times X_n \times A_{n+1}) \in \sigma(\mathcal{S}) \implies \overline{A} \in \mathcal{K}^*$.

Tehát $\mathcal{K}^*$ σ -algebra. Ebből $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}^* \subset \sigma(\mathcal{H})$ miatt $\mathcal{K}^* = \sigma(\mathcal{H})$, azaz $\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{S})$. Másrészt $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$ miatt $\sigma(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{K}) \implies \mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{K}) \implies \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{S})$. $\square$

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogyan módosul a Fubini-tétel, ha a szorzatmezőt leszűkítjük az előző értelemben. Ehhez először szükség van egy lemmára.

6.12. Lemma. *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és*

$$\mathcal{H} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Ha $E \in \mathcal{H}$, akkor

$$E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X,$$

$$E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\} \in \mathcal{A} \quad \forall y \in Y.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in Y$ rögzített és $\mathcal{S} := \{E \in \mathcal{H} : E^y \in \mathcal{A}\}$. Ekkor könnyen látható, hogy

$$\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{H},$$

továbbá, hogy $\mathcal{S}$ σ -algebra. Ebből azt kapjuk, hogy $\mathcal{S} = \mathcal{H} \implies E^y \in \mathcal{A} \quad \forall E \in \mathcal{A}$ és $\forall y \in Y$ esetén. A lemma másik állítása hasonlóan adódik. $\square$

6.13. Tétel (Fubini-tétel szűkített mezőben). *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -véges mértékterek, továbbá $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_b$ olyan függvény, melynek létezik az integrálja $\mu \times \nu$ -szerint. Ekkor léteznek az alábbi integrálok és*

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \iint f \, d\mu \, d\nu = \iint f \, d\nu \, d\mu. \quad (6.7)$$

Bizonyítás. A 6.4. lemma jelöléseit fogjuk használni.

► Legyen $S \in \mathcal{H}$. Ekkor a 6.4. lemma ⑩ pontja szerint $\exists W \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}$, hogy $\varrho(W) = (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W)$ és $S \subset W$. Másrészt $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{H}$ miatt $W \in \mathcal{H}$.

a) Tegyük fel, hogy $(\mu \times \nu)(S) = 0$, azaz $\varrho(W) = 0$. Ekkor az előző lemma jelölésével $x \in W^y$ pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) \in W$, azaz $\chi_W(x, y) = \chi_{W^y}(x) \quad \forall (x, y) \in X \times Y \implies W \in \mathcal{H}$ miatt $W^y \in \mathcal{A}$ az előző lemmából, így $\int \chi_W(x, y) \, d\mu(x) = \int \chi_{W^y} \, d\mu = \mu(W^y) \quad \forall y \in Y \implies \varrho(W) = \iint \chi_W \, d\mu \, d\nu = \int \mu(W^y) \, d\nu(y) = 0 \implies$ 5.6. tétel ⑤ pontja miatt $\mu(W^y) = 0$ ν -m.m. $y \in Y$ esetén. Másrészt $S \in \mathcal{H}$, így $S^y \in \mathcal{A}$, továbbá $S^y \subset W^y$. Ebből $\mu(S^y) \leq \mu(W^y) = 0$ ν -m.m. $y \in Y$ -ra $\implies \mu(S^y) = 0$ ν -m.m. $y \in Y$ -ra $\implies$ 5.6. tétel ⑤ pontja miatt $\int \mu(S^y) \, d\nu(y) = \iint \chi_S \, d\mu \, d\nu = 0$. Tehát bizonyítottuk, hogy $S \in \mathcal{H}$ és $(\mu \times \nu)(S) = 0$ esetén $S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(S) = 0$.

b) Tegyük fel, hogy $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Ekkor $W \setminus S \in \mathcal{H}$ és $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) < \infty$, így $(\mu \times \nu)(W \setminus S) = 0 \implies a)$ miatt $W \setminus S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(W \setminus S) = 0$. Mivel $S \subset W$, ezért $\chi_{W \setminus S} = \chi_W - \chi_S$. Összefoglalva tehát $W, W \setminus S \in \mathcal{F}$, $\chi_S = \chi_W - \chi_{W \setminus S}$ és $\varrho(W \setminus S) = 0$. Így az integrál homogenitása és additivitásából $S \in \mathcal{F}$ és $\varrho(S) = \varrho(W) - \varrho(W \setminus S) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(S)$. Tehát

$$S \in \mathcal{H} \text{ és } (\mu \times \nu)(S) < \infty \text{ esetén } \int \chi_S \, d(\mu \times \nu) = \iint \chi_S \, d\mu \, d\nu. \quad (6.8)$$

► Legyen $S \in \mathcal{H}$. Ekkor a σ -végeesség miatt létezik $A_i \in \mathcal{H}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$), hogy $(\mu \times \nu)(A_i) < \infty \quad \forall i \in I$ és $S \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies B_i := S \cap A_i$ jelöléssel $S = \bigcup_{i \in I} B_i$ és

$(\mu \times \nu)(B_i) < \infty \forall i \in I \implies S_i := B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$ jelöléssel $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ diszjunkt felbontás
 és $(\mu \times \nu)(S_i) < \infty \forall i \in I \implies \int \chi_S d(\mu \times \nu) = \sum_{i \in I} \int \chi_{S_i} d(\mu \times \nu) \underset{(6.8)}{=} \sum_{i \in I} \iint \chi_{S_i} d\mu d\nu =$
 $= \iint \sum_{i \in I} \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint \chi_S d\mu d\nu$. Tehát

$$\text{ha } S \in \mathcal{H}, \text{ akkor } \int \chi_S d(\mu \times \nu) = \iint \chi_S d\mu d\nu. \quad (6.9)$$

► Legyen $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$ $\mu \times \nu$ -mérhető egyszerű függvény, és tegyük fel, hogy $R_f = \{y_1, \dots, y_n\}$. Ekkor $S_i := X(f = y_i)$ jelöléssel $f = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{S_i} \implies \int f d(\mu \times \nu) =$
 $= \sum_{i=1}^n y_i \int \chi_{S_i} d(\mu \times \nu) \underset{(6.9)}{=} \sum_{i=1}^n y_i \iint \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint \sum_{i=1}^n y_i \chi_{S_i} d\mu d\nu = \iint f d\mu d\nu$.

► Legyen $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ $\mu \otimes \nu$ -mérhető függvény. Ekkor az approximációs tétel, az előző pont és a Beppo Levi tétel miatt teljesül (6.7) első egyenlősége.

► Ha az $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_b$ függvénynek létezik az integrálja, akkor az előző pontból és az integrál definíciójából kapjuk a (6.7) első egyenlőségét. A (6.7) második egyenlősége hasonlóan mutatható meg. $\square$

A kétszeres integrál fogalma és a Fubini-tétel kiterjeszthető komplex értékű függvényekre is.

6.14. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$. Ha léteznek az $\iint \Re h d\mu d\nu$ és $\iint \Im h d\nu d\mu$ kétszeres integrálok, és azok végesek, akkor azt mondjuk, hogy h -nak létezik az $\iint h d\mu d\nu = \iint h(x, y) d\mu(x) d\nu(y) := \iint \Re h d\mu d\nu + i \iint \Im h d\nu d\mu$ kétszeres integrálja.

Ebből a definícióból és a 6.13. tételből azonnal adódik a következő állítás.

6.15. Tétel (Fubini-tétel komplex értékű függvényekre). *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -véges mértékterek, továbbá $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ integrálható függvény $\mu \times \nu$ -szerint, akkor léteznek a következő integrálok és*

$$\int h d(\mu \times \nu) = \iint h d\mu d\nu = \iint h d\nu d\mu.$$

6.2. Többdimenziós Lebesgue-mérték

6.16. Definíció. Az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ ($n \geq 2$ egész) mértékteret *n -dimenziós Lebesgue-mértéktérnek*, λ^n -et pedig *n -dimenziós Lebesgue-mértéknek* nevezzük. A Lebesgue-mértéket szokás *egydimenziós Lebesgue-mértéknek* is nevezni. Geometriaiban λ^2 a *területet*, λ^3 pedig a *térfogatot* jelenti.

A következő tétel a 6.7. tétel speciális esete.

6.17. Tétel. $B_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, \dots, n$) esetén $B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{L}^n$, továbbá

$$\lambda^n(B_1 \times \dots \times B_n) = \lambda(B_1) \cdots \lambda(B_n).$$

6.18. Tétel. Az $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) minden Borel-mérhető részhalmaza λ^n -mérhető.

Bizonyítás. A 6.6. tétel alapján $\mathcal{H} := \{(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i (i = 1, \dots, n)\} \subset \mathcal{L}^n$. Így $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^n$, hiszen $\mathcal{L}^n$ σ -algebra. A 3.14. tétel miatt viszont $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, melyből következik az állítás. $\square$

A 3.17. tétel a többdimenziós Lebesgue-mérhető halmazok rendszerére nem teljesül. Erről szól a következő állítás.

6.19. Tétel. $\sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{L}, i = 1, \dots, n\})$ valódi részhalmaza $\mathcal{L}^n$ -nek, ha $n \geq 2$.

Bizonyítás. Csak $n = 2$ esetén bizonyítunk, tetszőleges $n > 2$ egészre hasonló a gondolatmenet. Legyen

$$\begin{aligned} R &:= \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \mathcal{H} &:= \sigma(\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\}), \\ \mathcal{H}^* &:= \{H \in \mathcal{H} : \{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in H\} \in \mathcal{L}\}. \end{aligned}$$

Ekkor $\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{H}$ és $\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{L}^2$ miatt $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2$. Másrészt $\mathcal{H}^*$ σ -algebra az alábbiak miatt:

- 1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathcal{H}$ és $\mathbb{R} \in \mathcal{L} \implies \mathbb{R}^2 \in \mathcal{H}^*$.
- 2) Ha $H \in \mathcal{H}^* \implies H \in \mathcal{H}$ és $\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in H\} \in \mathcal{L} \implies \overline{H} \in \mathcal{H}$ és $\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in \overline{H}\} = \overline{\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in H\}} \in \mathcal{L} \implies \overline{H} \in \mathcal{H}^*$.
- 3) Ha $H_i \in \mathcal{H}^*$ ($i \in \mathbb{N}$) $\implies H_i \in \mathcal{H}$ és $\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in H_i\} \in \mathcal{L} \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \mathcal{H}$ és $\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in H_i\} \in \mathcal{L} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \in \mathcal{H}^*$.

Tehát $\mathcal{H}^*$ σ -algebra, másrészt $\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{H}^* \subset \mathcal{H} \implies \mathcal{H}^* = \mathcal{H}$.

Most legyen $V \subset \mathbb{R}$ olyan, hogy $V \notin \mathcal{L}$. Ekkor $V \times \{0\} \subset R$, másrészt $\lambda^2(R) = 0$ és λ^2 teljes mérték, így $V \times \{0\} \in \mathcal{L}^2$. De $V \times \{0\} \notin \mathcal{H}^*$, hiszen $\{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in V \times \{0\}\} = V \notin \mathcal{L} \implies V \times \{0\} \notin \mathcal{H}$, amiből $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2$ miatt következik az állítás. $\square$

6.20. Tétel. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ valódi részhalmaza $\mathcal{L}^n$ -nek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Bizonyítás. A 6.18. tétel szerint $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$. Ebből és a 3.17. tételből $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n\}) \subset \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{L}, i = 1, \dots, n\})$, ami a 6.19. tétel szerint valódi részhalmaza $\mathcal{L}^n$ -nek, ha $n \geq 2$. Így ebben az esetben a tétel bizonyított.

$n = 1$ esetén jelölje C a Cantor-féle triadikus halmazt. Ekkor $C \in \mathcal{L}$ és $\lambda(C) = 0$. Így λ teljessége miatt $\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{L}$. Viszont C kontinuum számosságú, így $\mathcal{P}(C)$ és vele együtt $\mathcal{L}$ számossága nagyobb kontinuumnál. Ezzel ebben az esetben is kész a bizonyítás, hiszen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ kontinuum számosságú. $\square$

6.21. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) Jordan-mérhető, akkor λ^n -mérhető is, továbbá a Jordan-mértéke $\lambda^n(H)$ -val egyenlő.*

Bizonyítás. A tételt csak $n = 2$ -re bizonyítjuk, de tetszőleges n -re analóg az eljárás.

► Legyen

$$\Sigma(H) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda(A_i) \lambda(B_i) : I \subset \mathbb{N}, A_i, B_i \in \mathcal{L} (i \in I), H \subset \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i) \right\}.$$

Ekkor a Jordan-mérték definíciójában használt jelölésekkel

$$\{m^*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\} \subset \Sigma(H)$$

$$\implies \lambda^2(H) = \inf \Sigma(H) \leq \inf \{m^*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\} = m^*(H).$$

Másrészt, ha D beosztása T -nek, akkor λ^2 monotonitása miatt $m_*(H, D) \leq \lambda^2(H) \implies m_*(H) = \sup \{m_*(H, D) : D \text{ beosztása } T\text{-nek}\} \leq \lambda^2(H)$. Tehát azt kaptuk, hogy $m_*(H) \leq \lambda^2(H) \leq m^*(H) \forall H \subset \mathbb{R}^2$. $\implies$ Mivel H Jordan-mérhető, a Jordan-mértéke $\lambda^2(H)$.

► Jelölje ∂H a H határpontjainak halmazát és H° a H belső pontjainak halmazát. Mivel H Jordan-mérhető, ezért az 1.33. tétel miatt ∂H is Jordan-mérhető és Jordan-mértéke 0. $\implies \lambda^2(\partial H) = 0 \implies$ 2.5. megjegyzés miatt ∂H és annak minden részhalmaza λ^2 -mérhető. Másrészt H° nyílt, így $H^\circ \in \mathcal{L}^2 \implies H \in \mathcal{L}^2$, hiszen H előáll a H° és a ∂H valamely részhalmazának uniójaként. $\square$

6.22. Tétel. $\lambda^n(B) = \inf \{ \lambda^n(N) : B \subset N \subset \mathbb{R}^n, N \text{ nyílt} \}$, ha $B \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Bizonyítás. A tételt csak $n = 2$ -re bizonyítjuk, de tetszőleges n -re analóg az eljárás. Legyen

$$\Sigma(B) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda(B_i) \lambda(C_i) : I \subset \mathbb{N}, B_i, C_i \in \mathcal{L} (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} (B_i \times C_i) \right\}.$$

Ha $\lambda^2(B) = \infty$, akkor $B \subset N$ esetén $\lambda^2(N) = \infty \implies$ állítás. Most tegyük fel, hogy $\lambda^2(B) < \infty$. Ekkor $\Sigma(B) \neq \emptyset$ miatt, $\varepsilon > 0$ esetén létezik $I \subset \mathbb{N}$, $B_i, C_i \in \mathcal{L} (i \in I)$, $B \subset \bigcup_{i \in I} (B_i \times C_i)$, melyre

$$\sum_{i \in I} \lambda(B_i) \lambda(C_i) \leq \inf \Sigma(B) + \varepsilon = \lambda^2(B) + \varepsilon. \quad (6.10)$$

Legyen $\delta_i > 0$ az $x^2 + (\lambda(B_i) + \lambda(C_i))x = \frac{\varepsilon}{2^i}$ egyenlet megoldása. Ekkor a 2.58. tétel miatt létezik $B_i \subset B_i^* \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, hogy $\lambda(B_i^*) \leq \lambda(B_i) + \delta_i$. Hasonlóan létezik $C_i \subset C_i^* \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, hogy $\lambda(C_i^*) \leq \lambda(C_i) + \delta_i$. Így $N_i := B_i^* \times C_i^*$ jelöléssel $B_i \times C_i \subset N_i \subset \mathbb{R}^2$ és $\lambda^2(N_i) = \lambda(B_i^*) \lambda(C_i^*) \leq (\lambda(B_i) + \delta_i)(\lambda(C_i) + \delta_i) = \lambda(B_i) \lambda(C_i) + \delta_i^2 + \delta_i(\lambda(B_i) + \lambda(C_i)) = \lambda(B_i) \lambda(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. $\implies$

$$\lambda^2\left(\bigcup_{i \in I} N_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leq} \sum_{i \in I} \lambda^2(N_i) \leq \sum_{i \in I} \lambda(B_i) \lambda(C_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i}}_{\substack{\uparrow \\ \varepsilon}} \underset{(6.10)}{\leq} \lambda^2(B) + 2\varepsilon. \text{ Mivel } B \subset \bigcup_{i \in I} N_i$$

és $\bigcup_{i \in I} N_i$ nyílt, így azt kaptuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N \supset B$ nyílt halmaz, hogy $\lambda^2(N) \leq \lambda^2(B) + 2\varepsilon \implies \{\lambda^2(N) : B \subset N \subset \mathbb{R}^2, N \text{ nyílt}\}$ halmaznak $\lambda^2(B)$ -nél nem lehet nagyobb alsó korlátja. Másrészt viszont $\lambda^2(B)$ alsó korlát, hiszen $B \subset N \subset \mathbb{R}^2$ esetén $\lambda^2(B) \leq \lambda^2(N)$. Ebből kapjuk az állítást. $\square$

6.23. Tétel. $\mathcal{Z} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i : Z_i \subset \mathbb{R}^n \text{ zárt} \right\}$ és $\mathcal{N} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i : N_i \subset \mathbb{R}^n \text{ nyílt} \right\}$ jelöléssel $H \in \mathcal{L}^n$ pontosan akkor, ha $\exists Z \in \mathcal{Z}$ és $N \in \mathcal{N}$, hogy $Z \subset H \subset N$ és $\lambda^n(N \setminus Z) = 0$.

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\Leftarrow$ ” $N \setminus Z$ Borel-mérhető, így Lebesgue-mérhető is. Másrészt $H \setminus Z \subset N \setminus Z$, $\lambda^n(N \setminus Z) = 0$ és λ^n teljes $\implies H \setminus Z \in \mathcal{L}^n \implies Z \in \mathcal{L}^n$ miatt $H = (H \setminus Z) \cup Z \in \mathcal{L}^n$.

$\blacktriangleright$ „ $\Rightarrow$ ” Legyen $H_i := H \cap [-i, i]^n$ ($i \in \mathbb{N}$). $\implies H_i \in \mathcal{L}^n$ és véges mértékű, továbbá $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. A 6.22. tétel miatt létezik minden $k, i \in \mathbb{N}$ esetén $U_{k,i} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, hogy $H_i \subset U_{k,i}$ és

$$\lambda^n(U_{k,i}) \leq \lambda^n(H_i) + \frac{1}{k2^i}. \quad (6.11)$$

Legyen $U_k := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{k,i}$ ($k \in \mathbb{N}$). Ha $x \in U_k \setminus H = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{k,i} \right) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{H_j} \implies x \in U_{k,i_0}$ valamely i_0 -ra és $x \notin H_j \forall j \in \mathbb{N} \implies x \in U_{k,i_0} \setminus H_{i_0} \implies x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_{k,i} \setminus H_i) \implies U_k \setminus H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_{k,i} \setminus H_i)$, így a szubadditivitás és (6.11) miatt

$$\lambda^n(U_k \setminus H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(U_{k,i} \setminus H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^n(U_{k,i}) - \lambda^n(H_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k2^i} = \frac{1}{k}.$$

Legyen $N := \bigcap_{i=1}^{\infty} U_k$. Ekkor $N \in \mathcal{N}$, hiszen U_k nyílt. Ha $x \in H$, akkor $x \in H_{i_0}$ valamely i_0 -ra $\implies x \in U_{k,i_0}$ minden k -ra $\implies x \in U_k$ minden k -ra $\implies x \in N \implies H \subset N$. Másrészt $N \subset U_k$ minden k -ra $\implies \lambda^n(N \setminus H) \leq \lambda^n(U_k \setminus H) \leq \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N} \implies \lambda^n(N \setminus H) = 0$.

$\overline{H} \in \mathcal{L}^n$, így az előzőek alapján $\exists N^* \in \mathcal{N}$, hogy $\overline{H} \subset N^*$ és $\lambda^n(N^* \setminus \overline{H}) = 0$. Ekkor $Z := \overline{N^*} \in \mathcal{Z}$, $Z \subset H$ és $\lambda^n(H \setminus Z) = \lambda^n(H \setminus \overline{N^*}) = \lambda^n(H \cap N^*) = \lambda^n(N^* \setminus \overline{H}) = 0$. Így $\lambda^n(N \setminus Z) = \lambda^n((N \setminus H) \cup (H \setminus Z)) = \lambda^n(N \setminus H) + \lambda^n(H \setminus Z) = 0$. $\square$

6.24. Tétel. Minden $H \in \mathcal{L}^n$ esetén létezik $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ és $B \in \mathcal{L}^n$, hogy

$$H = A \cup B \quad \text{és} \quad \lambda^n(B) = 0.$$

Bizonyítás. A 6.23. tétel jelöléseivel $\exists Z \in \mathcal{Z}$ és $N \in \mathcal{N}$, hogy $Z \subset H \subset N$ és $\lambda^n(N \setminus Z) = 0$. Legyen $A := Z$ és $B := H \setminus Z$. Ekkor $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ és $H \setminus Z \subset N \setminus Z$ miatt $B \in \mathcal{L}^n$ és $\lambda^n(B) = 0$ (hiszen λ^n teljes mérték), továbbá $H = A \cup B$. $\square$

A következő tétel szerint a n dimenziós Lebesgue-mérték nem csak az egydimenziós Lebesgue-mérték n -szeres szorzataként értelmezhető, hanem a n dimenziós téglák térfogatához tartozó külső mértékeként is.

6.25. Tétel. *Legyen*

$$\mathcal{T} := \left\{ [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, (i = 1, \dots, n) \right\},$$

ahol $b_i = a_i$ esetén $[a_i, b_i] := \emptyset$. Ekkor

$$\lambda^n(B) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^n(T_i) : I \subset \mathbb{N}, T_i \in \mathcal{T} (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} T_i \right\}$$

minden $B \subset \mathbb{R}^n$ esetén. Másképpen fogalmazva, ha

$$\nu: \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty), \quad \nu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

akkor λ^n a ν -höz tartozó külső mérték.

Bizonyítás. Legyen $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\Sigma_1(B) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^n(T_i) : I \subset \mathbb{N}, T_i \in \mathcal{T} (i \in I), B \subset \bigcup_{i \in I} T_i \right\},$$

$$\Sigma_2(B) := \{ \lambda^n(N) : B \subset N \subset \mathbb{R}^n, N \text{ nyílt} \},$$

$$\Sigma_3(B) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda(A_{1i}) \cdots \lambda(A_{ni}) : I \subset \mathbb{N}, A_{1i}, \dots, A_{ni} \in \mathcal{L} (i \in I), \right.$$

$$\left. B \subset \bigcup_{i \in I} (A_{1i} \times \cdots \times A_{ni}) \right\}.$$

Legyen $N \subset \mathbb{R}^n$ nyílt. Ekkor léteznek N_i ($i \in \mathbb{N}$) nyílt téglák, hogy $N = \bigcup_{i \in I} N_i$.

Másrészt minden N_i esetén van olyan megszámlálhatóan végtelen sok $\mathcal{T}$ -beli halmaz, melyek uniója N_i . Így létezik $T_i \in \mathcal{T}$ ($i \in \mathbb{N}$), hogy $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. A $\mathcal{T}$ $n = 1$ esetén

triviálisan félgyűrű, így a 2.19. tétel miatt tetszőleges n pozitív egészre is az. Ebből a 2.18. tétel miatt létezik $D_i \in \mathcal{T}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, hogy $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$.

$$\implies \lambda^n(N) = \lambda^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i\right) = \lambda^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^n(D_i) \implies \Sigma_2(B) \subset \Sigma_1(B) \implies \inf \Sigma_1(B) \leq \inf \Sigma_2(B) \overset{\uparrow}{=} \lambda^n(B).$$

$$\overset{\text{6.22. tétel}}{\implies} \lambda^n(B) = \inf \Sigma_3(B) \implies \lambda^n(B) = \inf \Sigma_3(B) \leq \inf \Sigma_1(B) \implies \text{állítás.} \quad \square$$

A következő tétel szerint a Lebesgue-mérték a Lebesgue–Stieltjes-mérték speciális esete.

6.26. Tétel. $\lambda^n = \lambda_F$, ahol $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$.

Bizonyítás. A 41. oldalon láttuk, hogy ekkor

$$\Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

Így λ_F definíciója és a 6.25. tétel miatt kapjuk az állítást. $\square$

6.27. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := ax + b$ és $A \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\lambda^n(g(A)) = |a|^n \lambda^n(A), \quad (6.12)$$

továbbá, ha $A \in \mathcal{L}^n$, akkor $g(A) \in \mathcal{L}^n$.

Bizonyítás. $n = 1$ esetén lásd a 2.51. tételt. Általános esetben teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás, és vizsgáljuk $n = k + 1$ esetén.

$$\Sigma(A) := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^k(B_i) \lambda(C_i) : I \subset \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{L}^k, C_i \in \mathcal{L} (i \in I), A \subset \bigcup_{i \in I} B_i \times C_i \right\}.$$

Ha $\Sigma(A) \neq \emptyset$, akkor legyen $I \subset \mathbb{N}$, $B_i \in \mathcal{L}^k$, $C_i \in \mathcal{L} (i \in I)$, $A \subset \bigcup_{i \in I} B_i \times C_i \implies$

$$\begin{aligned} g(A) &\subset g\left(\bigcup_{i \in I} B_i \times C_i\right) = \bigcup_{i \in I} g(B_i \times C_i) = \bigcup_{i \in I} g_1(B_i) \times g_2(C_i), \text{ ahol } b = (b_1, \dots, b_{k+1}) \\ \text{esetén } g_1: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, g_1(t) = at + (b_1, \dots, b_k) \text{ és } g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(h) = ah + b_{k+1} \implies \\ \lambda^{k+1}(g(A)) &\leq \sum_{i \in I} \lambda^{k+1}(g_1(B_i) \times g_2(C_i)) = \sum_{i \in I} \lambda^k(g_1(B_i)) \lambda(g_2(C_i)) \stackrel{\text{ind. felt. + 2.51. tétel}}{=} \\ &\stackrel{\text{szubadd.}}{\uparrow} \sum_{i \in I} |a|^{k+1} \lambda^k(B_i) \lambda(C_i) \implies \frac{1}{|a|^{k+1}} \lambda^{k+1}(g(A)) \text{ alsó korlátja } \Sigma(A)\text{-nak, melyből követ-} \\ &\text{kezően } \frac{1}{|a|^{k+1}} \lambda^{k+1}(g(A)) \leq \inf \Sigma(A) = \lambda^{k+1}(A). \text{ Tehát} \end{aligned}$$

$$\lambda^{k+1}(g(A)) \leq |a|^{k+1} \lambda^{k+1}(A). \quad (6.13)$$

Ha $\Sigma(A) = \emptyset$, akkor $\lambda^{k+1}(A) = \infty$, így (6.13) ekkor is teljesül. A kapott eredményt alkalmazzuk A helyett $g(A)$ -ra és g helyett g^{-1} -re ($g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}b$). Ekkor $\lambda^{k+1}\left(\underbrace{g^{-1}(g(A))}_A\right) \leq \left|\frac{1}{a}\right|^{k+1} \lambda^{k+1}(g(A))$, melyből (6.13) miatt adódik, hogy

$$\lambda^{k+1}(g(A)) = |a|^{k+1} \lambda^{k+1}(A). \text{ Ezzel bizonyított (6.12).}$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } A \in \mathcal{L}^n \text{ és } T \subset \mathbb{R}^n, \text{ akkor (6.12) miatt } \left| \frac{1}{a} \right|^n \left(\lambda^n(T \cap g(A)) + \lambda^n(T \setminus g(A)) \right) &= \\ = \lambda^n(g^{-1}(T \cap g(A))) + \lambda^n(g^{-1}(T \setminus g(A))) &= \lambda^n(g^{-1}(T) \cap A) + \lambda^n(g^{-1}(T) \setminus A) \stackrel{\uparrow}{=} \\ &\stackrel{A \in \mathcal{L}^n}{=} \lambda^n(g^{-1}(T)) = \left| \frac{1}{a} \right|^n \lambda^n(T) \implies g(A) \in \mathcal{L}^n. \quad \square \end{aligned}$$

Ennek a tételnek következményeként, az n -dimenziós Lebesgue-mérhetőség és -mérték – hasonlóan az egydimenziós esethez – invariáns az eltolásra.

6.28. Tétel (Eltolás-invariancia). Legyen $r \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := x + r$ és $A \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\lambda^n(g(A)) = \lambda^n(A),$$

továbbá, ha $A \in \mathcal{L}^n$, akkor $g(A) \in \mathcal{L}^n$.

A Riemann-integrál nemnegatív függvény esetén a függvény alatti síkidom Jordan-mértékével egyezik meg. A következő két tétel ezt fogalmazza meg általánosabban.

6.29. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető függvény és $T_* := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$. Ekkor $T_* \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, továbbá

$$(\mu \otimes \lambda)(T_*) = \int f \, d\mu.$$

Bizonyítás. Az approximációs tétel szerint léteznek $s_n: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető egyszerű függvények, hogy $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$. Legyen s_n értékkészlete $\{y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{m_n}^{(n)}\}$ és $S_n := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < s_n(x)\}$.

Ha $(x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, akkor valamely n_0 -ra $(x, y) \in S_{n_0}$, azaz $x \in X$ és $0 \leq y < s_{n_0}(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \implies (x, y) \in T_*$.

Ha $(x, y) \in T_*$, akkor $x \in X$ és $0 \leq y < f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \implies \exists n_0$, hogy $0 \leq y < s_{n_0}(x) \implies (x, y) \in S_{n_0} \implies (x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Így kapjuk, hogy $T_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m_n} X(s_n = y_i^{(n)}) \times [0, y_i^{(n)}) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, hiszen $\uparrow$ 6.5. tétel

$X(s_n = y_i^{(n)}) \in \mathcal{A}$ és $[0, y_i^{(n)}) \in \mathcal{L}$.

Mivel $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$, így a mérték folytonossága miatt $(\mu \otimes \lambda)(T_*) = (\mu \otimes \lambda)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \lambda)(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} (\mu \otimes \lambda)\left(X(s_n = y_i^{(n)}) \times [0, y_i^{(n)})\right) = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{6.5. tétel}}} \sum_{i=1}^{m_n} \underbrace{\mu\left(X(s_n = y_i^{(n)})\right)}_{y_i^{(n)}} \underbrace{\lambda\left([0, y_i^{(n)})\right)}_{\text{mon. konv. tétel}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \, d\mu \underset{\uparrow}{=} \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\right) d\mu = \int f \, d\mu.$

Ezzel bizonyítottuk az állítást. $\square$

6.30. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -véges mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető korlátos függvény,

$$T^* := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\} \quad \text{és} \quad T := \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Ekkor $T^*, T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, továbbá

$$(\mu \otimes \lambda)(T^*) = \int f \, d\mu \quad \text{és} \quad (\mu \otimes \lambda)(T) = 0.$$

Bizonyítás. Az approximációs tétel szerint léteznek $h_n: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető egyszerű függvények, hogy $h_1 \leq h_2 \leq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \underbrace{\sup R_f}_{\in \mathbb{R}} - f$.

Legyen $g_n := \sup R_f - h_n$. Ekkor $g_n: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető egyszerű függvények, $g_1 \geq g_2 \geq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$. Legyen g_n értékkészlete $\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$ és $G_n := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq g_n(x)\}$.

Ha $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, akkor $(x, y) \in G_n \forall n \in \mathbb{N} \implies x \in X$ és $0 \leq y \leq g_n(x) \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x) \implies (x, y) \in T^*$.

Ha $(x, y) \in T^*$, akkor $x \in X$ és $0 \leq y \leq f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) \leq g_n(x) \forall n \in \mathbb{N} \implies (x, y) \in G_n \forall n \in \mathbb{N} \implies (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Így kapjuk, hogy $T^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} X(g_n = t_i^{(n)}) \times [0, t_i^{(n)}] \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, hiszen $\uparrow$ 6.5. tétel

$X(g_n = t_i^{(n)}) \in \mathcal{A}$ és $[0, t_i^{(n)}] \in \mathcal{L}$.

A σ -végesség miatt létezik $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$), hogy $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ és $\mu(A_i) < \infty$ $\forall i \in I$. Feltehetjük, hogy $I = \{1, \dots, n\}$ vagy $I = \mathbb{N}$. Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ ($i \in I$). Ekkor $B_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) diszjunkt rendszer, $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ és $B_i \subset A_i$ miatt $\mu(B_i) \leq \mu(A_i) < \infty \forall i \in I$. Legyen

$$G_n^{(i)} := (B_i \times \mathbb{R}) \cap G_n \quad \text{és} \quad T_i^* := (B_i \times \mathbb{R}) \cap T^*.$$

Ekkor $(\mu \otimes \lambda)(G_1^{(i)}) = (\mu \otimes \lambda) \left(\bigcup_{j=1}^{k_1} B_i(g_1 = t_j^{(1)}) \times [0, t_j^{(1)}] \right) =$
 $= \sum_{j=1}^{k_1} (\mu \otimes \lambda) (B_i(g_1 = t_j^{(1)}) \times [0, t_j^{(1)}]) = \sum_{j=1}^{k_1} \mu(B_i(g_1 = t_j^{(1)})) \lambda([0, t_j^{(1)}]) \leq$
 $\leq \sum_{j=1}^{k_1} \mu(B_i) t_j^{(1)} < \infty$. Másrészt $G_1^{(i)} \supset G_2^{(i)} \supset \dots$, így a mérték folytonossága miatt

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda)(T_i^*) &= (\mu \otimes \lambda) \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(i)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \lambda)(G_n^{(i)}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mu(B_i(g_n = t_j^{(n)})) \lambda([0, t_j^{(n)}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mu(X(\chi_{B_i} g_n = t_j^{(n)})) t_j^{(n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{B_i} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{B_i} (\sup R_f - h_n) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup R_f \int \chi_{B_i} d\mu - \int \chi_{B_i} h_n d\mu) = \sup R_f \mu(B_i) - \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{B_i} h_n d\mu \quad \uparrow \\ &= \sup R_f \mu(B_i) - \int \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{B_i} h_n d\mu = \sup R_f \mu(B_i) - \int \chi_{B_i} (\sup R_f - f) d\mu \quad \text{mon. konv. tétel} \\ &= \sup R_f \mu(B_i) - \int \chi_{B_i} \sup R_f d\mu + \int \chi_{B_i} f d\mu = \int_{B_i} f d\mu \implies \end{aligned}$$

$$(\mu \otimes \lambda)(T^*) = (\mu \otimes \lambda) \left(\bigcup_{i \in I} T_i^* \right) = \sum_{i \in I} (\mu \otimes \lambda)(T_i^*) = \sum_{i \in I} \int_{B_i} f d\mu = \int f d\mu.$$

Még azt kell belátni, hogy $T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ és $(\mu \otimes \lambda)(T) = 0$. A 6.29. tétel jelölésével $T = T^* \setminus T_* \implies T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ és $T_* \subset T^*$ miatt $(\mu \otimes \lambda)(T) = (\mu \otimes \lambda)(T^*) - (\mu \otimes \lambda)(T_*) = 0$. $\square$

Ha f nemnegatív Lebesgue-mérhető függvény, akkor az f görbéje alatti síkidom területe az f Lebesgue-integráljával egyezik meg. Ezt fejezi ki a következő tétel.

6.31. Tétel. *Ha $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ λ -mérhető, akkor $T_* := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$ jelöléssel $T_* \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(T_*) = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$. Ha az f még korlátos is, akkor $T^* := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$ jelöléssel $T^* \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(T^*) = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.*

Bizonyítás. A 6.29. és a 6.30. tételeket kell alkalmazni a Lebesgue-mértéktér $[a, b]$ intervallumra vett alterére. $\square$

6.32. Tétel. *Minden $K \subset \mathbb{R}^2$ körlap Jordan- és Lebesgue-mérhető, továbbá ha r a K körlap sugara, akkor $\lambda^2(K) = r^2\pi$.*

Bizonyítás. Legyen

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} + r\},$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, 0 \leq y < -\sqrt{r^2 - x^2} + r\}.$$

Ekkor $K := A \setminus B$ a $(0, r)$ középpontú r sugarú kör. Így az előzőek értelmében $K \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(K) = \int_{[-r,r]} (\sqrt{r^2 - x^2} + r) \, d\lambda - \int_{[-r,r]} (-\sqrt{r^2 - x^2} + r) \, d\lambda = 2 \int_{[-r,r]} \sqrt{r^2 - x^2} \, d\lambda = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = (x = r \sin t \text{ helyettesítéssel}) = r^2\pi$. A K Jordan-mérhetősége az 5.32. tételből következik. Ebből tetszőleges körre az eltolás-invariancia miatt igaz a tétel. $\square$

6.33. Tétel. *Legyen $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ λ -mérhető korlátos függvény, és*

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, -f(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Ekkor $T \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(T) = 2 \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.

Bizonyítás. Legyen $k := \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$,

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) + k\},$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y < -f(x) + k\}.$$

Ekkor $\lambda^2(A \setminus B) = \int_{[a,b]} (f + k) \, d\lambda - \int_{[a,b]} (-f + k) \, d\lambda = 2 \int_{[a,b]} f \, d\lambda$. Mivel $A \setminus B$ a T eltoltja, ezért kapjuk az állítást. $\square$

Az eddigiekben a felszín kivételével minden geometriai mértékről szó esett már. Az ívhosszat annak alapján definiáltuk a $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,1}$ ill. $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3,1}$ Hausdorff-mértékkel, hogy $\lambda = \mathcal{H}_{\mathbb{R},1}$. Így a felszín definíciójához meg kell keresni a kapcsolatot a λ^2 és $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}$ között. A továbbiakban ezzel foglalkozunk.

6.34. Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, $\lambda^2(H) > 0$ és $0 < \alpha < 1$. Ekkor léteznek $N_1, \dots, N_n \subset H$ diszjunkt négyzetlapok, hogy $\alpha \lambda^2(H) \leq \sum_{i=1}^n \lambda^2(N_i)$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha < \beta < 1$. Ekkor léteznek $T_1, \dots, T_k \subset H$ diszjunkt téglalapok, hogy $\beta \lambda^2(H) \leq \sum_{i=1}^k \lambda^2(T_i)$. Másrészt léteznek $N_{i1}, \dots, N_{it_i} \subset T_i$ diszjunkt négyzetlapok, hogy $\frac{\alpha}{\beta} \lambda^2(T_i) \leq \sum_{j=1}^{t_i} \lambda^2(N_{ij}) \implies \beta \lambda^2(H) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{t_i} \frac{\beta}{\alpha} \lambda^2(N_{ij}) \implies \alpha \lambda^2(H) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{t_i} \lambda^2(N_{ij}) \implies$ állítás. $\square$

6.35. Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, $\lambda^2(H) > 0$ és $0 < \eta < 1$. Ekkor léteznek $N_1, \dots, N_n \subset H$ diszjunkt négyzetlapok, hogy $\lambda^2\left(H \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i\right) \leq \eta \lambda^2(H)$.

Bizonyítás. A 6.34. lemma szerint léteznek $N_1, \dots, N_n \subset H$ diszjunkt négyzetlapok, hogy $(1 - \eta) \lambda^2(H) \leq \sum_{i=1}^n \lambda^2(N_i) \implies \eta \lambda^2(H) \geq \lambda^2(H) - \sum_{i=1}^n \lambda^2(N_i) = \lambda^2\left(H \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i\right) \implies$ állítás. $\square$

A következő tétel szerint minden téglalap „kimeríthető” diszjunkt körlapokkal.

6.36. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges téglalap. Ekkor léteznek $K_i \subset T$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt körlapok, hogy $\lambda^2\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0$.

Bizonyítás. ① ► Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető, $\lambda^2(H) > 0$ és $\eta := \frac{\lambda^2(K)}{2\lambda^2(N)}$, ahol N egy négyzetlap és K az N -be írt körlap. (Nyilván $\eta = \frac{\pi}{8}$.) Ekkor a 6.35. lemma szerint léteznek $N_1, \dots, N_n \subset H$ diszjunkt négyzetlapok, hogy $\lambda^2\left(H \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i\right) \leq \eta \lambda^2(H)$.

Legyen K_i az N_i -be írt körlap. Ekkor $\lambda^2\left(H \setminus \bigcup_{i=1}^n K_i\right) = \lambda^2\left(H \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i\right) + \sum_{i=1}^n \lambda^2(N_i \setminus K_i) \leq \eta \lambda^2(H) + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda^2(K_i)}{\lambda^2(N_i)}\right) \lambda^2(N_i) = \eta \lambda^2(H) + (1 - 2\eta) \sum_{i=1}^n \lambda^2(N_i) \leq \eta \lambda^2(H) + (1 - 2\eta) \lambda^2(H) = (1 - \eta) \lambda^2(H)$.

② ► A T Jordan-mérhető, így a bizonyítás ① pontja szerint léteznek $K_1, \dots, K_{j_1} \subset T$ diszjunkt körlapok, hogy $H_1 := T \setminus \bigcup_{i=1}^{j_1} K_i$ jelöléssel $\lambda^2(H_1) \leq (1 - \eta) \lambda^2(T)$. Mivel a körlapok Jordan-mérhetőek, ezért H_1 is az, vagyis erre is alkalmazható ①.

$\implies$ Léteznek $K_{j_1+1}, \dots, K_{j_2} \subset H_1$ diszjunkt körlapok, hogy $H_2 := H_1 \setminus \bigcup_{i=j_1+1}^{j_2} K_i$ jelöléssel $\lambda^2(H_2) \leq (1 - \eta) \lambda^2(H_1) \leq (1 - \eta)^2 \lambda^2(T)$. Ezt az eljárást folytatva kapunk egy $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ és K_i ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt körlapsorozatot. Alkalmazva a mérték folytonosságát, kapjuk, hogy $\lambda^2\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^2(H_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \eta)^n \lambda^2(T) = 0 \implies \lambda^2\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k\right) = 0$. Másrészt teljes indukcióval könnyű megmutatni, hogy

$H_k = T \cap \bigcap_{i=1}^{j_k} \overline{K_i}$, melyből kapjuk, hogy $\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Ezzel bizonyítottuk a tételt. $\square$

A felszín definíciójához szükség lesz még annak ismeretére is, hogy az azonos átmérőjű halmazok között a kör lapnak legnagyobb a területe. Azt hihetnénk, hogy ez egyszerű, mert egy d átmérőjű halmaz mindig „belefér” egy d átmérőjű zárt kör lapba. De ez nem igaz, például egy d oldalú szabályos háromszög lap minden d átmérőjű kör lapból „kilóg”. Ahhoz, hogy beleférjen egy ilyen kör lapba, először szimmetrizálni kell az adott halmazt.

6.37. Definíció. Legyen $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$, $H \subset \mathbb{R}^2$ és

$$T_s := \{t \in \mathbb{R} : s + tv \in H\} \quad (s \in \mathbb{R}^2).$$

Jelölje E_v az origón átmenő v -re merőleges egyenest. Ekkor a H halmaz v irányú *Steiner-szimmetrizáltján* az

$$S_v(H) := \left\{ s + tv : s \in E_v, T_s \neq \emptyset, |t| \leq \frac{1}{2}\lambda(T_s) \right\}$$

halmazt értjük.

6.38. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazt tartalmazó konvex halmazok metszetét a H *konvex burkának* nevezzük. A H konvex burkának lezártját $\overline{\text{co}}(H)$ módon jelöljük.

6.39. Lemma. Minden $H \subset \mathbb{R}^2$ esetén $\text{diam } \overline{\text{co}}(H) = \text{diam } H$.

Bizonyítás. $\overline{\text{co}}(H) \supset H \implies \text{diam } \overline{\text{co}}(H) \geq \text{diam } H$. Így azt kell belátni, hogy $\text{diam } \overline{\text{co}}(H) \leq \text{diam } H$. Ha H nem korlátos vagy üres halmaz, akkor az állítás triviális. Most legyen H korlátos, nem üres és $x, y \in \overline{\text{co}}(H)$.

E_t ($t \in \mathbb{R}$) jelölje a $t(x - y)$ ponton átmenő, $x - y$ vektorra merőleges egyenest. Legyen $A := \{t \in \mathbb{R} : E_t \cap H \neq \emptyset\}$, $t_1 := \inf A$ és $t_2 := \sup A$. Az E_{t_1} és E_{t_2} egyenesek a H halmaz $x - y$ vektorra merőleges ún. támaszegyenesei. Legyen K ezen támaszegyenések által határolt zárt sáv és d ennek a sávnak a szélessége.

K konvex, zárt és tartalmazza H -t $\implies \overline{\text{co}}(H) \subset K \implies x, y \in K \implies x - y \perp E_{t_1}$ miatt $|x - y| \leq d$.

Most legyen p és q két torlódási pontja H -nak. Ekkor léteznek $p_n, q_n \in H$ pontsorozatok, hogy $p_n \rightarrow p$ és $q_n \rightarrow q$. Így $|p_n - q_n| \leq \text{diam } H$ miatt $|p - q| \leq \text{diam } H$. $\implies H$ lezártjának átmérője $\text{diam } H$.

A H lezártjának az E_{t_1} és E_{t_2} támaszegyenésekkel vannak közös pontjaik, így $d \leq \text{diam}(H \text{ lezártja}) = \text{diam } H \implies |x - y| \leq \text{diam } H \implies$ állítás. $\square$

6.40. Tétel (*Izodiametrális egyenlőtlenség*). Bármely korlátos $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz esetén $\lambda^2(H)$ nem nagyobb, mint a $\text{diam } H$ átmérőjű kör lap Lebesgue-mértéke, azaz

$$\lambda^2(H) \leq \frac{\pi}{4}(\text{diam } H)^2.$$

Bizonyítás. Ha $H = \emptyset$, akkor az állítás triviális. Most legyen $H \neq \emptyset$, $A := \overline{\text{co}}(H)$, $v_1 := (1, 0)$, $v_2 := (0, 1)$ és $B := S_{v_2}(S_{v_1}(A))$. Ekkor B szimmetrikus az origóra, azaz $p \in B$ esetén $-p \in B \implies |p - (-p)| = |2p| \leq \text{diam } B \implies$

$$|p| \leq \frac{1}{2} \text{diam } B \quad \forall p \in B. \quad (6.14)$$

Legyen $y_i := s_i + t_i v_1 \in S_{v_1}(A)$, $I_i := A \cap \{s_i + t v_1 : t \in \mathbb{R}\}$ ($i = 1, 2$) $\implies T := \overline{\text{co}}(I_1 \cup I_2)$ olyan trapéz, mely A -ban van $\implies \text{diam } T \leq \text{diam } A = \text{diam } H$. Másrészt az y_1, y_2 pontok az $S_{v_1}(T)$ szimmetrikus trapéz alapjain vannak $\implies |y_1 - y_2| \leq \text{diam } S_{v_1}(T) \leq \text{diam } T \implies |y_1 - y_2| \leq \text{diam } H \implies \text{diam } S_{v_1}(A) \leq \text{diam } H$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\text{diam } B = \text{diam } S_{v_2}(S_{v_1}(A)) \leq \text{diam } H \implies (6.14)$ miatt $|p| \leq \frac{1}{2} \text{diam } H \ \forall p \in B \implies B$ részhalmaza az origó középpontú $\text{diam } H$ átmérőjű zárt kör lapnak $\implies$

$$\lambda^2(B) \leq \frac{\pi}{4} (\text{diam } H)^2. \quad (6.15)$$

Az A korlátos, zárt, konvex $\implies$ Létezik $[a, b] \subset \mathbb{R}$, hogy

$$S_{v_1}(A) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], |y| \leq \frac{1}{2} \lambda(T_{(x,0)}) \right\}.$$

Az A zárt $\implies A \in \mathcal{L}^2 \implies \chi_A$ λ^2 -mérhető $\implies$ Létezik $\int \chi_A d\lambda^2 \implies$ Fubini-tétel miatt az

$$x \mapsto \int \chi_A(x, y) d\lambda(y) = \lambda(T_{(x,0)}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény λ -szerinti integrálja létezik és az megegyezik $\int \chi_A d\lambda^2$ -el. $\implies$ 6.33. tétel miatt $S_{v_1}(A) \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(S_{v_1}(A)) = 2 \int_{[a,b]} \frac{1}{2} \lambda(T_{(x,0)}) d\lambda(x) = \int \lambda(T_{(x,0)}) d\lambda(x) = \iint \chi_A(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x) = \int \chi_A d\lambda^2 = \lambda^2(A)$.

Hasonlóan bizonyítható, hogy $\lambda^2(S_{v_2}(S_{v_1}(A))) = \lambda^2(S_{v_1}(A)) \implies \lambda^2(B) = \lambda^2(A) \implies \lambda^2(H) \leq \lambda^2(A) = \lambda^2(B) \leq \frac{\pi}{4} (\text{diam } H)^2$. $\square$

$\uparrow$
 $H \subset A$

$\uparrow$
 (6.15)

Az előzőek alapján már meg tudjuk határozni a λ^2 és $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}$ kapcsolatát.

6.41. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}$ a kétdimenziós Hausdorff-mérték az $(\mathbb{R}^2, d)$ metrikus téren, ahol d a szokásos metrikát jelenti. Ekkor $\lambda^2 = \frac{\pi}{4} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}$.*

Bizonyítás. A Hausdorff-mérték definíciójában használt jelöléseket fogjuk használni.

① ► Ha $B \subset \mathbb{R}^2$, az izodiametrális egyenlőtlenség és λ^2 szubadditivitása miatt

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon,2}(B) &= \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam } A_i)^2 : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon (i \in \mathbb{N}) B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} \geq \\ &\geq \frac{4}{\pi} \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^2(A_i) : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon (i \in \mathbb{N}) B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} \geq \\ &\geq \frac{4}{\pi} \left\{ \lambda^2(B) : I \subset \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{D}_\varepsilon (i \in \mathbb{N}) B \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\} = \frac{4}{\pi} \lambda^2(B) \implies \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(B) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\varepsilon,2}(B) \geq \frac{4}{\pi} \lambda^2(B) \implies \lambda^2(B) \leq \frac{\pi}{4} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(B).$$

② ► Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ téglalap és $\varepsilon > 0$. Bontsuk fel T -t ε -nál kisebb átmérőjű téglalapokra, majd ezek mindegyikére alkalmazzuk a 6.36. tételt. Így léteznek ε -nál kisebb átmérőjű diszjunkt $K_i \subset T$ körlapok ($i \in \mathbb{N}$), hogy $\lambda^2\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0 \implies$

A 6.25. tétel miatt $T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ lefedhető bármilyen kicsi összterfogatú téglalapokkal.

Viszont egy téglalap előáll legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok négyzetlap uniójaként. Így $T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ lefedhető bármilyen kicsi ösztérfogatú N_i ($i \in I \subset \mathbb{N}$) négyzetlapokkal, másrészt $(\text{diam } N_i)^2 = 2\lambda^2(N_i)$. Így $\mu_{\varepsilon,2}\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0 \implies$

$$\mu_{\varepsilon,2}(T) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\varepsilon,2}(K_i) + \mu_{\varepsilon,2}\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\varepsilon,2}(K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } K_i)^2 =$$

szubadd. 2.7. tétel

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2(K_i) \leq \frac{4}{\pi} \lambda^2(T) \implies \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(T) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\varepsilon,2}(T) \leq \frac{4}{\pi} \lambda^2(T) \implies \text{Ha } B \subset \mathbb{R}^2 \text{ és}$$

T_i ($i \in I \subset \mathbb{N}$) B -t lefedő téglalapok, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^2(T_i) \geq \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(T_i) \geq \frac{\pi}{4} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(B)$

$\implies$ A 6.25. tétel miatt $\lambda^2(B) \geq \frac{\pi}{4} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^2,2}(B) \implies \textcircled{1}$ miatt kapjuk az állítást. $\square$

6.42. Megjegyzés. Az előző tétel tetszőleges n -dimenzióra is kiterjeszthető. Eszerint $\lambda^n = 2^{-n} \lambda^n(G_n) \mathcal{H}_{\mathbb{R}^n,n}$, ahol G_n az n -dimenziós egységsugarú gömb. Ebből következően, ha $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olyan függvény, hogy valamely $L \in \mathbb{R}_+$ esetén $|g(x) - g(y)| = L|x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\lambda^n(g(A)) = L^n \lambda^n(A)$, továbbá, ha $A \in \mathcal{L}^n$, akkor $g(A) \in \mathcal{L}^n$ (lásd a 2.73. tételt). Ebből az is következik, hogy λ^n nem csak az eltolásra, hanem általánosabban, az egybevágóságra is invariáns.

Az előző tétel alapján a következőképpen definiálhatjuk egy felület felszínét.

6.43. Definíció. Legyen $B \subset \mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3,2}$ -mérhető felület. Ekkor a $\frac{\pi}{4} \mathcal{H}_{\mathbb{R}^3,2}(B)$ értéket a B *felszínének* nevezzük.

Ez a definíció geometriailag úgy értelmezhető, hogy az adott felületet lefedjük minden lehetséges módon ε -nál kisebb átmérőjű gömbökkel, vesszük a gömbökhöz tartozó főkörök összterületének infimumát, majd az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet.

7. fejezet

Mértékek deriváltja

Az 5.5. és 5.22. tételekből következik az alábbi állítás:

7.1. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető függvény és $\nu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(A) := \int_A f d\mu$. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér.*

Kérdés, hogy ennek milyen feltétellel igaz a megfordítása, azaz egy mérték mikor állítható elő egy nemnegatív mérhető függvény integráljaként? Pontosabban fogalmazva, ha μ és ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, akkor milyen feltétellel létezik olyan $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -mérhető függvény, hogy $\nu(A) := \int_A f d\mu$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$ esetén?

Ennek egy szükséges feltételét adja az 5.5. tétel, miszerint ha $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$. A Radon–Nikodym-tétel kimondja, hogy σ -véges mértékek esetén ez elégséges feltétel is. Ennek a tételnek a bizonyításához szükségünk lesz a negatív ill. pozitív halmaz fogalmára és azok tulajdonságaira.

7.2. Definíció. Legyenek μ és ν véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és legyen $\gamma := \mu - \nu$. Az $A \in \mathcal{A}$ *pozitív* (ill. *negatív*) *halmaz* γ -ra vonatkozóan, ha

$$\gamma(A \cap F) \geq 0 \quad (\text{ill. } \gamma(A \cap F) \leq 0) \quad \forall F \in \mathcal{A}.$$

7.3. Tétel. *Legyenek μ és ν véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) negatív halmazok $(\mu - \nu)$ -re nézve, akkor $\bigcup_{i \in I} A_i$ negatív $(\mu - \nu)$ -re nézve.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma := \mu - \nu$.

① ► Legyen $A, B \in \mathcal{A}$, A negatív halmaz γ -ra nézve, $F \in \mathcal{A}$ és $F' := \overline{B} \cap F$. Mivel $F' \in \mathcal{A}$ és A negatív γ -ra nézve, így $\gamma((A \setminus B) \cap F) = \gamma(A \cap F') \leq 0 \implies A \setminus B$ negatív γ -ra nézve.

② ► Legyen $B_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) γ -ra nézve negatív halmazokból álló diszjunkt rendszer, és $F \in \mathcal{A} \implies \gamma\left(\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] \cap F\right) = \gamma\left(\bigcup_{i \in I} (B_i \cap F)\right) = \sum_{i \in I} \gamma(B_i \cap F) \leq 0 \implies \bigcup_{i \in I} B_i$ negatív γ -ra nézve.

③ ► Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, ami negatív halmaz. Ha $I \neq \emptyset$, akkor átindexelés miatt I választható $\mathbb{N}$ -nek vagy $\{1, \dots, n\}$ -nek valamely $n \in \mathbb{N}$ -re. Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ ($i \in I$). Ekkor B_i ① miatt negatív γ -ra nézve $\implies$ ② miatt $\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i$ negatív γ -ra nézve. $\square$

7.4. Tétel. *Legyenek μ és ν véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ekkor létezik $A \in \mathcal{A}$, hogy A pozitív ill. $\bar{A}$ negatív halmaz $(\mu - \nu)$ -re nézve. Az $X = A \cup \bar{A}$ az X ún. **Hahn-féle felbontása** $(\mu - \nu)$ -re nézve.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma = \mu - \nu$ és $H := \{\gamma(B) : B \in \mathcal{A} \text{ negatív } \gamma\text{-ra nézve}\}$. Ekkor $\gamma(\emptyset) \in H$ miatt $H \neq \emptyset$, és μ ill. ν végeessége miatt H alulról korlátos, pl. $-\nu(X)$ alsó korlát $\implies \beta := \inf H \in \mathbb{R} \implies \exists B_i \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) negatív halmazok γ -ra nézve, hogy $\gamma(B_i) \leq \beta + \frac{1}{i} \forall i \in \mathbb{N}$. Legyen $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i \implies \bar{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, amely a 7.3. tétel miatt negatív halmaz γ -ra nézve.

► $\bar{A}$ negatív halmaz γ -ra nézve $\implies \gamma(\bar{A}) \geq \beta$. Tegyük fel, hogy $\gamma(\bar{A}) > \beta \implies \exists i_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\gamma(\bar{A}) > \beta + \frac{1}{i_0} \geq \gamma(B_{i_0}) \implies 0 < \gamma(\bar{A}) - \gamma(B_{i_0}) \underset{\uparrow}{=} \gamma(\bar{A} \setminus B_{i_0}) =$
 $= \gamma(\bar{A} \cap \underbrace{\bar{B}_{i_0}}_{\in \mathcal{A}}) \implies \bar{A} \text{ nem negatív } \gamma\text{-ra nézve, ami ellentmondás} \implies \gamma(\bar{A}) = \beta.$
1.22. tétel ③

► Most legyen $C \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\bar{A} \cap C = \emptyset$ és $\gamma(C) < 0$. Tegyük fel, hogy C negatív γ -ra nézve. Ekkor a 7.3. tétel miatt $\bar{A} \cup C$ negatív γ -ra nézve. Másrészt $\gamma(\bar{A} \cup C) \underset{\uparrow}{=} \gamma(\bar{A}) + \underbrace{\gamma(C)}_{< 0} < \gamma(\bar{A}) = \beta$, ami β definíciója miatt nem lehet. Ezzel bizonyítottuk a következőt:

$$\text{Ha } C \in \mathcal{A}, \bar{A} \cap C = \emptyset \text{ és } \gamma(C) < 0 \implies C \text{ nem negatív } \gamma\text{-ra nézve.} \quad (7.1)$$

► Rátérünk annak bizonyítására, hogy A pozitív γ -ra nézve. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, vagyis $\exists K_0 \in \mathcal{A}$, hogy $E_0 := A \cap K_0$ jelöléssel $\gamma(E_0) < 0$. Ekkor (7.1) miatt E_0 nem negatív γ -ra nézve $\implies \exists K \in \mathcal{A}$, hogy $\gamma(\underbrace{E_0 \cap K}_{\subset E_0}) > 0 \implies$ létezik

$$k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} : \exists E \subset E_0, \text{ hogy } E \in \mathcal{A} \text{ és } \gamma(E) \geq \frac{1}{k}\}.$$

Így $\exists E_1 \subset E_0$, hogy $E_1 \in \mathcal{A}$ és $\gamma(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$. Az E_1 valódi részhalmaza E_0 -nak, hiszen $\gamma(E_1) \neq \gamma(E_0)$ miatt $E_1 \neq E_0$, és $\gamma(E_1) \neq 0$ miatt $E_1 \neq \emptyset$. Az 1.22. tétel ③ pontja miatt $\gamma(E_0 \setminus E_1) = \gamma(E_0) - \gamma(E_1) \leq \gamma(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0$. Így $E_0 \setminus E_1$ -gyel csinálhatjuk pontosan ugyanazt, amit az előbb E_0 -val. Ekkor kapjuk E_2 -t és k_2 -t. Ezután $(E_0 \setminus E_1) \setminus E_2$ -vel csináljuk ugyanezt. Ekkor kapjuk E_3 -t és k_3 -t. Folytatva az eljárást, kapjuk az E_i ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt halmazokat ill. k_i ($i \in \mathbb{N}$) számokat.

Tegyük fel, hogy $\frac{1}{k_i}$ nem nullsorozat $\implies \gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i) \underset{\gamma \text{ add.}}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} = \infty,$

ami μ és ν végeessége miatt nem lehet $\implies \frac{1}{k_i}$ nullsorozat $\implies \lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty.$

Legyen $F_0 := E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ és $F \in \mathcal{A}$. Tegyük fel, hogy $\gamma(F_0 \cap F) > 0 \implies \exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\gamma(F_0 \cap F) \geq \frac{1}{k_{n_1}}$ és $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $k_{n_1} < k_{n_2}$. De $F_0 \cap F \subset F_0 \subset E_0 \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{n_2-1})$, ami k_{n_2} definíciója miatt nem lehet $\implies \gamma(F_0 \cap F) \leq 0 \implies F_0$ negatív γ -ra nézve $\implies 0 \leq \gamma(F_0 \cap X) = \gamma(F_0) = \gamma\left(E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \stackrel{\uparrow}{=} \gamma(E_0) -$
 $-\gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \stackrel{\uparrow}{=} \underbrace{\gamma(E_0)}_{<0} - \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\gamma(E_i)}_{>0} < 0$, ami ellentmondás. Így A pozitív halmaz γ -ra nézve. $\square$

7.5. Definíció. Legyenek μ ill. ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ esetén $\nu(A) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ -re nézve. Jele: $\nu \ll \mu$.

7.6. Tétel. Legyenek μ és ν véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, $\nu \ll \mu$ és $\nu \not\equiv 0$. Ekkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és $A \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(A) > 0$ és A pozitív halmaz $(\nu - \varepsilon\mu)$ -re nézve.

Bizonyítás. Legyen $\gamma_n := \nu - \frac{1}{n}\mu$, $X = A_n \cup \overline{A_n}$ az X Hahn-féle felbontása γ_n -re nézve, ahol A_n pozitív γ_n -re nézve ($n \in \mathbb{N}$), továbbá $A_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ekkor $A_n \subset A_0 \implies \overline{A_0} \subset \overline{A_n} \implies \exists F_n \in \mathcal{A}$, hogy $\overline{A_0} = \overline{A_n} \cap F_n \implies$ mivel $\overline{A_n}$ negatív γ_n -re nézve, így $\gamma_n(\overline{A_n} \cap F_n) \leq 0 \implies \gamma_n(\overline{A_0}) \leq 0 \implies \nu(\overline{A_0}) - \frac{1}{n}\mu(\overline{A_0}) \leq 0 \implies 0 \leq \nu(\overline{A_0}) \leq \frac{1}{n}\mu(\overline{A_0}) \forall n \in \mathbb{N} \implies \nu(\overline{A_0}) = 0 \implies \nu \not\equiv 0$ miatt $0 < \nu(X) = \nu(A_0 \cup \overline{A_0}) = \nu(A_0) + \nu(\overline{A_0}) = \nu(A_0) \implies \nu \ll \mu$ miatt $\mu(A_0) > 0 \implies 0 < \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\uparrow}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
 $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(A_{n_0}) > 0$. Ekkor $A := A_{n_0}$ és $\varepsilon := \frac{1}{n_0}$ választással teljesül a tétel. $\square$

7.7. Tétel (Radon–Nikodym-tétel). Legyenek μ és ν σ -véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\nu \ll \mu$, akkor létezik $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető függvény, melyre

$$\nu(A) = \int_A \varphi d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

A φ μ -m.m. egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ is hasonló tulajdonságú, akkor $\varphi = \tilde{\varphi}$ μ -m.m. $A \frac{d\nu}{d\mu} := \varphi$ függvényt ν -nek μ -re vonatkozó *Radon–Nikodym-deriváltjának* nevezzük.

Bizonyítás. ① ► Először feltesszük, hogy μ és ν véges mértékek. Legyen

$$\mathcal{K} := \left\{ f: X \rightarrow [0, \infty] : \int_E f d\mu \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \right\}.$$

$\mathcal{K} \neq \emptyset$, mert pl. $f \equiv 0$ esetén $f \in \mathcal{K}$. Legyen $\alpha := \sup\{\int f d\mu : f \in \mathcal{K}\}$. Ekkor $\exists f_n \in \mathcal{K}$ ($n \in \mathbb{N}$), hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \alpha$. Legyen $g_n := \max\{f_1, \dots, f_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). $E \in \mathcal{A}$ esetén legyen

$$E_j^{(n)} := E(g_n = f_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ekkor $E = E_1^{(n)} \cup \dots \cup E_n^{(n)}$ diszjunkt felbontás és $x \in E_j^{(n)}$ esetén $g_n(x) = f_j(x)$
 $\implies \int_E g_n d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} g_n d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} f_j d\mu \leq \sum_{j=1}^n \nu(E_j^{(n)}) = \nu(E) \implies$ a monoton
konvergencia tétel miatt $\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \nu(E) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in \mathcal{K} \implies$
 $\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \leq \nu(X) < \infty \implies$ 5.6. tétel ④ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n < \infty$ μ -m.m.
 $\implies G := X(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty) \in \mathcal{A}$ és $\mu(G) = 0$. Legyen

$$\varphi := \chi_{\overline{G}} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Ekkor φ μ -mérhető, $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ μ -m.m., $R_\varphi \subset [0, \infty)$, $\varphi \in \mathcal{K}$ és $\alpha \geq \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \alpha \implies \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \alpha \implies \int \varphi d\mu = \alpha$. Legyen

$$\nu_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad \nu_0(B) := \nu(B) - \int_B \varphi d\mu.$$

Ekkor $\varphi \in \mathcal{K}$ és a 7.1. tétel miatt ν_0 véges mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) = 0$, akkor $\int_B \varphi d\mu = 0$, és $\nu \ll \mu$ miatt $\nu(B) = 0 \implies \nu_0(B) = 0$
 $\implies \nu_0 \ll \mu$. Tegyük fel, hogy $\nu_0 \not\equiv 0 \implies$ 7.6. tétel miatt $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és $\exists A \in \mathcal{A}$, hogy
 $\mu(A) > 0$ és A pozitív halmaz $(\nu_0 - \varepsilon\mu)$ -re nézve $\implies (\nu_0 - \varepsilon\mu)(A \cap E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$
 $\implies \varepsilon\mu(A \cap E) \leq \nu_0(A \cap E) = \nu(A \cap E) - \int_{A \cap E} \varphi d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies g := \varphi + \varepsilon\chi_A$
jelöléssel $\int_E g d\mu = \int_E \varphi d\mu + \varepsilon \int_E \chi_A d\mu = \int_E \varphi d\mu + \varepsilon\mu(A \cap E) \leq \int_E \varphi d\mu + \nu(A \cap E) -$
 $- \int_{A \cap E} \varphi d\mu = \int_{E \setminus A} \varphi d\mu + \nu(A \cap E) \leq \nu(E \setminus A) + \nu(A \cap E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies$
 $\uparrow$
 $\varphi \in \mathcal{K}$

$g \in \mathcal{K} \implies \int g d\mu \leq \alpha$. Másrészt $\int g d\mu = \int \varphi d\mu + \varepsilon \int \chi_A d\mu = \alpha + \varepsilon\mu(A) > \alpha$. Ez ellentmondás, így $\nu_0 \equiv 0 \implies \varphi$ megfelel a tétel állításának.

Tegyük fel, hogy a $\tilde{\varphi}$ is teljesíti a tétel állítását. Ekkor $G := X(\varphi > \tilde{\varphi})$ jelöléssel
 $0 \leq \int_G \varphi d\mu = \int_G \tilde{\varphi} d\mu = \nu(G) < \infty \implies 0 = \int_G \varphi d\mu - \int_G \tilde{\varphi} d\mu = \int_G (\varphi - \tilde{\varphi}) d\mu =$
 $= \int \underbrace{(\varphi - \tilde{\varphi})\chi_G}_{\geq 0} d\mu \implies (\varphi - \tilde{\varphi})\chi_G = 0 \quad \mu$ -m.m. $\implies H := X((\varphi - \tilde{\varphi})\chi_G \neq 0)$ jelöléssel

$\mu(H) = 0$. Másrészt $x \in H \iff (\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x))\chi_G(x) \neq 0 \iff \chi_G(x) = 1 \iff$
 $x \in G$. Vagyis $H = G \implies \mu(X(\varphi > \tilde{\varphi})) = 0$. Hasonlóan $\mu(X(\varphi < \tilde{\varphi})) = 0 \implies$
 $\mu(X(\varphi \neq \tilde{\varphi})) = 0$, azaz $\varphi = \tilde{\varphi}$ μ -m.m. Ezzel a tétel véges mértékekre bizonyított.

② ► Most rátérünk az általános eset tárgyalására, azaz feltesszük, hogy μ és ν σ -véges mértékek. Ekkor $\exists A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I \subset \mathbb{N}$) rendszer úgy, hogy $\mu(A_i) < \infty \quad \forall i \in I$ és $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Feltehetjük, hogy $I = \{1, \dots, n\}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ -re, vagy $I = \mathbb{N}$.

Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$ ($i \in I$) $\implies X = \bigcup_{i \in I} B_i$ diszjunkt felbontás, és $B_i \subset A_i$ miatt $\mu(B_i) \leq \mu(A_i) < \infty \forall i \in I$. Hasonlóan $\exists C_j \in \mathcal{A}$ ($j \in J \subset \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer úgy, hogy $\mu(C_j) < \infty \forall j \in J$ és $X = \bigcup_{j \in J} C_j$. Ekkor $D_{ij} := B_i \cap C_j \in \mathcal{A}$ ($i \in I, j \in J$) olyan diszjunkt rendszer, melyre $X = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} D_{ij}$, $\mu(D_{ij}) < \infty$ és $\nu(D_{ij}) < \infty \forall i \in I, j \in J$.

Az 1.23. tétel jelöléseit használva $\mu_{D_{ij}}$ és $\nu_{D_{ij}}$ véges mértékek, és $\nu_{D_{ij}} \ll \mu_{D_{ij}}$, így ① miatt $\exists \varphi_{ij}: D_{ij} \rightarrow [0, \infty)$ μ -mérhető függvények, hogy $\nu_{D_{ij}}(A) = \int_A \varphi_{ij} d\mu_{D_{ij}}$ $\forall A \in \mathcal{A}_{D_{ij}}$. Legyen

$$\varphi: X \rightarrow [0, \infty), \quad \varphi(x) := \varphi_{ij}(x), \text{ ha } x \in D_{ij}.$$

Ekkor $A \in \mathcal{A}$ esetén $\nu(A) = \nu\left(A \cap \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} D_{ij}\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \nu(A \cap D_{ij}) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \nu_{D_{ij}}(A \cap D_{ij}) =$
 $= \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \int_{A \cap D_{ij}} \varphi_{ij} d\mu_{D_{ij}} = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \int_{A \cap D_{ij}} \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu \implies \varphi$ megfelel a tétel állításának.

Tegyük fel, hogy a $\tilde{\varphi}$ is teljesíti a tétel állítását, és $\mu(X(\varphi \neq \tilde{\varphi})) > 0$. Ekkor létezik i és j , hogy $\mu(\underbrace{D_{ij} \cap X(\varphi \neq \tilde{\varphi})}_{D:=}) > 0$. Legyen f a φ -nek ill. $\tilde{f}$ a $\tilde{\varphi}$ -nek D -re vett leszűkítése. Ekkor $A \in \mathcal{A}_D$ esetén $\nu_D(A) = \nu(A) = \int_A \varphi d\mu = \int_A f d\mu$, illetve hasonlóan $\nu_D(A) = \int_A \tilde{f} d\mu$. Mivel ν_D és μ_D véges mértékek, továbbá $\nu_D \ll \mu_D$, ezért a bizonyítás ① pontja értelmében $f = \tilde{f}$ μ_D -m.m. $\implies 0 = \mu_D(X(f \neq \tilde{f})) = \mu(D \cap X(\varphi \neq \tilde{\varphi})) = \mu(D)$, amely ellentmondás $\implies \mu(X(\varphi \neq \tilde{\varphi})) = 0$, azaz $\varphi = \tilde{\varphi}$ μ -m.m. $\square$

7.8. Megjegyzés. Ha $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, akkor $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$. Ennek mintájára vezettük be $\nu(A) = \int_A \varphi d\mu$ esetén a $\frac{d\nu}{d\mu} := \varphi$ jelölést.

7.9. Tétel. Legyenek μ és ν σ -véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, $\mu \ll \nu$ és $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ egy μ -mérhető függvény. Ekkor $A \in \mathcal{A}$ esetén a következő két integrál egyszerre létezik vagy nem létezik, továbbá ha léteznek, akkor

$$\int_A f d\mu = \int_A f \frac{d\mu}{d\nu} d\nu.$$

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ Legyen f egyszerű μ -mérhető függvény, melynek $\{c_1, \dots, c_r\}$ az érték-készlete. Ekkor $f = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{A_i}$, ahol $A_i := X(f = c_i)$, továbbá $\int f d\mu = \sum_{i=1}^r c_i \mu(A_i) =$
 $= \sum_{i=1}^r c_i \int_{A_i} \frac{d\mu}{d\nu} d\nu = \sum_{i=1}^r c_i \int \chi_{A_i} \frac{d\mu}{d\nu} d\nu = \int \sum_{i=1}^r c_i \chi_{A_i} \frac{d\mu}{d\nu} d\nu = \int f \frac{d\mu}{d\nu} d\nu.$

$\blacktriangleright$ Legyen f nemnegatív μ -mérhető. Ekkor az approximációs tétel szerint léteznek $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ nemnegatív μ -mérhető valós értékű egyszerű függvények, hogy

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Ekkor Beppo Levi monoton konvergencia tétele alapján $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu = \int f \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu$.

► Ha f tetszőleges μ -mérhető, akkor $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f^+ \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu - \int f^- \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu = \int (f^+ - f^-) \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu = \int f \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu$. Ezután f helyére $f\chi_A$ írva, adódik az állítás. $\square$

7.10. Tétel (Láncszabály). *Legyenek μ , ν és κ σ -véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\mu \ll \nu$ és $\nu \ll \kappa$, akkor $\mu \ll \kappa$ és*

$$\frac{d\mu}{d\kappa} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\kappa} \quad \kappa\text{-m.m.}$$

Bizonyítás. Ha $\kappa(A) = 0 \implies \nu \ll \kappa$ miatt $\nu(A) = 0 \implies \mu \ll \nu$ miatt $\mu(A) = 0 \implies \mu \ll \kappa$. Így létezik $\frac{d\mu}{d\kappa}$. Legyen $A \in \mathcal{A}$. Ekkor a 7.9. tétel miatt $\mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu = \int_A \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\kappa} \, d\kappa$. Ebből a Radon–Nikodym-tétel alapján kapjuk az állítást. $\square$

8. fejezet

Valószínűség

Az eddigi példák leginkább geometriai jelentésű mértékekre terjedtek ki. A legismertebb példa nem geometriai mértékre a valószínűség.

8.1. Valószínűségi mező

8.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olyan mértéktér, melyre $P(\Omega) = 1$ teljesül. Ekkor ezt a mértéktérrel *valószínűségi mezőnek*, $\mathcal{F}$ elemeit *eseményeknek*, Ω -t *biztos eseménynek* és P -t *valószínűségnek* nevezzük.

A következő tétel azt mutatja, hogy a Kolmogorov-féle axiómarendszer ekvivalens az előző definícióval.

8.2. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$. Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pontosan akkor valószínűségi mező, ha $P(\Omega) = 1$ és P σ -additív.

Bizonyítás. Az „ $\Rightarrow$ ” irány triviálisan teljesül. Megfordítva, ha P σ -additív, akkor $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\Omega) < \infty$ miatt $\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} n P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$, amiből már következik az állítás. $\square$

8.3. Megjegyzés. Ha $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, akkor

- ① $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$, hiszen $P(\bar{A}) + P(A) = P(\bar{A} \cup A) = P(\Omega) = 1$,
- ② $P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}$, hiszen $A \subset \Omega$ miatt $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

8.4. Tétel. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $\Omega \in \mathcal{A}$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$,

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset \Omega\} \quad \text{és} \quad P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ha μ geometriai mérték (hosszúság, terület, térfogat, ívhossz, felszín), akkor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -t geometriai valószínűségi mezőnek, illetve, ha μ számláló mérték, akkor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -t klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük.

Bizonyítás. ► Az $\mathcal{F}$ triviálisan olyan σ -algebra, mely részhalmaza $\mathcal{A}$ -nak.

► $P(\emptyset) = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(\Omega)} = 0$.

► Ha $A_i \in \mathcal{F}$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer, akkor $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Mindezekből következik az állítás. $\square$

8.5. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Az $A, B \in \mathcal{F}$ eseményeket *függetlenek* nevezzük, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ebből kézenfekvőnek tűnik az $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 6.1. definíció értelmében vett szorzatát független kísérletek valószínűségi mezőjének nevezni, hiszen

$$(P_1 \otimes P_2)(A \times B) = P_1(A)P_2(B) = (P_1 \otimes P_2)(A \times \Omega_2) \cdot (P_1 \otimes P_2)(\Omega_1 \times B) \quad (8.1)$$

teljesül minden $A \in \mathcal{F}_1$ és $B \in \mathcal{F}_2$ esetén. De $P_1 \otimes P_2$ teljes mérték, függetlenül attól, hogy P_1 illetve P_2 az volt-e. Viszont semmi sem indokolja, hogy nem teljes valószínűségekkel leírható kísérletek együttesen teljes mértékteret alkossanak. Ezért ezt leszűkítjük a különböző kísérletekhez tartozó események Descartes-szorzatai által generált σ -algebrára. A következő tétel szerint ez az egyetlen valószínűség, amire (8.1) teljesül.

8.6. Tétel. Legyenek $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ valószínűségi mezők,

$$\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$$

$$\mathcal{H} := \{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n\}$$

$$\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{H}).$$

Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűség, melyre

$$P(A_1 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) \dots P_n(A_n) \quad \forall A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{H}.$$

Ez a valószínűség $P_1 \otimes \dots \otimes P_n$ $\mathcal{F}$ -re vett leszűkítése, amit $P_1 \times \dots \times P_n$ módon jelölünk. Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt *független kísérletek valószínűségi mezőjének* nevezzük.

Bizonyítás. A 6.10. tétel miatt az egyetlen olyan $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ mérték, melyre

$$P(A_1 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) \dots P_n(A_n) \quad \forall A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{H}$$

teljesül, $P_1 \times \dots \times P_n$. De ez valószínűség, hiszen

$$P(\Omega) = P(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) = P_1(\Omega_1) \dots P_n(\Omega_n) = 1. \quad \square$$

A következő tétel szerint – amit már középiskolában is felhasználnak –, két egydimenziós geometriai valószínűségi mezőből képzett független kísérletek valószínűségi mezője egy kétdimenziós geometriai valószínűségi mező. Azonban ez csak akkor igaz, ha a Lebesgue-mértéket leszűkítjük a Borel-halmazok rendszerére.

8.7. Tétel. Legyenek $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ olyan geometriai valószínűségi mezők, melyekre $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \Omega_1\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \Omega_2\},$$

továbbá

$$P_1(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega_1)} \quad \text{és} \quad P_2(B) = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega_2)} \quad \forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2$$

esetén. Ekkor ezen két valószínűségi mező által adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ független kísérletek valószínűségi mezője olyan geometriai valószínűségi mező, melyre $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : A \subset \Omega\}$ és $P(C) = \frac{\lambda^2(C)}{\lambda^2(\Omega)} \quad \forall C \in \mathcal{F}$.

Bizonyítás. ① ► $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ a 3.16. tétel miatt.

② ► A 6.17. tételből $\lambda^2(\Omega) = \lambda(\Omega_1)\lambda(\Omega_2)$, ami pozitív valós szám, hiszen $\lambda(\Omega_1)$ és $\lambda(\Omega_2)$ is az.

③ ► Legyen $\mathcal{H} := \{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ és $\mathcal{H}^*$ azon halmazok rendszere, melyek előállnak véges sok diszjunkt $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Ekkor $\mathcal{H}$ a 2.19. tétel miatt félgyűrű, így $\mathcal{H}^*$ a 2.27. tétel miatt halmazalgebra. $\implies$ A 2.33. és a 2.35. tételekből $\sigma(\mathcal{H}^* \cap \Omega) = \sigma(\mathcal{H}^*) \cap \Omega$. Nyilván $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}^*)$ és $\sigma(\mathcal{H} \cap \Omega) = \sigma(\mathcal{H}^* \cap \Omega)$, így

$$\sigma(\mathcal{H} \cap \Omega) = \sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega. \quad (8.2)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}) = \\ &= \sigma(\{(B_1 \cap \Omega_1) \times (B_2 \cap \Omega_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \\ &= \sigma(\{(B_1 \times B_2) \cap (\Omega_1 \times \Omega_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \\ &= \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega) \underset{\substack{\uparrow \\ (8.2)}}{=} \sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega = \{A \cap \Omega : A \in \sigma(\mathcal{H})\} = \\ &= \{A \cap \Omega : A \in \sigma(\{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})\} = (3.17. \text{ tételből}) \\ &= \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : A \subset \Omega\}. \end{aligned}$$

④ ► A 8.6. tételből P a γ -hoz tartozó külső mérték $\mathcal{F}$ -re vett leszűkítése, ahol

$$\gamma : \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2) = \frac{\lambda(A_1)\lambda(A_2)}{\lambda(\Omega_1)\lambda(\Omega_2)}.$$

Így λ^2 definíciójából és a γ -hoz tartozó külső mérték definíciójából $P(C) = \frac{\lambda^2(C)}{\lambda^2(\Omega)}$ $\forall C \in \mathcal{F}$. $\square$

8.8. Megjegyzés. Ha az előző tételben a Lebesgue-mértéket nem szűkítettük volna le a Borel-mérhető halmazok rendszerére (azaz, ha $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ helyett $\mathcal{L}$, illetve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ helyett $\mathcal{L}^2$ lett volna írva), akkor az állítás nem lenne igaz. Ugyanis a 6.19. tétel miatt $\sigma(\{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathcal{L}\}) \neq \mathcal{L}^2$. Így a bizonyítás ③ pontjának utolsó előtti egyenlősége nem teljesülne.

Dobjunk fel egy pénzérmét egymásután addig, amíg a fej oldalára nem esik. Könnyen látható, hogy ha az egy dobást leíró valószínűségi mezőt véges sokszor szorozzuk össze a 8.6. tétel értelmében, akkor ezzel nem kapjuk meg az előző kísérlet-sorozatot leíró valószínűségi mezőt. Ehhez végtelen sokszor kell ezeket összeszorozni. Ez lehetséges, a következő tétel értelmében. (Megjegyezzük, hogy a 6.10. tételt csak valószínűségi mezők esetén lehet kiterjeszteni végtelen sok mérték szorzatára.)

A tétel előtt értelmezzük végtelen sok halmaz Descartes-szorzatát.

8.9. Definíció. Ha A_i ($i \in \mathbb{N}$) halmazok, akkor $\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i$ jelölje azt a halmazt, amelynek elemei azon sorozatok, melyeknek j -edik eleme A_j -beli, minden $j \in \mathbb{N}$ esetén.

8.10. Tétel. Legyenek $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) valószínűségi mezők,

$$\begin{aligned}\Omega &:= \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \\ \mathcal{H}_n &:= \left\{ \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathcal{F}_i \ (i \in \mathbb{N}) \text{ és } A_j = \Omega_j \ \forall j > n \right\} \ (n \in \mathbb{N}) \\ \mathcal{F} &:= \sigma \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \right).\end{aligned}$$

Ekkor egyértelműen létezik olyan $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűség, melyre

$$P \left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \right) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}_n.$$

Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt, **végtelen sok független kísérlet valószínűségi mezőjének** nevezzük.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{H}_n^* := \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{H}_n = \left\{ C \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i : C \in \mathcal{H}_n^* \right\}, \quad (8.3)$$

továbbá a 2.19. tétel miatt $\mathcal{H}_n^*$ félgűrű.

► Legyen $A, B \in \mathcal{H}_n \implies \exists A^*, B^* \in \mathcal{H}_n^*$, hogy $A = A^* \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$ és $B = B^* \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$.
 $\implies A \cap B = (A^* \cap B^*) \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$. Mivel $A^* \cap B^* \in \mathcal{H}_n^*$, hiszen $\mathcal{H}_n^*$ félgűrű, ezért (8.3) miatt $A \cap B \in \mathcal{H}_n$.

Másrészt $A \setminus B = (A^* \setminus B^*) \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$, és $\exists C_1^*, \dots, C_k^* \in \mathcal{H}_n^*$ diszjunkt halmazok, hogy $A^* \setminus B^* = \bigcup_{j=1}^k C_j^*$, ezért $A \setminus B = \left(\bigcup_{j=1}^k C_j^* \right) \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i = \bigcup_{j=1}^k \left(C_j^* \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i \right)$, ami (8.3) miatt véges diszjunkt $\mathcal{H}_n$ -beli felbontás. Mindezek alapján $\mathcal{H}_n$ félgűrű.

► Legyen $A, B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Ekkor $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots$ miatt létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $A, B \in \mathcal{H}_{n_0} \implies \mathcal{H}_{n_0}$ félgűrű volta miatt $A \cap B \in \mathcal{H}_{n_0}$ és $A \setminus B$ felírható véges sok diszjunkt $\mathcal{H}_{n_0}$ -beli halmaz uniójaként. $\implies A \cap B \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ és $A \setminus B$ felírható véges sok diszjunkt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ -beli halmaz uniójaként. Így $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ félgűrű. Ebből a 2.27. tétel miatt

$$\mathcal{H} := \left\{ H_1 \cup \dots \cup H_r : r \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \text{ diszjunktak} \right\}$$

halmazalgebra. Ha $H_1, \dots, H_r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, akkor léteznek $n_1, \dots, n_r$ egészek, hogy $H_k \in \mathcal{H}_{n_k}$ ($k = 1, \dots, r$). De $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots$, így $m := \max\{n_1, \dots, n_r\}$ választással $H_k \in \mathcal{H}_m \forall k = 1, \dots, r$. Ebből

$$\mathcal{H} = \{H_1 \cup \dots \cup H_r : r, m \in \mathbb{N}, H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}_m \text{ diszjunktak}\}.$$

► Legyen

$$\mu_n : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu_n \left(\bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \right) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}_n.$$

Legyen $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{H}_n$ diszjunktak és $B_1 \cup \dots \cup B_r \in \mathcal{H}_n$. Ekkor (8.3) miatt $\exists C_1, \dots, C_r \in \mathcal{H}_n^*$ diszjunkt halmazok, hogy $B_i = C_i \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i$ ($i = 1, \dots, r$). Ekkor

$$B_1 \cup \dots \cup B_r = (C_1 \cup \dots \cup C_r) \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i \in \mathcal{H}_n, \text{ ahol } C_1 \cup \dots \cup C_r \in \mathcal{H}_n^* \implies$$

$$\mu_n(B_1 \cup \dots \cup B_r) = (P_1 \times \dots \times P_n)(C_1 \cup \dots \cup C_r) = (P_1 \times \dots \times P_n)(C_1) + \dots +$$

$$+ (P_1 \times \dots \times P_n)(C_r) = \mu_n(B_1) + \dots + \mu_n(B_r) \implies \mu_n \text{ végesen additív.}$$

► Mivel $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots$ és P_i valószínűség, ezért $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ esetén, ha $A \in \mathcal{H}_m$, akkor $A \in \mathcal{H}_n$ teljesül, továbbá $\mu_m(A) = \mu_n(A)$.

► Legyen

$$\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(H_1 \cup \dots \cup H_r) := \sum_{k=1}^r \mu_m(H_k),$$

ahol $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}_m$ diszjunktak. Belátjuk, hogy μ definíciója korrekt. Egyrészt az előző pontból, ha $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}_m$ és $m \leq n$, akkor $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}_n$ és $\sum_{k=1}^r \mu_m(H_k) = \sum_{k=1}^r \mu_n(H_k)$.

Másrészt, ha $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{H}_m$ diszjunktak és $K_1, \dots, K_s \in \mathcal{H}_t$ diszjunktak, ahol $m \leq t$ és $\bigcup_{i=1}^r H_i = \bigcup_{j=1}^s K_j$, akkor $H_k = H_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^r H_i \right) = H_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^s K_j \right) = \bigcup_{j=1}^s (H_k \cap K_j)$, ami $\mathcal{H}_t$ -beli diszjunkt felbontás. $\implies \sum_{k=1}^r \mu_m(H_k) = \sum_{k=1}^r \mu_t \left(\bigcup_{j=1}^s (H_k \cap K_j) \right) =$
 $= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s \mu_t(H_k \cap K_j)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\sum_{j=1}^s \mu_t(K_j) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^r \mu_t(K_j \cap H_k)$, azaz $\sum_{k=1}^r \mu_m(H_k) = \sum_{j=1}^s \mu_t(K_j)$. Tehát μ definíciója valóban korrekt. Másrészt a definíció szerint μ végesen additív.

► Most belátjuk, hogy μ σ -additív is. Legyen $G_j \in \mathcal{H}$ ($j \in \mathbb{N}$) diszjunkt rendszer és $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \in \mathcal{H}$. Legyen $E_i := \bigcup_{j=i+1}^{\infty} G_j$. Ekkor $E_i = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^i G_j \right) \in \mathcal{H}$, hiszen $\mathcal{H}$ halmazalgebra. $\implies \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \right) = \mu \left(\left(\bigcup_{j=1}^i G_j \right) \cup E_i \right) = \sum_{j=1}^i \mu(G_j) + \mu(E_i)$
 $\implies \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i \mu(G_j) + \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_j) + \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$. Tehát μ σ -additivitásához azt kell belátnunk, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = 0$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) \neq 0$. Mivel μ végesen additív, ezért monoton is, így $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ miatt $\mu(E_1) \geq \mu(E_2) \geq \dots \implies$ Létezik $\varepsilon > 0$, hogy

$$\mu(E_i) \geq \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Legyen $E_i(\omega_1, \dots, \omega_n) := \{(\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots) : (\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots) \in E_i\}$ és $\mu^{(n)}$ jelölje a μ -nek megfelelő függvényt abban az esetben, amikor az

$$(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}), (\Omega_{n+2}, \mathcal{F}_{n+2}, P_{n+2}), \dots$$

valószínűségi mezőkből indulunk ki. Ha E_i $\mathcal{H}_{m_i}$ -beli diszjunkt halmazok uniójaként áll elő, akkor

$$F_{1,i} := \left\{ \omega_1 \in \Omega_1 : \mu^{(1)}(E_i(\omega_1)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

jelöléssel, a Fubini-tétel miatt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \mu(E_i) = (P_1 \times \dots \times P_{m_i})(E_i) = \int \chi_{E_i} d(P_1 \times \dots \times P_{m_i}) = \\ &= \iint \chi_{E_i} d(P_2 \times \dots \times P_{m_i}) dP_1 = \int \mu^{(1)}(E_i(\omega_1)) dP_1(\omega_1) = \\ &= \int_{F_{1,i}} \underbrace{\mu^{(1)}(E_i(\omega_1))}_{\leq 1} dP_1(\omega_1) + \int_{\overline{F_{1,i}}} \underbrace{\mu^{(1)}(E_i(\omega_1))}_{< \frac{\varepsilon}{2}} dP_1(\omega_1) \leq \\ &\leq P_1(F_{1,i}) + \frac{\varepsilon}{2} P_1(\overline{F_{1,i}}) \leq P_1(F_{1,i}) + \frac{\varepsilon}{2} \implies \end{aligned}$$

$P_1(F_{1,i}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies F_{1,1} \supset F_{1,2} \supset F_{1,3} \supset \dots$ és a P_1 folytonossága miatt $P_1 \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{1,i} \right) \geq \frac{\varepsilon}{2} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{1,i} \neq \emptyset$. Legyen $\tilde{\omega}_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{1,i}$ rögzített. Ekkor

$$\mu^{(1)}(E_i(\tilde{\omega}_1)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Legyen

$$F_{2,i} := \left\{ \omega_2 \in \Omega_2 : \mu^{(2)}(E_i(\tilde{\omega}_1, \omega_2)) \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Az előző eljárást megismételve μ helyett $\mu^{(1)}$ -el és E_i helyett $E_i(\tilde{\omega}_1)$ -el, azt kapjuk, hogy $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{2,i} \neq \emptyset$. Legyen $\tilde{\omega}_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{2,i}$ rögzített. Ekkor

$$\mu^{(2)}(E_i(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)) \geq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Rekurzív módon, ha már $\tilde{\omega}_i \in \Omega_i$ ($i = 1, \dots, n$) rögzítettek, akkor

$$\mu^{(n)}(E_i(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)) \geq \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Legyen

$$F_{n+1,i} := \left\{ \omega_{n+1} \in \Omega_{n+1} : \mu^{(n+1)}(E_i(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n, \omega_{n+1})) \geq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right\}$$

Az eljárást megismételve μ helyett $\mu^{(n+1)}$ -el és E_i helyett $E_i(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)$ -el, azt kapjuk, hogy $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{n+1,i} \neq \emptyset$. Legyen $\tilde{\omega}_{n+1} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{n+1,i}$ rögzített. Ezzel megadtunk egy $\bar{\omega} := (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots) \in \Omega$ sorozatot. Ha $E_i \mathcal{H}_{m_i}$ -beli diszjunkt halmazok uniójaként áll elő, akkor $\mu^{(m_i)}(E_i(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{m_i})) \geq \frac{\varepsilon}{2^{m_i}} \implies E_i(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{m_i}) \neq \emptyset \implies (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{m_i}, \omega_{m_i+1}, \omega_{m_i+2}, \dots) \in E_i$ minden $\omega_{m_i+j} \in \Omega_{m_i+j}$ ($j \in \mathbb{N}$) esetén. $\implies \bar{\omega} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$, ami ellentmondás. Ezzel bizonyítottuk, hogy μ σ -additív.

► Legyen

$$\gamma: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i\right) := P_1(A_1) \cdots P_n(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}_n.$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$, továbbá μ az egyetlen olyan kiterjesztése γ -nak $\mathcal{H}$ -ra, mely végesen additív. Másrészt μ σ -additív is, véges és $\mathcal{H}$ halmazalgebra, ezért a Caratheodory-féle kiterjesztési tétel szerint μ -nek egyetlen P mértékké való kiterjesztése van μ -nek $\sigma(\mathcal{H})$ -ra. Mindezek alapján, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{H})$ és $P(\Omega) = 1$ miatt kapjuk az állítást. $\square$

8.2. Valószínűségi változó

8.11. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha P -mérhető, azaz ha minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\ell: \Omega \rightarrow \{\text{igaz, hamis}\}$ egy logikai függvény. Ekkor a 4.11. definíció szerint $\Omega(\ell) = \{\omega \in \Omega : \ell(\omega) = \text{igaz}\}$. Vezessük be az $\{\ell\} := \Omega(\ell)$ illetve $P(\ell) := P(\{\ell\})$ jelölést, amennyiben $\Omega(\ell) \in \mathcal{F}$. Például, ha $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó és $x \in \mathbb{R}$, akkor $\{\xi < x\}$ jelöli azon $\omega \in \Omega$ elemekből álló eseményt, melyekre $\xi(\omega) < x$ teljesül. (Ez nyilván esemény, hiszen ξ mérhető függvény.) Másrészt $P(\xi < x)$ jelöli ennek az eseménynek a valószínűségét.

Valószínűségi mezőben a „majdnem mindenütt” tulajdonságot *majdnem biztosnak* nevezzük (jele: m.b.).

A következő állítás a 4.17. tétel következménye.

8.12. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor valószínűségi változó, ha $\{\xi < x\} \in \mathcal{F}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

8.13. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor a

$$Q_\xi: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_\xi(B) := P(\xi \in B)$$

függvényt ξ *eloszlásának* nevezzük.

8.14. Tétel. Ha $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, akkor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q_\xi)$ valószínűségi mező.

Bizonyítás. $Q_\xi(\mathbb{R}) = P(\xi \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$. Ha $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, akkor $Q_\xi(B) = P(\xi \in B) \geq 0$. Ha $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ diszjunktak, akkor $Q_\xi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\xi \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\xi \in B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi \in B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_\xi(B_i)$. $\square$

8.15. Tétel. Ha $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q)$ valószínűségi mező, akkor van olyan valószínűségi változó, melynek Q az eloszlása.

Bizonyítás. Legyen $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(\omega) := \omega$. Ekkor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $\xi^{-1}(B) = \xi(B) = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, azaz ξ valószínűségi változó, másrészt $Q_\xi(B) = Q(\xi \in B) = Q(B)$. $\square$

8.16. Példa. Legyen $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(H) \in \mathbb{R}_+$ és

$$Q: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(B) := \frac{\lambda(B \cap H)}{\lambda(H)}.$$

Könnyen látható, hogy ekkor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q)$ valószínűségi mező, így a 8.15. tétel miatt létezik olyan valószínűségi változó, melynek Q az eloszlása. Az ilyen valószínűségi változót *egyenletes eloszlásúnak* nevezzük a H halmazon.

8.17. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha ξ egyenletes eloszlású a H halmazon és $(H, \mathcal{F}, P)$ geometriai valószínűségi mező, akkor

$$Q_\xi(B) = P(B \cap H) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

8.18. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor az

$$F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := P(\xi < x)$$

függvényt ξ *eloszlásfüggvényének* nevezzük.

8.19. Tétel. Legyen ξ és η két (nem feltétlenül ugyanabban a valószínűségi mezőben értelmezett) valószínűségi változó. Ekkor $Q_\xi = Q_\eta$ pontosan abban az esetben teljesül, ha $F_\xi = F_\eta$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” $F_\xi(x) = Q_\xi((-\infty, x)) = Q_\eta((-\infty, x)) = F_\eta(x)$.

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $\mathcal{H} := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{H}$ félgyűrű és $\mathbb{R}$ előáll megszámlálhatóan sok $\mathcal{H}$ -beli halmaz uniójaként. Másrészt $Q_\xi([a, b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a) = Q_\eta([a, b])$, azaz $Q_\xi(H) = Q_\eta(H) \forall H \in \mathcal{H}$. Végül a 3.14. tétel miatt $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, továbbá a 8.14. tételből Q_ξ és Q_η σ -véges mértékek az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető téren. Mindezekből a 2.47. tétel (Caratheodory) miatt $Q_\xi = Q_\eta$. $\square$

8.20. Példa. Legyen $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(H) \in \mathbb{R}_+$. A ξ valószínűségi változó pontosan akkor egyenletes eloszlású a H halmazon, ha

$$F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \frac{\lambda((-\infty, x) \cap H)}{\lambda(H)}.$$

Speciálisan, ha $H = [a, b]$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, akkor

$$F_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha ξ egyenletes eloszlású a H halmazon, akkor $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_\xi(x) = Q_\xi((-\infty, x)) = \frac{\lambda((-\infty, x) \cap H)}{\lambda(H)}.$$

Az állítás megfordítása a 8.19. tétel miatt igaz. $\square$

8.21. Definíció. A ξ valószínűségi változót *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha ξ eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue-mérték Borel-mérhető halmazokra vett leszűkítésére, azaz ha $Q_\xi(B) = 0$ minden esetben, amikor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $\lambda(B) = 0$.

8.22. Tétel. A ξ valószínűségi változó pontosan akkor abszolút folytonos, ha λ -m.m. egyértelműen létezik $f_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény, melyre

$$Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (8.4)$$

Az f_ξ függvényt a ξ sűrűségfüggvényének nevezzük.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Legyen λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése. Ekkor $Q_\xi \ll \lambda'$, így a Radon–Nikodym-tétel szerint λ' -m.m. egyértelműen létezik olyan $f_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ λ' -mérhető, azaz Borel-mérhető függvény, melyre $Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda' \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor $f_\xi = \frac{dQ_\xi}{d\lambda'}$ λ' -m.m. Az 5.19. tétel alapján $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $\int_B f_\xi d\lambda' = \int_B f_\xi d\lambda$. Így f_ξ -re (8.4) teljesül. Még a λ -m.m. egyértelműséget kell belátni.

Tegyük fel, hogy valamely $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvényre $Q_\xi(B) = \int_B g d\lambda \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $\lambda(\mathbb{R}(f_\xi \neq g)) > 0$ teljesül. Mivel f_ξ és g Borel-mérhetőek, ezért $\mathbb{R}(f_\xi \neq g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \lambda(\mathbb{R}(f_\xi \neq g)) = \lambda'(\mathbb{R}(f_\xi \neq g)) > 0$. Másrészt $\int_B g d\lambda = \int_B g d\lambda' (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, így azt kaptuk, hogy f_ξ nem λ' -m.m. egyértelműen meghatározott, melyre $Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda' \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ teljesül. Ez ellentmondás, így $\lambda(\mathbb{R}(f_\xi \neq g)) = 0$, azaz $f_\xi = g$ λ -m.m.

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ és $\lambda(B) = 0$. Ekkor az 5.5. tétel miatt $Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda = 0$. Így ξ abszolút folytonos. $\square$

8.23. *Megjegyzés.* A bizonyításból tehát kiderül, hogy abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén $f_\xi = \frac{dQ_\xi}{d\lambda}$ (Q_ξ -nek λ' -re vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja), ahol λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése.

8.24. Tétel. *A ξ valószínűségi változó pontosan akkor abszolút folytonos, ha létezik olyan $f_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény, melyre*

$$F_\xi(x) = \int_{(-\infty, x)} f_\xi d\lambda \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor f_ξ a ξ sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Ha ξ abszolút folytonos és f_ξ a sűrűségfüggvénye, akkor $F_\xi(x) = Q_\xi((-\infty, x)) = \int_{(-\infty, x)} f_\xi d\lambda$.

► „ $\Leftarrow$ ” A 8.19. tétel bizonyításában használt jelöléssel $Q_\xi(H) = \int_H f_\xi d\lambda \forall H \in \mathcal{H}$. Legyen $Q^*(B) := \int_B f_\xi d\lambda \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor a 7.1. tétel miatt $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q^*)$ mértéktér. Mivel Q_ξ is mérték és $Q_\xi = Q^*$ a $\mathcal{H}$ félgyűrűn, ezért a 2.47. tétel (Caratheodory) miatt $Q_\xi = Q^*$ a $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazon is. Ebből a 8.22. tétel miatt következik az állítás. $\square$

8.25. Tétel. *Ha a ξ valószínűségi változóhoz létezik olyan $f_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény, melyre*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

akkor ξ abszolút folytonos és f_ξ a sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése, továbbá $Q: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(B) := \int_B f_\xi d\lambda'$. Ez a definíció korrekt, hiszen f_ξ nemnegatív Borel-mérhető függvény. Ekkor 7.1. tétel alapján $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q)$ mértéktér. Így a Q mérték folytonossága

miatt $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-n}^x f_\xi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[x-n, x]} f_\xi d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[x-n, x]} f_\xi d\lambda' = \int_{(-\infty, x]} f_\xi d\lambda' = \int_{(-\infty, x)} f_\xi d\lambda' = \int_{(-\infty, x)} f_\xi d\lambda$. Ebből a 8.24. tétel alapján következik az állítás. $\square$

8.26. Tétel. *Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény és $\int f d\lambda = 1$, akkor létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek f a sűrűségfüggvénye.*

Bizonyítás. Legyen $Q: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(B) := \int_B f d\lambda$. Ez a definíció korrekt, hiszen f nemnegatív Borel-mérhető függvény. Ekkor 7.1. tétel alapján $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q)$ mértéktér, másrészt $Q(\mathbb{R}) = \int f d\lambda = 1$. Így $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Q)$ valószínűségi mező, azaz a 8.15. tétel miatt létezik olyan valószínűségi változó, melynek Q az eloszlása. Így a 8.22. tételből adódik az állítás. $\square$

8.27. Tétel. *Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, akkor létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek f a sűrűségfüggvénye.*

Bizonyítás. A 8.26. tétel következménye, hiszen ekkor $\int f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. $\square$

8.28. Példa. Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz $F_\xi(x) = 0$, ha $x < 0$, $F_\xi(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $F_\xi(x) = 1$, ha $x > 1$. Ekkor ξ abszolút folytonos, és $f_\xi(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $f_\xi(x) = 0$ minden más esetben. Valóban, könnyen látható, hogy $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \forall x \in \mathbb{R}$.

8.29. Példa. Létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyen $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Valóban, hiszen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctg(x)]_{-t}^t = 1$. Az ilyen valószínűségi változót *Cauchy-eloszlásúnak* nevezzük.

8.30. Példa. Létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ehhez azt kell belátnunk, hogy $W := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$. Mivel

$$W^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy,$$

így $x := r \cos \theta$ és $y := r \sin \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$W^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^t = 1.$$

A helyettesítés során felhasználtuk, hogy a Jacobi-determináns

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Mivel $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $W > 0$. Ebből $W = 1$.

Ekkor ezt a valószínűségi változót, *standard normális eloszlásúnak* nevezzük, a sűrűségfüggvényét φ , eloszlásfüggvényét pedig Φ módon jelöljük.

Amint láttuk, abszolút folytonos esetben az eloszlás Radon–Nikodym-deriváltja a sűrűségfüggvény. A következő tétel azt mutatja, hogy diszkrét esetben is fontos az eloszlás Radon–Nikodym-deriváltja, csak Lebesgue-mérték helyett számláló mérték szerint kell deriválni.

8.31. Tétel. *Legyen a ξ diszkrét valószínűségi változó, azaz az értékkészlete megszámlálható számosságú és $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ számláló mérték. Ekkor $Q_\xi \ll \mu$ és*

$$\frac{dQ_\xi}{d\mu}(x) = P(\xi = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Ha $\mu(B) = 0$, akkor $B = \emptyset$, így $Q_\xi(B) = 0 \implies Q_\xi \ll \mu \implies \exists \frac{dQ_\xi}{d\mu}$. Legyen ξ értékkészlete $\{x_i : i \in I\}$, ahol $I \subset \mathbb{N}$. Legyen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vezessük be a következő jelöléseket: $I_B := \{i \in I : x_i \in B\}$, $C := B \setminus \{x_i : i \in I_B\}$ és $i \in I$ esetén

$$f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_i(x) := \chi_{\{x_i\}} P(\xi = x) = \begin{cases} P(\xi = x_i), & \text{ha } x = x_i, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $\int_B P(\xi = x) d\mu(x) = \sum_{i \in I_B} \int_{\{x_i\}} P(\xi = x) d\mu(x) + \int_C P(\xi = x) d\mu(x) =$
 $= \sum_{i \in I_B} \int f_i(x) d\mu(x) + \underbrace{\int \chi_C P(\xi = x) d\mu(x)}_0 = \sum_{i \in I_B} P(\xi = x_i) \mu(\underbrace{\mathbb{R}(f_i = P(\xi = x_i))}_{\{x_i\}}) =$
 $= \sum_{i \in I_B} P(\xi = x_i) = P(\xi \in \{x_i : i \in I_B\}) = P(\xi \in \{x_i : i \in I_B\}) + P(\xi \in C) =$
 $= P(\xi \in B) = Q_\xi(B)$. Így a Radon–Nikodym-tételből következik az állítás. (Azért nem szerepel a μ -szerint m.m., mert számláló mérték esetén csak az $\emptyset$ mértéke 0.) $\square$

8.3. Valószínűségi vektorváltozó

8.32. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi_1, \dots, \xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor a $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ rendezett elem n -est *valószínűségi vektorváltozónak*, illetve a

$$Q_{\vec{\xi}}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_{\vec{\xi}}(B) := P(\vec{\xi} \in B)$$

függvényt a $\vec{\xi}$ *eloszlásának* vagy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók *együttes eloszlásának* nevezzük.

8.33. Tétel. Ha $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó, akkor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q_{\vec{\xi}})$ valószínűségi mező.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\vec{\xi}$ az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett. Ekkor $Q_{\vec{\xi}}(\mathbb{R}^n) = P(\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n) = P(\Omega) = 1$. Ha $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, akkor $Q_{\vec{\xi}}(B) = P(\vec{\xi} \in B) \geq 0$. Ha $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($i \in \mathbb{N}$) diszjunktak, akkor $Q_{\vec{\xi}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\vec{\xi} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\vec{\xi} \in B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\vec{\xi} \in B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{\vec{\xi}}(B_i)$. $\square$

8.34. Tétel. Ha $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ valószínűségi mező, akkor létezik olyan valószínűségi vektorváltozó, melynek Q az eloszlása.

Bizonyítás. Legyen $\xi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_i(\omega_1, \dots, \omega_n) := \omega_i$ ($i = 1, \dots, n$), ami nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény, így Borel-mérhető, azaz $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó. Másrészt $Q_{\vec{\xi}}(B) = Q(\vec{\xi} \in B) = Q(B) \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

8.35. Példa (A 8.16. példa általánosítása). Legyen $n \in \mathbb{N}$, $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda^n(H) \in \mathbb{R}_+$ és

$$Q: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(B) := \frac{\lambda^n(B \cap H)}{\lambda^n(H)}.$$

Könnyen látható, hogy ekkor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ valószínűségi mező, így a 8.34. tétel miatt létezik olyan valószínűségi vektorváltozó, melynek Q az eloszlása. Az ilyen valószínűségi vektorváltozót *egyenletes eloszlásúnak* nevezzük a H halmazon.

8.36. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ egyenletes eloszlású a H halmazon és $(H, \mathcal{F}, P)$ geometriai valószínűségi mező, akkor

$$Q_{\vec{\xi}}(B) = P(B \cap H) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

8.37. Definíció. Legyen a $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett. Ekkor az

$$F_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) := P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < x_i\}\right)$$

függvényt a $\vec{\xi}$ *eloszlásfüggvényének*, vagy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók *együttes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

Következik néhány technikai jellegű lemma, melyek az átviteli elv használatát egyszerűsítik.

8.38. Lemma. Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, $a \in \mathbb{R}$ és $f(a - \frac{1}{k})$ konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a - \frac{1}{k}) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

Bizonyítás. Legyen $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ és $a_k < a \ \forall k \in \mathbb{N}$. Az átviteli elv szerint (lásd például [8, 356. oldal, 19.37. tétel]) azt kell belátni, hogy $f(a_k)$ konvergens és $y := \lim_{k \rightarrow \infty} f(a - \frac{1}{k})$ -hoz konvergál. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $0 \leq y - f(a - \frac{1}{k_0}) < \varepsilon$, másrészt létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $k > N$ esetén $a - a_k < \frac{1}{k_0}$, azaz $a - \frac{1}{k_0} < a_k$. Így

$$y - \varepsilon < f(a - \frac{1}{k_0}) \leq f(a_k) \quad \forall k > N.$$

Legyen $l_k := \left\lceil \frac{1}{a - a_k} \right\rceil + 1$. Ekkor $l_k > \frac{1}{a - a_k}$, azaz $a_k < a - \frac{1}{l_k}$. Így

$$f(a_k) \leq f(a - \frac{1}{l_k}) \leq y \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mindezekből $0 \leq y - f(a_k) < \varepsilon \ \forall k > N$, vagyis $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = y$. $\square$

8.39. Lemma. Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény és $f(-k)$ konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} f(-k) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Bizonyítás. Legyen $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty$. Az átviteli elv szerint azt kell belátni, hogy $f(a_k)$ konvergens és $y := \lim_{k \rightarrow \infty} f(-k)$ -hoz konvergál. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $0 \leq f(-k_0) - y < \varepsilon$, másrészt létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $k > N$ esetén $a_k < -k_0$. Így

$$f(a_k) \leq f(-k_0) < y + \varepsilon \quad \forall k > N.$$

Legyen $l_k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $-l_k < a_k$. Ekkor

$$y \leq f(-l_k) \leq f(a_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mindezekből $0 \leq f(a_k) - y < \varepsilon \ \forall k > N$, vagyis $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = y$. $\square$

8.40. Lemma. Ha $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ minden változójában monoton növekvő függvény és $f(k, \dots, k)$ konvergens, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k, \dots, k) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} f(x_1, \dots, x_n)$.

Bizonyítás. Legyen $a_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$), $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(i)} = \infty \ \forall i = 1, \dots, n$. Az átviteli elv szerint azt kell belátni, hogy $f(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ konvergens és $y := \lim_{k \rightarrow \infty} f(k, \dots, k)$ -hoz konvergál. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Ekkor létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $0 \leq y - f(k_0, \dots, k_0) < \varepsilon$, másrészt létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $k > N$ esetén $a_k^{(i)} > k_0 \ \forall i = 1, \dots, n$. Így

$$y - \varepsilon < f(k_0, \dots, k_0) \leq f(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) \quad \forall k > N.$$

Legyen $l_k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $l_k > \max\{a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}\}$. Ekkor

$$f(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) \leq f(l_k, \dots, l_k) \leq y \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Így $0 \leq y - f(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) < \varepsilon \ \forall k > N$, vagyis $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) = y$. $\square$

8.41. Tétel. Ha $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó, akkor

$$F_{\xi_i}(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_{n-1} \rightarrow \infty}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{n-1}),$$

minden $x \in \mathbb{R}$ és $i = 1, \dots, n$ esetén.

Bizonyítás. A valószínűség folytonossága és a 8.40. lemma miatt

$$\begin{aligned} F_{\xi_i}(x) &= P\left(\{\xi_i < x\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j \neq i} \{\xi_j < k\}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{\xi_i < x\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{\xi_j < k\}\right)\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\{\xi_1 < k\} \cap \dots \cap \{\xi_{i-1} < k\} \cap \{\xi_i < x\} \cap \{\xi_{i+1} < k\} \cap \dots \cap \{\xi_n < k\}\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} g_x(k, \dots, k) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_{n-1} \rightarrow \infty}} g_x(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

ahol $g_x(x_1, \dots, x_{n-1}) = F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{n-1})$. $\square$

8.42. Tétel. Ha $\vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó, akkor

- ① $F_{\vec{\xi}}$ minden változójában monoton növekvő,
- ② $F_{\vec{\xi}}$ minden változójában balról folytonos,
- ③ $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$,
- ④ $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = 1$,
- ⑤ $P\left(\bigcap_{i=1}^n \{a_i \leq \xi_i \leq b_i\}\right) = \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\vec{\xi}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \quad (i = 1, \dots, n).$

Bizonyítás. ► Az ① triviálisan teljesül.

► Legyenek $a, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ és $B := \bigcap_{i=2}^n \{\xi_i < x_i\}$. Ekkor $F_{\vec{\xi}}(a, x_2, \dots, x_n) = P(\{\xi_1 < a\} \cap B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{\xi_1 < a - \frac{1}{k}\} \cap B\right)\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\{\xi_1 < a - \frac{1}{k}\} \cap B\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\vec{\xi}}\left(a - \frac{1}{k}, x_2, \dots, x_n\right) \underset{\text{8.38. lemma}}{=} \lim_{x_1 \rightarrow a-0} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \implies F_{\vec{\xi}}$ az első változójában balról folytonos. A többi változóra hasonlóan járhatunk el, így ② bizonyított.

► Az előző jelöléssel $P(\emptyset) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (\{\xi_1 < -k\} \cap B)\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P(\{\xi_1 < -k\} \cap B) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\vec{\xi}}(-k, x_2, \dots, x_n) \underset{\text{8.39. lemma}}{=} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \implies i = 1$ esetén ③ bizonyított. A többi i -re hasonló az eljárás.

► $P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < k\}\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < k\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\vec{\xi}}(k, \dots, k) \underset{\text{8.40. lemma}}{=} \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) \implies \text{④}.$

► $X_i := \{\xi_i < x_i\}$, $A_i := \{\xi_i < a_i\}$, $B_i := \{\xi_i < b_i\}$ és $C_i := \{a_i \leq \xi_i < b_i\}$ jelölésekkel

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\xi}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= F_{\xi}(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) - F_{\xi}(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) = \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap B_n) - P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap A_n) = \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap B_n \setminus (X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap A_n)) = \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap B_n \cap (\overline{X_1} \cup \dots \cup \overline{X_{n-1}} \cup \overline{A_n})) = \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap B_n \cap \overline{A_n}) = P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap C_n) \implies \\
\Delta_{a_{n-1}, b_{n-1}}^{(n-1)} \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\xi}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-2} \cap B_{n-1} \cap C_n) - P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-2} \cap A_{n-1} \cap C_n) = \\
&= P(X_1 \cap \dots \cap X_{n-2} \cap C_{n-1} \cap C_n).
\end{aligned}$$

Az eljárás folytatásával kapjuk, hogy $\Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\xi} = P(C_1 \cap \dots \cap C_n)$, amivel
 ⑤ bizonyított. $\square$

8.43. Tétel. Legyen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre teljesülnek a következők:

- ① F minden változójában monoton növekvő,
- ② F minden változójában balról folytonos,
- ③ $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$,
- ④ $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$,
- ⑤ $\Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F \geq 0, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \quad (i = 1, \dots, n)$.

Ekkor van olyan valószínűségi vektorváltozó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás. A ② és ⑤ tulajdonságok miatt létezik a λ_F Lebesgue–Stieltjes-mérték. Legyen Q a λ_F -nek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -re vett leszűkítése. Ekkor $Q((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)) =$

$$\begin{aligned}
&= Q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, x_1) \times \dots \times [-k, x_n)\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} Q([-k, x_1) \times \dots \times [-k, x_n)) \underset{\text{2.66. tétel}}{=} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{-k, x_1}^{(1)} \dots \Delta_{-k, x_n}^{(n)} F \underset{\text{2.62. tétel}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (F(x_1, \dots, x_n) + \Sigma_k), \text{ ahol } \Sigma_k \text{ olyan összeg, mely-} \\
&\text{ben a tagok } \pm F(c_1, \dots, c_n) \text{ alakúak, és a } c_i \text{ számok közül legalább az egyik } -k. \text{ A } \\
&c_1, \dots, c_n \text{ változóiban egyet kivéve minden } -k \text{ helyére írjunk nullát. Az így kapott} \\
&\text{változókat jelöljük } d_1, \dots, d_n \text{ módon. Ekkor ① és ③ miatt } 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F(c_1, \dots, c_n) \leq \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} F(d_1, \dots, d_n) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} F(c_1, \dots, c_n) = 0 \implies
\end{aligned}$$

$$Q((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n). \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{④} \\ x_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) \underset{\text{8.40. lemma}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} F(k, \dots, k) \underset{\text{(8.5)}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} Q((-\infty, k) \times \dots \times (-\infty, k)) \underset{\text{folyt.}}{=} \\
&Q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (-\infty, k) \times \dots \times (-\infty, k)\right) = Q(\mathbb{R}^n) \implies (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q) \text{ valószínűségi mező}
\end{aligned}$$

$\implies$ 8.34. tételből létezik olyan $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó, melynek Q az eloszlása. Ekkor (8.5) miatt $\vec{\xi}$ -nek F az eloszlásfüggvénye. $\square$

8.44. *Megjegyzés.* A 8.43. tételben $n = 1$ esetén könnyen látható, hogy ① $\Leftrightarrow$ ⑤, így ekkor ⑤ elhagyható. Másrészt $n \geq 2$ esetén az ⑤ feltétel kell, ugyanis a többi tulajdonságból ez nem következik. Például

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2, & \text{ha } 0 < x_1 + x_2 \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x_1 + x_2 > 1, \end{cases}$$

esetén ①–④ teljesül, de ⑤ nem, hiszen $\Delta_{0,1}^{(1)}\Delta_{0,1}^{(2)}F = -1$.

8.45. Tétel. *Legyenek $\vec{\xi}$ és $\vec{\eta}$ valószínűségi vektorváltozók (nem feltétlenül ugyanabban a valószínűségi mezőben). Ekkor $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\vec{\eta}}$ pontosan abban az esetben teljesül, ha $F_{\vec{\xi}} = F_{\vec{\eta}}$.*

Bizonyítás. Az „ $\Rightarrow$ ” irány triviális. Megfordítva, legyen

$$\mathcal{T} := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, (i = 1, \dots, n)\},$$

ahol $b_i = a_i$ esetén $[a_i, b_i] := \emptyset$. Ez $n = 1$ esetén triviálisan félgűrű, így a 2.19. tétel miatt tetszőleges n -re is az. Másrészt $\mathbb{R}^n$ előáll megszámlálhatóan végtelen sok $\mathcal{T}$ -beli halmaz uniójaként. A 8.42. tétel miatt

$$\begin{aligned} Q_{\vec{\xi}}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) &= \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\vec{\xi}} = \\ &= \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \cdots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\vec{\eta}} = Q_{\vec{\eta}}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]), \end{aligned}$$

azaz $Q_{\vec{\xi}}(T) = Q_{\vec{\eta}}(T) \forall T \in \mathcal{T}$. A 3.14. tétel miatt $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, továbbá a 8.33. tételből $Q_{\vec{\xi}}$ és $Q_{\vec{\eta}}$ σ -véges mértékek az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren. Mindezek alapján a 2.47. tétel (Caratheodory-féle kiterjesztési tétel) miatt $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\vec{\eta}}$. $\square$

8.46. Példa. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda^n(H) \in \mathbb{R}_+$. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó pontosan akkor egyenletes eloszlású a H halmazon, ha

$$F_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\lambda^n(H)} \lambda^n\left(\left((-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)\right) \cap H\right).$$

Bizonyítás. Ha $\vec{\xi}$ egyenletes eloszlású a H halmazon, akkor $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) &= Q_{\vec{\xi}}\left((-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda^n(H)} \lambda^n\left(\left((-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)\right) \cap H\right). \end{aligned}$$

Az állítás megfordítása a 8.45. tétel miatt igaz. $\square$

8.47. Definíció. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó *abszolút folytonos*, ha $Q_{\vec{\xi}}$ abszolút folytonos a λ^n mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -re vett leszűkítésére, azaz ha $Q_{\vec{\xi}}(B) = 0$ minden olyan esetben, amikor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ és $\lambda^n(B) = 0$.

A következő tétel a 8.22. tételhez hasonlóan bizonyítható.

8.48. Tétel. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó pontosan akkor abszolút folytonos, ha λ^n -m.m. egyértelműen létezik $f_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény, melyre

$$Q_{\vec{\xi}}(B) = \int_B f_{\vec{\xi}} d\lambda^n \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Az $f_{\vec{\xi}}$ függvényt a $\vec{\xi}$ sűrűségfüggvényének, vagy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének nevezzük.

8.49. Megjegyzés. A Radon–Nikodym-tételből következően $f_{\vec{\xi}} = \frac{dQ_{\vec{\xi}}}{d\lambda^n}$, ahol λ^n a λ^n -nek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -re vett leszűkítése.

8.50. Tétel. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó pontosan akkor abszolút folytonos, ha létezik olyan $f_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény, melyre

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{(-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)} f_{\vec{\xi}} d\lambda^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor $f_{\vec{\xi}}$ a $\vec{\xi}$ sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Ha $\vec{\xi}$ abszolút folytonos és $\vec{\xi}$ a sűrűségfüggvénye, akkor

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = Q_{\vec{\xi}}((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)) = \int_{(-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n)} f_{\vec{\xi}} d\lambda^n.$$

► „ $\Leftarrow$ ” A 8.42. tétel miatt $Q_{\vec{\xi}}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\vec{\xi}}$, amely a feltételből következően, a differenciák lépésenkénti végrehajtásával adódik, hogy egyenlő az

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} f_{\vec{\xi}} d\lambda^n$$

integrállal, azaz

$$Q_{\vec{\xi}}(T) = \int_T f_{\vec{\xi}} d\lambda^n \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

ahol $\mathcal{T}$ ugyanaz, mint a 8.45. tétel bizonyításában. Legyen

$$Q(B) := \int_B f_{\vec{\xi}} d\lambda^n \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ekkor a 7.1. tétel miatt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ mértéktér. Mivel $Q_{\vec{\xi}}$ mérték, és $Q_{\vec{\xi}} = Q$ a $\mathcal{T}$ félgyűrűn, ezért a 2.47. tétel (Caratheodory) miatt $Q_{\vec{\xi}} = Q$ a $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ halmazon is. Ebből a 8.48. tétel miatt következik az állítás. $\square$

8.51. Tétel. *Ha a $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozóhoz létezik olyan Borel-mérhető $f_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre*

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_1 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor $\vec{\xi}$ abszolút folytonos és $f_{\vec{\xi}}$ a $\vec{\xi}$ sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen

$$Q(B) := \int_B f_{\vec{\xi}} d(\lambda \times \cdots \times \lambda) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ekkor a 7.1. tétel miatt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ mértéktér.

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_1-k}^{x_1} \cdots \int_{x_n-k}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_1 = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[x_1-k, x_1]} \cdots \int_{[x_n-k, x_n]} f_{\vec{\xi}} d\lambda \cdots d\lambda = (6.13. \text{ tételből}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[x_1-k, x_1] \times \cdots \times [x_n-k, x_n]} f_{\vec{\xi}} d(\lambda \times \cdots \times \lambda) = (Q \text{ folytonossága miatt}) \\ &= \int_{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]} f_{\vec{\xi}} d(\lambda \times \cdots \times \lambda) = (5.19. \text{ tételből}) \\ &= \int_{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]} f_{\vec{\xi}} d\lambda^n. \end{aligned}$$

Így a 8.50. tétel miatt kapjuk az állítást. $\square$

8.52. Tétel. *Ha $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ Borel-mérhető függvény és $\int f d\lambda^n = 1$, akkor létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, melynek f a sűrűségfüggvénye.*

Bizonyítás. Legyen $Q(B) := \int_B f d\lambda^n \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. A 7.1. tétel miatt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ mértéktér, másrészt $Q(\mathbb{R}^n) = \int f d\lambda^n = 1$, így $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ valószínűségi mező. Ebből a 8.34. tétel miatt létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, melynek Q az eloszlása. Így a 8.48. tétel miatt igaz az állítás. $\square$

8.53. Tétel. *Ha a $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, akkor a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók mindegyike abszolút folytonos, továbbá*

$$f_{\xi_i}(x_i) = \int \cdots \int f_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_{i-1}) d\lambda(x_{i+1}) \cdots d\lambda(x_n)$$

minden $i = 1, \dots, n$ és $x_i \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor

$$\begin{aligned} Q_{\xi_n}(B) &= Q_{\xi}(\mathbb{R}^{n-1} \times B) = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times B} f_{\xi} d\lambda^n = \int f_{\xi} \chi_{\mathbb{R}^{n-1} \times B} d\lambda^n = \\ &= \int f_{\xi} \chi_{\mathbb{R}^{n-1} \times B} d(\lambda \times \cdots \times \lambda) = \\ &= \int \left(\int \cdots \int f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_{n-1}) \right) d\lambda(x_n). \end{aligned}$$

Így $i = n$ esetén az állítás bizonyított. A többi i -re hasonló az eljárás. $\square$

8.54. Tétel. Ha $f_i: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ($i = 1, \dots, n$) olyan Borel-mérhető függvények, melyekre $\int f_i d\lambda = 1$ ($i = 1, \dots, n$), akkor létezik olyan abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, melynek

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

a sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen $f_i^*: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $f_i^*(x_1, \dots, x_n) := f_i(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Ekkor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $f_i^{*-1}(B) = \{(x_1, \dots, x_n) : f_i^*(x_1, \dots, x_n) \in B\} = \{(x_1, \dots, x_n) : f_i(x_i) \in B\} = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times f_i^{-1}(B) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, hiszen f_i Borel-mérhető, és így $f_i^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ebből kapjuk, hogy f_i^* Borel-mérhető, másrészt $f = f_1^* \cdots f_n^*$. Így f is Borel-mérhető. Mivel

$$\begin{aligned} \int f d\lambda^n &= \int f d(\lambda \times \cdots \times \lambda) = \int \cdots \int f d\lambda \cdots d\lambda = \\ &= \int \cdots \int f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_n) = \\ &= \int \cdots \int f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \left(\int f_1(x_1) d\lambda(x_1) \right) d\lambda(x_2) \cdots d\lambda(x_n) = \\ &= \int \cdots \int f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) d\lambda(x_2) \cdots d\lambda(x_n), \end{aligned}$$

így az eljárás folytatásával kapjuk, hogy $\int f d\lambda^n = 1$. Ebből a 8.52. tétel alapján kapjuk az állítást. $\square$

8.4. Valószínűségi változók függetlensége

8.55. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, és

$$\sigma(\xi) := \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Ekkor $\sigma(\xi)$ olyan σ -algebra, melyre $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$ teljesül. A $\sigma(\xi)$ -t a ξ által generált σ -algebrának nevezzük.

Bizonyítás. $\Omega = \xi^{-1}(\mathbb{R}) \in \sigma(\xi)$. Ha $A \in \sigma(\xi)$, azaz létezik $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $A = \xi^{-1}(B)$, akkor $\bar{A} = \Omega \setminus A = \xi^{-1}(\mathbb{R}) \setminus \xi^{-1}(B) = \xi^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) \in \sigma(\xi)$. Ha $A_n \in \sigma(\xi)$ ($n \in \mathbb{N}$), azaz létezik $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $A_n = \xi^{-1}(B_n)$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_n) = \xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \sigma(\xi)$. Mindezekből $\sigma(\xi)$ σ -algebra. Másrészt ξ valószínűségi változó, azaz $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, így $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$. $\square$

8.56. Tétel. Legyen ξ valószínűségi változó és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. Ekkor $g(\xi)$ is valószínűségi változó, továbbá $\sigma(g(\xi)) \subset \sigma(\xi)$.

Bizonyítás. A 4.14. tétel miatt $g(\xi)$ valószínűségi változó. Másrészt $A \in \sigma(g(\xi))$ esetén létezik $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $A = (g \circ \xi)^{-1}(B) = \xi^{-1}(g^{-1}(B)) \in \sigma(\xi)$, hiszen $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \sigma(g(\xi)) \subset \sigma(\xi)$. $\square$

8.57. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. A $\xi_1, \dots, \xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változókat *függetleneknek* nevezzük, ha

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \quad \forall A_i \in \sigma(\xi_i) \ (i = 1, \dots, n).$$

8.58. Tétel. Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, akkor bármely részrendszere is független.

Bizonyítás. Legyen $A_i \in \sigma(\xi_i)$ $i = 1, \dots, n-1$ és $A_n := \Omega$. Ekkor $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = P(A_1) \cdots P(A_{n-1}) \implies \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ függetlenek. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ más részrendszerére is hasonlóan bizonyíthatunk. $\square$

8.59. Definíció. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók *páronként függetlenek*, ha közülük bármely kettő független. Végtelen sok valószínűségi változó akkor független illetve páronként független, ha bármely véges részrendszere független illetve páronként független.

8.60. Tétel. Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények, akkor a $g_1(\xi_1), \dots, g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.

Bizonyítás. A tétel abból következik, hogy $\sigma(g_i(\xi_i)) \subset \sigma(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, n$). $\square$

8.61. Tétel. Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\xi_1} \times \dots \times Q_{\xi_n}$.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Legyen $T = T_1 \times \cdots \times T_n \in \mathcal{T}$, ahol $\mathcal{T}$ ugyanaz, mint a 8.45. tétel bizonyításában. Ekkor $Q_{\vec{\xi}}(T) = P(\vec{\xi} \in T) = P(\xi_1^{-1}(T_1) \cap \cdots \cap \xi_n^{-1}(T_n)) = P(\xi_1^{-1}(T_1)) \cdots P(\xi_n^{-1}(T_n)) = Q_{\xi_1}(T_1) \cdots Q_{\xi_n}(T_n) = (Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n})(T)$. Tehát $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n}$ a $\mathcal{T}$ félgyűrűn. Így a 2.47. tétel miatt $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n}$ a $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazon is.

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $A_i \in \sigma(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, n$), azaz létezik $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $A_i = \xi_i^{-1}(B_i)$. Ekkor $P(A_1) \cdots P(A_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n) = Q_{\xi_1}(B_1) \cdots Q_{\xi_n}(B_n) = (Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n})(B_1 \times \cdots \times B_n) = Q_{\vec{\xi}}(B_1 \times \cdots \times B_n) = P(\vec{\xi} \in B_1 \times \cdots \times B_n) = P(\{\xi_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{\xi_n \in B_n\}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek. $\square$

8.62. Tétel. Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” A függetlenség és a 6.10. tétel szerint

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) &= Q_{\vec{\xi}}((-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)) = \\ &= Q_{\xi_1}((-\infty, x_1)) \cdots Q_{\xi_n}((-\infty, x_n)) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n). \end{aligned}$$

► „ $\Leftarrow$ ” Az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n})$ valószínűségi mező, így a 8.34. tétel szerint létezik $\vec{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó, melynek $Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n}$ az eloszlása. Ekkor $F_{\vec{\eta}}(x_1, \dots, x_n) = Q_{\xi_1}((-\infty, x_1)) \cdots Q_{\xi_n}((-\infty, x_n)) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n) = F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$ 8.45. tétel szerint $Q_{\vec{\xi}} = Q_{\vec{\eta}} = Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n} \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek. $\square$

8.63. Példa. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $n \in \mathbb{N}$ és $H_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(H_i) \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, \dots, n$). Ha ξ_i egyenletes eloszlású a H_i halmazon $\forall i = 1, \dots, n$ esetén, akkor $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ egyenletes eloszlású a $H := H_1 \times \cdots \times H_n$ halmazon.

Bizonyítás. A 8.62. tétel és a 8.20. példa miatt $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n F_{\xi_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda((-\infty, x_i) \cap H_i)}{\lambda(H_i)} = \\ &= \frac{1}{\lambda^n(H_1 \times \cdots \times H_n)} \lambda^n(((-\infty, x_1) \cap H_1) \times \cdots \times ((-\infty, x_n) \cap H_n)) = \\ &= \frac{1}{\lambda^n(H)} \lambda^n(((-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)) \cap H). \end{aligned}$$

Ebből a 8.46. példa alapján következik az állítás. $\square$

8.64. Példa. A 8.63. példa alkalmazásaként kiszámoljuk annak a valószínűségét, hogy $\xi\eta$ kisebb $\frac{1}{2}$ -nél, ha ξ és η független, az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor (ξ, η) a 8.63. példa alapján egyenletes eloszlású a $H := [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ halmazon. Így

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < \frac{1}{2} \right\}$$

jelöléssel

$$\begin{aligned} P\left(\xi\eta < \frac{1}{2}\right) &= Q_{(\xi, \eta)}(A) = \frac{\lambda^2(A \cap H)}{\lambda^2(H)} = 4\lambda^2(A \cap H) = \\ &= 4 \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

8.65. Tétel. Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ **diszkrét valószínűségi vektorváltozó**, azaz az értékkészlete megszámlálható számosságú. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right) = P(\xi_1 = x_1) \cdots P(\xi_n = x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in R_{\vec{\xi}}.$$

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” $P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right) = P(\vec{\xi} \in \{x_1\} \times \cdots \times \{x_n\}) = Q_{\vec{\xi}}(\{x_1\} \times \cdots \times \{x_n\}) = Q_{\xi_1}(\{x_1\}) \cdots Q_{\xi_n}(\{x_n\}) = P(\xi_1 = x_1) \cdots P(\xi_n = x_n).$

► „ $\Leftarrow$ ” Legyen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ és $A_i := R_{\xi_i} \cap (-\infty, a_i)$. Ekkor

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(a_1, \dots, a_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < a_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{x_i \in A_i} \{\xi_i = x_i\}\right) = \\ &= P\left(\bigcup_{j=1}^n \bigcup_{x_j \in A_j} \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{x_j \in A_j} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{x_j \in A_j} P(\xi_1 = x_1) \cdots P(\xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \sum_{x_i \in A_i} P(\xi_i = x_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n P(\xi_i < a_i) = F_{\xi_1}(a_1) \cdots F_{\xi_n}(a_n), \end{aligned}$$

így a 8.62. tétel alapján $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek. □

8.66. Tétel. Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ **abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó**. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha $f_{\vec{\xi}} = f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n}$ $\lambda \times \cdots \times \lambda$ -m.m.

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Legyen $Q(B) := \int_B f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n} d\lambda^n \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a 8.54. tétel miatt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Q)$ valószínűségi mező. Tekintsük a 8.45. tétel bizonyításában szereplő $\mathcal{T}$ halmazt, és legyen $T = T_1 \times \cdots \times T_n \in \mathcal{T}$. Ekkor a függetlenség és a Fubini-tétel miatt $Q_{\xi}(T) = Q_{\xi_1}(T_1) \cdots Q_{\xi_n}(T_n) = \int_{T_1} f_{\xi_1} d\lambda \cdots \int_{T_n} f_{\xi_n} d\lambda = \int_T f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n} d\lambda^n = Q(T) \Rightarrow$ 2.47. tételből $Q_{\xi} = Q \Rightarrow$ 8.48. tétel és a Radon–Nikodym-tétel miatt $f_{\xi} = f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n} \lambda \times \cdots \times \lambda$ -m.m.

► „ $\Leftarrow$ ” $F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \int_{(-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)} f_{\xi} d\lambda^n = \int_{(-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n)} f_{\xi_1} \cdots f_{\xi_n} d\lambda^n = \int_{(-\infty, x_1)} f_{\xi_1} d\lambda \cdots \int_{(-\infty, x_n)} f_{\xi_n} d\lambda = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n) \Rightarrow$ 8.62. tétel miatt $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek. $\square$

8.67. Tétel. *Legyenek $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ valószínűségi mezők, $\xi_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor létezik $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\eta_1, \eta_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ független valószínűségi változók, hogy $Q_{\eta_1} = Q_{\xi_1}$ és $Q_{\eta_2} = Q_{\xi_2}$.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ azon független kísérletek valószínűségi mezője, mely az $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ valószínűségi mezőkből jön létre, $\eta_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta_1(\omega_1, \omega_2) = \xi_1(\omega_1)$ és $\eta_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta_2(\omega_1, \omega_2) = \xi_2(\omega_2)$.

Ekkor $F_{\eta_1}(x) = P(\eta_1 < x) = P(\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \xi_1(\omega_1) < x\}) = P(\{\xi_1 < x\} \times \Omega_2) = P_1(\xi_1 < x) P_2(\Omega_2) = P_1(\xi_1 < x) = F_{\xi_1}(x) \Rightarrow Q_{\eta_1} = Q_{\xi_1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $Q_{\eta_2} = Q_{\xi_2}$.

$F_{(\eta_1, \eta_2)}(x_1, x_2) = P(\{\eta_1 < x_1\} \cap \{\eta_2 < x_2\}) = P(\{\xi_1 < x_1\} \times \{\xi_2 < x_2\}) = P_1(\xi_1 < x_1) P_2(\xi_2 < x_2) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) = F_{\eta_1}(x_1) F_{\eta_2}(x_2) \Rightarrow \eta_1, \eta_2$ függetlenek. $\square$

8.68. Tétel. *Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor*

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int F_{\xi}(x-v) dQ_{\eta}(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített és $A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v < x\}$. Ekkor $F_{\xi+\eta}(x) = P(\xi + \eta < x) = P((\xi, \eta) \in A) = \int \chi_A dQ_{(\xi, \eta)} \underset{\uparrow}{=} \int \chi_A d(Q_{\xi} \times Q_{\eta}) \underset{\uparrow}{=} \int \int \chi_A dQ_{\xi} dQ_{\eta} \underset{\text{függetlenség}}{=} \int \int \chi_A dQ_{\xi}(u) dQ_{\eta}(v) \underset{\text{Fubini}}{=} \int F_{\xi}(x-v) dQ_{\eta}(v).$ $\square$

8.69. Tétel. *Ha ξ és η független valószínűségi változók, továbbá ξ abszolút folytonos, akkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos és*

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int f_{\xi}(x-v) dQ_{\eta}(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ha még η is abszolút folytonos, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int f_{\xi}(x-v) f_{\eta}(v) d\lambda(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. A 8.24. és 5.61. tételek miatt

$$\begin{aligned} F_\xi(z-v) &= \int_{(-\infty, z-v)} f_\xi(x) d\lambda(x) = \int f_\xi(x) \chi_{(-\infty, z-v)}(x) d\lambda(x) = \\ &= \int f_\xi(x-v) \chi_{(-\infty, z-v)}(x-v) d\lambda(x) = \int f_\xi(x-v) \chi_{(-\infty, z)}(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Így a 8.68. és a Fubini-tétel miatt

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(z) &= \int F_\xi(z-v) dQ_\eta(v) = \int \int f_\xi(x-v) \chi_{(-\infty, z)}(x) d\lambda(x) dQ_\eta(v) = \\ &= \int \int f_\xi(x-v) \chi_{(-\infty, z)}(x) dQ_\eta(v) d\lambda(x) = \\ &= \int \chi_{(-\infty, z)}(x) \int f_\xi(x-v) dQ_\eta(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty, z)} \int f_\xi(x-v) dQ_\eta(v) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Ebből a 8.24. tétel miatt kapjuk az állítást. A Fubini-tételt azért használhattuk, mert a $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, v) := f_\xi(x-v) \chi_{(-\infty, z)}(x)$ függvény nemnegatív és Borel-mérhető, így $\lambda \times Q_\eta$ -szerint létezik az integrálja.

Ha η is abszolút folytonos, akkor a 7.9. tételből $f_{\xi+\eta}(x) = \int f_\xi(x-v) dQ_\eta(v) = \int f_\xi(x-v) \frac{dQ_\eta}{d\lambda'}(v) d\lambda'(v) = \int f_\xi(x-v) f_\eta(v) d\lambda'(v) = \int f_\xi(x-v) f_\eta(v) d\lambda(v)$, ahol λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése. $\square$

8.70. Példa. Ha ξ és η független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor $f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Az előző tételből, $t := \sqrt{2}(v - \frac{x}{2})$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-v) \varphi(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-v)^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v-\frac{x}{2})^2} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \quad \square$$

8.71. Tétel. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(x) &= \int_{(0, \infty)} F_\xi\left(\frac{x}{v}\right) dQ_\eta(v) + \\ &+ \int_{(-\infty, 0)} \left(1 - F_\xi\left(\frac{x}{v}\right) - P\left(\xi = \frac{x}{v}\right)\right) dQ_\eta(v) + \chi_{\mathbb{R}_+}(x) P(\eta = 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : uv < x\}$, $A_x := \mathbb{R}$ ha $x > 0$ és $A_x := \emptyset$, ha $x \leq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 F_{\xi\eta}(x) &= P(\xi\eta < x) = P((\xi, \eta) \in A) = \int \chi_A dQ_{(\xi, \eta)} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{függetlenség}}}{=} \\
 &= \int \chi_A d(Q_\xi \times Q_\eta) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \iint \chi_A dQ_\xi dQ_\eta = \\
 &= \int_{(0, \infty)} \int \chi_A dQ_\xi dQ_\eta + \int_{(-\infty, 0)} \int \chi_A dQ_\xi dQ_\eta + \int_{\{0\}} \int \chi_A dQ_\xi dQ_\eta = \\
 &= \int_{(0, \infty)} \int_{(-\infty, \frac{x}{v})} dQ_\xi(u) dQ_\eta(v) + \int_{(-\infty, 0)} \int_{(\frac{x}{v}, \infty)} dQ_\xi(u) dQ_\eta(v) + \int_{\{0\}} \int_{A_x} dQ_\xi(u) dQ_\eta(v) = \\
 &= \int_{(0, \infty)} P\left(\xi < \frac{x}{v}\right) dQ_\eta(v) + \int_{(-\infty, 0)} P\left(\xi > \frac{x}{v}\right) dQ_\eta(v) + \int_{A_x} dQ_\xi P(\eta = 0) = \\
 &= \int_{(0, \infty)} F_\xi\left(\frac{x}{v}\right) dQ_\eta(v) + \int_{(-\infty, 0)} \left(1 - F_\xi\left(\frac{x}{v}\right) - P\left(\xi = \frac{x}{v}\right)\right) dQ_\eta(v) + \chi_{\mathbb{R}_+}(x) P(\eta = 0). \square
 \end{aligned}$$

8.72. Tétel. *Ha ξ és η független valószínűségi változók, ξ abszolút folytonos és $\eta \neq 0$ m.b., akkor $\xi\eta$ is abszolút folytonos és*

$$f_{\xi\eta}(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_\xi\left(\frac{x}{v}\right) dQ_\eta(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ha még η is abszolút folytonos, akkor

$$f_{\xi\eta}(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_\xi\left(\frac{x}{v}\right) f_\eta(v) d\lambda(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{R}$. Ekkor a feltételek miatt $P\left(\xi = \frac{z}{v}\right) = 0$ minden $v \neq 0$ esetén és $P(\eta = 0) = 0$. Így az előző tétel szerint

$$F_{\xi\eta}(z) = \int_{(0, \infty)} F_\xi\left(\frac{z}{v}\right) dQ_\eta(v) + \int_{(-\infty, 0)} dQ_\eta(v) - \int_{(-\infty, 0)} F_\xi\left(\frac{z}{v}\right) dQ_\eta(v). \quad (8.6)$$

A 8.22. tétel szerint $\int f_\xi d\lambda = Q_\xi(\mathbb{R}) = 1$, így használva az 5.61. tételt, kapjuk, hogy

$$\int_{(-\infty, 0)} dQ_\eta(v) = \int_{(-\infty, 0)} \int f_\xi(u) d\lambda(u) dQ_\eta(v) = \int_{(-\infty, 0)} \int \frac{1}{|v|} f_\xi\left(\frac{x}{v}\right) d\lambda(x) dQ_\eta(v), \quad (8.7)$$

illetve

$$F_\xi\left(\frac{z}{v}\right) = \int_{(-\infty, \frac{z}{v})} f_\xi d\lambda = \int f_\xi \chi_{(-\infty, \frac{z}{v})} d\lambda = \int \frac{1}{|v|} f_\xi\left(\frac{x}{v}\right) \chi_{(-\infty, \frac{z}{v})}\left(\frac{x}{v}\right) d\lambda(x) =$$

$$= \begin{cases} \int \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) \chi_{(-\infty, z)}(x) d\lambda(x) = \int_{(-\infty, z)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) d\lambda(x), & \text{ha } v > 0, \\ \int \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) \chi_{(z, \infty)}(x) d\lambda(x) = \int_{(z, \infty)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) d\lambda(x), & \text{ha } v < 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

A (8.6), (8.7) és (8.8) képleteket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(z) &= \int_{(0, \infty)} \int_{(-\infty, z)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty, 0)} \int \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) - \\ &\quad - \int_{(-\infty, 0)} \int_{(z, \infty)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) = (\text{Fubini-tétel szerint}) \\ &= \int_{(-\infty, z)} \int_{(0, \infty)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty, 0)} \int \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) - \\ &\quad - \int_{(z, \infty)} \int_{(-\infty, 0)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty, z)} \int_{(0, \infty)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty, z]} \int_{(-\infty, 0)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty, z)} \int_{(0, \infty)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty, z)} \int_{(-\infty, 0)} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty, z)} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Így a 8.24. tétel miatt $\xi\eta$ abszolút folytonos és $f_{\xi\eta}(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) dQ_{\eta}(v)$.

Ha még η is abszolút folytonos, akkor $f_{\xi\eta}(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) \frac{dQ_{\eta}}{d\lambda'}(v) d\lambda'(v) =$
 $= \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|v|} f_{\xi} \left(\frac{x}{v} \right) f_{\eta}(v) d\lambda(v)$, ahol λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése. $\square$

Az előző tétel alkalmazásaként megmutatjuk, hogyan lehet előállítani egyenletes eloszlásból standard normális eloszlást.

8.73. Példa (Box–Muller-transzformáció). Legyenek a ξ és η valószínűségi változók függetlenek és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak. Ekkor $\sqrt{-2 \ln \xi} \cos(2\pi\eta)$ standard normális eloszlású.

Bizonyítás. Ha $x > 0$, akkor $P(\sqrt{-2 \ln \xi} < x) = P\left(\xi > e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$, illetve ha $x \leq 0$, akkor $P(\sqrt{-2 \ln \xi} < x) = 0$. Így $\sqrt{-2 \ln \xi}$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = x e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ha $-1 < x \leq 1$, akkor

$$P(\cos(2\pi\eta) < x) = P\left(\frac{1}{2\pi} \arccos x < \eta < 1 - \frac{1}{2\pi} \arccos x\right) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x.$$

$P(\cos(2\pi\eta) < x) = 1$, ha $x > 1$, illetve $P(\cos(2\pi\eta) < x) = 0$, ha $x \leq -1$. Így $\cos(2\pi\eta)$ sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos x\right)' = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha } -1 < x \leq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Így $\sqrt{-2 \ln \xi} \cos(2\pi\eta)$ sűrűségfüggvénye tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyen

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f(v) g\left(\frac{x}{v}\right) dv = \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} g\left(\frac{x}{v}\right) dv = \\ &= \int_{|x|}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{v}\right)^2}} dv = \frac{1}{\pi} \int_{|x|}^{\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{v^2 - x^2}} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{|x|}^{\infty} v e^{-\frac{v^2 - x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{v^2 - x^2}} dv = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Az integrálásban $t = \sqrt{v^2 - x^2}$ helyettesítést alkalmaztunk. □

8.74. Tétel. Ha ξ, η független valószínűségi változók és $\eta \neq 0$ m.b., akkor

$$F_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int_{(0,\infty)} F_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} \left(1 - F_{\xi}(xv) - P(\xi = xv)\right) dQ_{\eta}(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Ahol $\frac{\xi}{\eta}$ nem értelmezett, ami 0 valószínűségű, ott az értéke legyen 0.)

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq 0, \frac{u}{v} < x\}$. Ekkor $P(\{\eta = 0\} \cap \{\frac{\xi}{\eta} < x\}) \leq P(\eta = 0) = 0 \implies P(\{\eta = 0\} \cap \{\frac{\xi}{\eta} < x\}) = 0 \implies$

$$\begin{aligned} F_{\frac{\xi}{\eta}}(x) &= P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = P\left(\{\eta = 0\} \cap \{\frac{\xi}{\eta} < x\}\right) + P\left(\{\eta \neq 0\} \cap \{\frac{\xi}{\eta} < x\}\right) = \\ &= P((\xi, \eta) \in A) = \int \chi_A dQ_{(\xi, \eta)} \stackrel{\text{függetlenség}}{=} \int \chi_A d(Q_{\xi} \times Q_{\eta}) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \iint \chi_A dQ_{\xi} dQ_{\eta} = \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{(-\infty, xv)} dQ_{\xi}(u) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} \int_{(xv, \infty)} dQ_{\xi}(u) dQ_{\eta}(v) + \int_{\{0\} \setminus \emptyset} \int dQ_{\xi}(u) dQ_{\eta}(v) = \\ &= \int_{(0,\infty)} P(\xi < xv) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} P(\xi > xv) dQ_{\eta}(v) = \\ &= \int_{(0,\infty)} F_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} \left(1 - F_{\xi}(xv) - P(\xi = xv)\right) dQ_{\eta}(v). \end{aligned} \quad \square$$

8.75. Tétel. *Ha ξ és η független valószínűségi változók, ξ abszolút folytonos és $\eta \neq 0$ m.b., akkor $\frac{\xi}{\eta}$ is abszolút folytonos és*

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ha még η is abszolút folytonos, akkor

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int |v| f_{\xi}(xv) f_{\eta}(v) d\lambda(v) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{R}$. Ekkor a feltételek miatt $P(\xi = zv) = 0$ minden $v \in \mathbb{R}$ esetén. Így az előző tétel szerint

$$F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int_{(0,\infty)} F_{\xi}(zv) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} dQ_{\eta}(v) - \int_{(-\infty,0)} F_{\xi}(zv) dQ_{\eta}(v). \quad (8.9)$$

A 8.22. tétel szerint $\int f_{\xi} d\lambda = Q_{\xi}(\mathbb{R}) = 1$, így használva az 5.61. tételt, kapjuk, hogy

$$\int_{(-\infty,0)} dQ_{\eta}(v) = \int_{(-\infty,0)} \int f_{\xi}(u) d\lambda(u) dQ_{\eta}(v) = \int_{(-\infty,0)} \int |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v), \quad (8.10)$$

illetve

$$\begin{aligned} F_{\xi}(zv) &= \int_{(-\infty,zv)} f_{\xi} d\lambda = \int f_{\xi} \chi_{(-\infty,zv)} d\lambda = \int |v| f_{\xi}(xv) \chi_{(-\infty,zv)}(xv) d\lambda(x) = \\ &= \begin{cases} \int |v| f_{\xi}(xv) \chi_{(-\infty,z)}(x) d\lambda(x) = \int_{(-\infty,z)} |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x), & \text{ha } v > 0, \\ \int |v| f_{\xi}(xv) \chi_{(z,\infty)}(x) d\lambda(x) = \int_{(z,\infty)} |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x), & \text{ha } v < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.11)$$

A (8.9), (8.10) és (8.11) képleteket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(-\infty,z)} |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) + \int_{(-\infty,0)} \int |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) - \\ &\quad - \int_{(-\infty,0)} \int_{(z,\infty)} |v| f_{\xi}(xv) d\lambda(x) dQ_{\eta}(v) = (\text{Fubini-tétel szerint}) \\ &= \int_{(-\infty,z)} \int_{(0,\infty)} |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty,0)} \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) - \\ &\quad - \int_{(z,\infty)} \int_{(-\infty,0)} |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty,z)} \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty,z]} \int_{(-\infty,0)} |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \\ &= \int_{(-\infty,z)} \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) + \int_{(-\infty,z)} \int_{(-\infty,0]} |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x) = \end{aligned}$$

$$= \int_{(-\infty, z)} \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v) d\lambda(x).$$

Így a 8.24. tétel miatt $\frac{\xi}{\eta}$ abszolút folytonos és $f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int |v| f_{\xi}(xv) dQ_{\eta}(v)$. Ha η is abszolút folytonos, akkor $f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int |v| f_{\xi}(xv) \frac{dQ_{\eta}}{d\lambda'}(v) d\lambda'(v) = \int |v| f_{\xi}(xv) f_{\eta}(v) d\lambda(v)$, ahol λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése. $\square$

8.76. Példa. Ha ξ és η független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor $\frac{\xi}{\eta}$ Cauchy-eloszlású.

Bizonyítás. Az előző tétel miatt

$$\begin{aligned} f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |v| \varphi(xv) \varphi(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v| e^{-\frac{1+x^2}{2}v^2} dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v e^{-\frac{1+x^2}{2}v^2} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1+x^2} e^{-\frac{1+x^2}{2}v^2} \right]_0^t = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \end{aligned} \quad \square$$

8.5. Várható érték

8.77. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ -nek *létezik várható értéke*, ha ξ -nek létezik integrálja P -szerint. Ekkor az

$$E\xi := \int \xi dP$$

értéket a ξ *várható értékének* nevezzük. Ha ξ integrálható P -szerint (azaz létezik integrálja és az véges), akkor azt mondjuk, hogy ξ -nek *létezik véges várható értéke*.

A következő tétel az integrál korábban már bizonyított tulajdonságainak átfoglal-mazásai várható értékre.

8.78. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi, \eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók.

- ① $E\xi^+$ és $E\xi^-$ mindig létezik.
- ② Pontosan akkor $\exists E\xi$, ha $E\xi^+ \in \mathbb{R}$ vagy $E\xi^- \in \mathbb{R}$, és ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$.
- ③ Pontosan akkor létezik ξ -nek véges várható értéke, ha $E\xi^+ \in \mathbb{R}$ és $E\xi^- \in \mathbb{R}$.
- ④ Ha $\exists E\xi$ és $\xi = \eta$ m.b., akkor $\exists E\eta$ és $E\xi = E\eta$.
- ⑤ Pontosan akkor létezik ξ -nek véges várható értéke, ha $|\xi|$ -nek létezik véges várható értéke, és ekkor $|E\xi| \leq E|\xi|$.
- ⑥ Ha $\exists E\xi$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\exists E(c\xi)$ és $E(c\xi) = cE\xi$.
- ⑦ Ha $E\xi + E\eta$ létezik, akkor $\exists E(\xi + \eta)$ és $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
- ⑧ Ha $\xi \leq \eta$ m.b. és $\exists E\xi > -\infty$ (vagy $\exists E\eta < \infty$), akkor $\exists E\xi$ és $\exists E\eta$, továbbá $E\xi \leq E\eta$.
- ⑨ Ha $|\xi| \leq \eta$ m.b. és η -nak létezik véges várható értéke, akkor ξ -nek is létezik véges várható értéke.
- ⑩ Ha $c \in \mathbb{R}$ és $\xi = c$ m.b., akkor ξ -nek létezik véges várható értéke és $E\xi = c$.

Bizonyítás. Az ①–③ a mérhető függvények integráljának definíciójából következik. A ④–⑨ az 5.21. tételből következik. A ⑩ bizonyításához legyen $A := \{\xi = c\}$. Ekkor $P(A) = 1$ és $P(\bar{A}) = 0$. Így $E\xi = \int \xi dP = \int_A \xi dP + \int_{\bar{A}} \xi dP = \int_A \xi dP = \int_A c dP = c \int \chi_A dP = cP(A) = c$. $\square$

A következő három tétel szintén az integrál korábban már bizonyított tulajdonságainak átfogalmazásai várható értékre.

8.79. Tétel (Fatou-lemma). *Ha $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív értékű valószínűségi változók $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, akkor $\liminf E\xi_n \geq E(\liminf \xi_n)$.*

8.80. Tétel (Monoton konvergencia tétel). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív értékű valószínűségi változók $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. Ha $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n\right)$.*

8.81. Tétel (Majorált konvergencia tétel). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\eta, \xi, \xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változók. Ha η -nak létezik véges várható értéke, $|\xi_n| \leq \eta$ m.b. $\forall n \in \mathbb{N}$ -re és $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ m.b., akkor ξ -nek és ξ_n -nek is létezik véges várható értéke $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = E\xi$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi| = 0$.*

8.82. Tétel. *Nemnegatív ξ valószínűségi változónak pontosan akkor létezik véges várható értéke, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Legyen $A_k := \{k \leq \xi < k+1\}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{„}\Rightarrow\text{”} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} k dP \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} \xi dP = \int \xi dP = E\xi \implies \text{állítás.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{„}\Leftarrow\text{”} \quad E\xi &= \int \xi dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} \xi dP \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} (k+1) dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} k dP + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} 1 dP = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + \int_{\Omega} 1 dP = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + 1 \implies \text{állítás.} \quad \square \end{aligned}$$

8.83. Megjegyzés. Az előző bizonyításból kiderül, hogy nemnegatív ξ valószínűségi változó esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) \leq E\xi \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) + 1.$$

8.84. Tétel. *Ha ξ^2 -nek és η^2 -nek létezik véges várható értéke, akkor ξ -nek, η -nak és $\xi\eta$ -nak is létezik véges várható értéke.*

Bizonyítás. Ekkor $\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ -nek létezik véges várható értéke, továbbá $|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$, amiből következik, hogy $\xi\eta$ -nak létezik véges várható értéke. Ha speciálisan $\eta = 1$ m.b., akkor ez azt jelenti, hogy ξ -nek létezik véges várható értéke. (Hasonlóan η -ra.) $\square$

8.85. Definíció. Legyen ξ véges várható értékű valószínűségi változó. Ekkor a

$$D^2 \xi := E(\xi - E\xi)^2$$

értéket ξ *szórásnégyzetének* nevezzük. A $D\xi = \sqrt{E(\xi - E\xi)^2}$ értéket ξ *szórásának* nevezzük.

Ha ξ véges várható értékű, akkor $(\xi - E\xi)^2$ nemnegatív valószínűségi változó, így várható értéke, azaz ξ szórása létezik.

8.86. Tétel. *Ha ξ véges várható értékű valószínűségi változó, akkor*

$$D^2 \xi = E\xi^2 - E^2 \xi.$$

Bizonyítás. Mivel $\xi^2 \geq 0$, ezért létezik várható értéke. Így $D^2 \xi = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + E^2 \xi) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E^2 \xi = E\xi^2 - E^2 \xi$. $\square$

8.87. Tétel. *A ξ valószínűségi változónak pontosan akkor létezik véges szórása, ha ξ^2 -nek létezik véges várható értéke.*

Bizonyítás. $\blacktriangleright$ „ $\Rightarrow$ ” Láttuk, hogy $D^2 \xi = E\xi^2 - E^2 \xi$, így, ha ez véges, akkor $E\xi^2$ is az.

$\blacktriangleright$ „ $\Leftarrow$ ” Ha ξ^2 -nek létezik véges várható értéke, akkor ξ -nek is, így létezik szórás, továbbá $D^2 \xi = E\xi^2 - E^2 \xi$ miatt ez véges. $\square$

8.88. Tétel (Markov-egyenlőtlenség). *Ha ξ valószínűségi változó, $\xi \geq 0$ m.b. és $0 \leq c < \infty$, akkor $E\xi \geq c P(\xi \geq c)$.*

Bizonyítás. $\xi^- = 0$ m.b. $\implies$ 5.6. tétel ⑤ pontjából $E\xi^- = 0 \implies$ 5.6. tétel ③ pontjából $E\xi = E\xi^+ - E\xi^- = E\xi^+ \geq c P(\xi^+ \geq c) = c P(\xi \geq c)$. $\square$

8.89. Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Ha ξ véges várható értékű valószínűségi változó és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, akkor $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2 \xi}{\varepsilon^2}$.*

Bizonyítás. Legyen $c := \varepsilon^2$ és $\eta := (\xi - E\xi)^2$. Ekkor c -re és η -ra teljesülnek a Markov-egyenlőtlenség feltételei, így $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(\eta \geq c) \leq \frac{E\eta}{c} = \frac{D^2 \xi}{\varepsilon^2}$. $\square$

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy hogyan lehet kiszámolni különböző esetekben a várható értéket.

8.90. Tétel. *Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor*

$$E|\xi| = \int_{(0,\infty)} (1 - F_{|\xi|}) \, d\lambda = \int_0^\infty P(|\xi| \geq x) \, dx = \int_0^\infty P(|\xi| > x) \, dx.$$

Bizonyítás. $|\xi(\omega)| = \int \chi_{(0,|\xi(\omega)|]} d\lambda \quad \forall \omega \in \Omega \implies E|\xi| = \int \int \chi_{(0,|\xi|]} d\lambda dP \stackrel{\text{Fubini-tétel}}{=} \\ = \int \int \chi_{(0,|\xi|]} dP d\lambda = \int E\chi_{(0,|\xi|]} d\lambda.$ Másrészt

$$\chi_{(0,|\xi(\omega)|]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x \leq |\xi(\omega)|, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } |\xi(\omega)| < x, \end{cases}$$

így $E\chi_{(0,|\xi|]}(x) = P(x \leq |\xi|) = 1 - F_{|\xi|}(x)$, ha $x > 0$ és $E\chi_{(0,|\xi|]}(x) = 0$, ha $x \leq 0$. Mindezekből kapjuk, hogy

$$E|\xi| = \int_{(0,\infty)} (1 - F_{|\xi|}) d\lambda.$$

Mivel $1 - F_{|\xi|}$ monoton függvény, ezért a szakadási helyeinek halmaza megszámlálható. Ebből következően $1 - F_{|\xi|}$ Riemann-integrálható és $1 - F_{|\xi|}(x) = P(|\xi| \geq x) = P(|\xi| > x)$ λ -m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből következik az állítás. $\square$

8.91. Tétel. *Legyen ξ valószínűségi változó és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. Ekkor $g(\xi)$ valószínűségi változó, továbbá $g(\xi)$ -nek pontosan akkor létezik várható értéke, ha $\int g dQ_\xi$ létezik. Ekkor $Eg(\xi) = \int g dQ_\xi$.*

Bizonyítás. A 4.14. tétel miatt $g(\xi)$ valószínűségi változó.

► Legyen g egyszerű Borel-mérhető függvény, melynek értékkészlete $\{c_1, \dots, c_n\}$. Ekkor $B_i := \{x \in \mathbb{R} : g(x) = c_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, n$) és $g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{B_i} \implies$

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i P(g(\xi) = c_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(\xi \in B_i) = \sum_{i=1}^n c_i Q_\xi(B_i) = \sum_{i=1}^n c_i \int \chi_{B_i} dQ_\xi = \\ = \int \sum_{i=1}^n c_i \chi_{B_i} dQ_\xi = \int g dQ_\xi. \text{ Tehát egyszerű Borel-mérhető } g\text{-re teljesül a tétel.}$$

► Most legyen g nemnegatív Borel-mérhető függvény. Ekkor az approximációs tétel miatt léteznek olyan nemnegatív valós értékű Borel-mérhető egyszerű g_n függvények, melyekre $g_1 \leq g_2 \leq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ teljesül. Így az előző pont és Beppo Levi monoton konvergencia tétele miatt $\int g dQ_\xi = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n dQ_\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dQ_\xi = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} E g_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(\xi) dP = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi) dP = \int g(\xi) dP = E g(\xi).$ Tehát nemnegatív Borel-mérhető g függvényre is teljesül az állítás.

► Ha g tetszőleges Borel-mérhető függvény, akkor az előző pont miatt $Eg(\xi) = E(g(\xi))^+ - E(g(\xi))^- = E g^+(\xi) - E g^-(\xi) = \int g^+ dQ_\xi - \int g^- dQ_\xi = \int (g^+ - g^-) dQ_\xi = \int g dQ_\xi$. Felhasználtuk, hogy $(g(\xi))^+ = g(\xi) \chi_{\{g(\xi) > 0\}} = g(\xi) \chi_{\{g > 0\}}(\xi) = (g \chi_{\{g > 0\}})(\xi) = g^+(\xi)$ és hasonlóan $(g(\xi))^- = g^-(\xi)$. $\square$

A következő tétel a 8.91. tételhez hasonlóan bizonyítható.

8.92. Tétel. *Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó és $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. Ekkor $g(\vec{\xi})$ valószínűségi változó, továbbá $g(\vec{\xi})$ -nek pontosan akkor létezik várható értéke, ha $\int g dQ_{\vec{\xi}}$ létezik. Ekkor $Eg(\vec{\xi}) = \int g dQ_{\vec{\xi}}$.*

8.93. Tétel. Legyen a ξ valószínűségi változó értékkészlete $\{x_i : i \in I\}$, ahol $I \subset \mathbb{N}$, és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény.

- ① $Eg(\xi) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(\xi = x_i)$. Az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal egyszerre létezik vagy nem létezik, és ha létezik, akkor egyenlőek.
- ② Pontosan akkor létezik $g(\xi)$ -nek véges várható értéke, ha $\sum_{i \in I} |g(x_i)| P(\xi = x_i) \in \mathbb{R}$.
- ③ Pontosan akkor nem létezik $g(\xi)$ -nek várható értéke, ha $\sum_{i \in I} g^+(x_i) P(\xi = x_i) = \infty$ és $\sum_{i \in I} g^-(x_i) P(\xi = x_i) = \infty$.

Bizonyítás. Legyen $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ számláló mérték. A 8.91., 7.9. és 8.31. tételekből $Eg(\xi) = \int g dQ_\xi = \int g \frac{dQ_\xi}{d\mu} d\mu = \int g(x) P(\xi = x) d\mu(x) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(\xi = x_i)$. Ezzel ① bizonyított. A ② és ③ abból következik, hogy ① miatt $Eg^+(\xi) = \sum_{i \in I} g^+(x_i) P(\xi = x_i)$ és $Eg^-(\xi) = \sum_{i \in I} g^-(x_i) P(\xi = x_i)$. $\square$

8.94. Tétel. Ha a ξ valószínűségi változó értékkészlete $\{x_1, \dots, x_n\}$, akkor ξ -nek létezik véges várható értéke, és $E\xi = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i)$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 8.93. tételt $I = \{1, \dots, n\}$ és $g(x) = x$ esetén. $\square$

8.95. Tétel. Legyen a ξ valószínűségi változó értékkészlete $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

- ① Ha ξ -nek létezik várható értéke, akkor $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$.
- ② Pontosan akkor létezik ξ -nek véges várható értéke, ha $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(\xi = x_i) \in \mathbb{R}$.
- ③ Pontosan akkor nem létezik ξ -nek várható értéke, ha $\sum_{i \in I^+} x_i P(\xi = x_i) = \infty$ és $\sum_{i \in I^-} x_i P(\xi = x_i) = -\infty$, ahol $I^+ = \{i \in \mathbb{N} : x_i \geq 0\}$ és $I^- = \{i \in \mathbb{N} : x_i < 0\}$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 8.93. tételt $I = \mathbb{N}$ és $g(x) = x$ esetén. $\square$

8.96. Tétel. Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény.

- ① $Eg(\xi) = \int g f_\xi d\lambda$. Az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal egyszerre létezik vagy nem létezik, és ha létezik, akkor egyenlőek.
- ② Pontosan akkor létezik $g(\xi)$ -nek véges várható értéke, ha $\int |g| f_\xi d\lambda \in \mathbb{R}$.
- ③ Pontosan akkor nem létezik $g(\xi)$ -nek várható értéke, ha $\int g^+ f_\xi d\lambda = \infty$ és $\int g^- f_\xi d\lambda = \infty$.
- ④ Ha létezik $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_\xi(x) dx \in \mathbb{R}$, akkor $g(\xi)$ -nek létezik véges várható értéke, és $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx$.

⑤ Ha $\int_{-\infty}^{\infty} g^+(x) f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^-(x) f_{\xi}(x) dx = \infty$, akkor $g(\xi)$ -nek nem létezik várható értéke.

Bizonyítás. ► Legyen λ' a λ -nak $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re vett leszűkítése. Ekkor a 8.91. és 7.9. tételekből $E g(\xi) = \int g dQ_{\xi} = \int g \frac{dQ_{\xi}}{d\lambda'} d\lambda' = \int g f_{\xi} d\lambda' = \int g f_{\xi} d\lambda \implies \textcircled{1}$.

► Az ① miatt $E g^+(\xi) = \int g^+ f_{\xi} d\lambda$ és $E g^-(\xi) = \int g^- f_{\xi} d\lambda \implies \textcircled{2}$ és ③.

► Ha ④ feltétele teljesül, akkor $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_{\xi}(x) dx = \int |g| f_{\xi} d\lambda \in \mathbb{R} \implies \textcircled{2}$ miatt $g(\xi)$ -nek létezik véges várható értéke, és ① miatt $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx = \int g f_{\xi} d\lambda = E g(\xi) \implies \textcircled{4}$.

► Ha ⑤ feltétele teljesül, akkor $\int g^+ f_{\xi} d\lambda = \int g^- f_{\xi} d\lambda = \infty$, így ③ miatt ⑤ igaz. $\square$

8.97. Tétel. Legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó.

① $E \xi = \int x f_{\xi}(x) d\lambda(x)$. Az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal egyszerre létezik vagy nem létezik, és ha létezik, akkor egyenlőek.

② Pontosán akkor létezik ξ -nek véges várható értéke, ha $\int |x| f_{\xi}(x) d\lambda(x) \in \mathbb{R}$.

③ Pontosán akkor nem létezik ξ -nek várható értéke, ha $\int_{[0, \infty)} x f_{\xi} d\lambda(x) = \infty$ és

$$\int_{(-\infty, 0]} x f_{\xi} d\lambda(x) = -\infty.$$

④ Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R}$, akkor ξ -nek létezik véges várható értéke, és $E \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$.

⑤ Ha $\int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \infty$ és $\int_{-\infty}^0 x f_{\xi}(x) dx = -\infty$, akkor ξ -nek nem létezik várható értéke.

Bizonyítás. A 8.96. tételt alkalmazzuk $g(x) := x$ választással. Itt ④-ben nem kell külön feltenni, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ létezik, mert $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^0 (-x) f_{\xi}(x) dx + \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R} \implies \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R}$ és $\int_{-\infty}^0 (-x) f_{\xi}(x) dx = - \int_{-\infty}^0 x f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R}$, azaz $\int_{-\infty}^0 x f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R} \implies \int_{-\infty}^0 x f_{\xi}(x) dx + \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \in \mathbb{R}$. $\square$

8.98. Példa. Cauchy-eloszlású valószínűségi változónak nem létezik várható értéke, ugyanis

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x f_{\xi}(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(1+x^2)]_0^n = \infty \quad \text{és} \\ \int_{-\infty}^0 x f_{\xi}(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(1+x^2)]_{-n}^0 = -\infty. \end{aligned}$$

8.99. Példa. Ha ξ standard normális eloszlású, akkor $E \xi = 0$ és $D \xi = 1$.

Bizonyítás. ► A ξ -nek létezik véges várható értéke, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Az integrálásban felhasználtuk, hogy $|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ páros. Így $x\varphi(x)$ páratlansága miatt $E \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = 0$.

► Legyen $f(x) := x$ és $g'(x) := x e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ekkor parciális integrálással

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^t - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x e^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1. \end{aligned}$$

Ezért $E \xi^2$ véges és értéke 1. Ebből $D^2 \xi = E \xi^2 - E^2 \xi = 1$. □

8.100. Tétel. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független véges várható értékű valószínűségi változók, akkor $\xi_1 \cdots \xi_n$ is véges várható értékű, továbbá $E \xi_1 \cdots \xi_n = E \xi_1 \cdots E \xi_n$.

Bizonyítás. Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) := x$ ($i = 1, \dots, n$), továbbá $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$. Ekkor $E \xi_1 \cdots E \xi_n = \int g_1 dQ_{\xi_1} \cdots \int g_n dQ_{\xi_n} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int g d(Q_{\xi_1} \times \cdots \times Q_{\xi_n}) \stackrel{\text{függetlenség}}{=} \int g dQ_{\vec{\xi}} \stackrel{\text{8.92. tétel}}{=} E g(\xi_1, \dots, \xi_n) \stackrel{\text{8.91. tétel}}{=} E \xi_1 \cdots E \xi_n$. □

8.101. Tétel. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ páronként független véges várható értékű valószínűségi változók, akkor $D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D^2 \xi_1 + \cdots + D^2 \xi_n$.

Bizonyítás. $D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = E(\xi_1 + \cdots + \xi_n)^2 - E^2(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = E\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j\right) - (E \xi_1 + \cdots + E \xi_n)^2 = E \xi_1^2 + \cdots + E \xi_n^2 + \sum_{i \neq j} E \xi_i \xi_j - E^2 \xi_1 - \cdots - E^2 \xi_n - \sum_{i \neq j} E \xi_i E \xi_j = D^2 \xi_1 + \cdots + D^2 \xi_n + \sum_{i \neq j} (E \xi_i \xi_j - E \xi_i E \xi_j) \implies$ 8.100. tételből kapjuk az állítást. □

8.6. Etemadi-féle nagy számok erős törvénye

8.102. Lemma (Borel–Cantelli-lemma). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \in \mathcal{F}$.*

① *Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$.*

② *Ha $A_1, A_2, \dots$ független események, továbbá teljesül, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, akkor $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$.*

Bizonyítás. ► $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \right) = 0 \implies \textcircled{1}.$$

► Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x}$ függvénynek $x = 0$ -ban az érintője az $y = 1 - x$ egyenes. Így az f konvexitása miatt

$$1 - x \leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8.12)$$

$$P\left(\overline{\bigcup_{k=n}^m A_k}\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^m P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^m e^{-P(A_k)} =$$

(8.12)

$$= \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right) \implies \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\overline{\bigcup_{k=n}^m A_k}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.13)$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \underset{\text{folyt.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \underset{(8.13)}{=} 1 \implies \textcircled{2}. \quad \square$$

8.103. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény pontosan akkor következik be, ha az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok bekövetkezik.

8.104. Lemma. *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor mind a $\xi_1^+, \xi_2^+, \dots$ mind a $\xi_1^-, \xi_2^-, \dots$ valószínűségi változók páronként függetlenek, azonos eloszlásúak és véges várható értékűek.*

Bizonyítás. Legyen $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

► Ha $x > 0$, akkor $P(\xi_i^+ < x) = P(\xi_i < x) = P(\xi_j < x) = P(\xi_j^+ < x)$. Ha $x \leq 0$, akkor $P(\xi_i^+ < x) = 0 = P(\xi_j^+ < x)$. $\implies \xi_i^+$ és ξ_j^+ azonos eloszlásúak. Hasonlóan kapjuk, hogy ξ_i^- és ξ_j^- is azonos eloszlásúak.

► Ha $x_i > 0$ és $x_j > 0$, akkor $P(\xi_i^+ < x_i, \xi_j^+ < x_j) = P(\xi_i < x_i, \xi_j < x_j) = P(\xi_i < x_i) P(\xi_j < x_j) = P(\xi_i^+ < x_i) P(\xi_j^+ < x_j)$. Ha $x_i \leq 0$ vagy $x_j \leq 0$, akkor $P(\xi_i^+ < x_i, \xi_j^+ < x_j) = 0 = P(\xi_i^+ < x_i) P(\xi_j^+ < x_j)$. $\implies \xi_i^+$ és ξ_j^+ függetlenek. Hasonlóan kapjuk, hogy ξ_i^- és ξ_j^- is függetlenek.

► A 8.78. tétel ③ pontja alapján ξ_i^+ és ξ_i^- véges várható értékűek. $\square$

8.105. Lemma (Toeplitz-lemma). Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = a$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > N_0$ esetén $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, másrészt $\exists K > 0$, hogy $|a_i - a| \leq K \ \forall i \in \mathbb{N}$. Legyen $n_0 := \max \left\{ N_0, \left\lceil \frac{2KN_0}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$, és $n > n_0$ egész. Ekkor $\left\lceil \frac{2KN_0}{\varepsilon} \right\rceil \leq n_0 < n \implies \frac{2KN_0}{\varepsilon} < n \implies$

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2KN_0}. \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a| \underset{N_0 \leq n_0 < n}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_0} \underbrace{|a_i - a|}_{\leq K} + \frac{1}{n} \sum_{i=N_0+1}^n \underbrace{|a_i - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \\ &< \frac{1}{n} N_0 K + \underbrace{\frac{1}{n} (n - N_0)}_{=1 - \frac{N_0}{n} < 1} \frac{\varepsilon}{2} \underset{(8.14)}{<} \frac{\varepsilon}{2KN_0} N_0 K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies \text{állítás.} \quad \square \end{aligned}$$

8.106. Lemma. Legyen $a_n, b_n, c_n, k_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$), a k_n sorozat monoton növekvő felülről nem korlátos, $a, c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{k_n} = c$, és $a_{k_n} \leq b_i \leq c_{k_n}$, ha $k_n < i \leq k_{n+1}$. Ekkor $a \leq \underline{\lim} b_n$ és $\overline{\lim} b_n \leq c$.

Bizonyítás. Az a_{k_n} és c_{k_n} sorozatok korlátosak. Legyen A az a_{k_n} sorozat alsó korlátja és C a c_{k_n} sorozat felső korlátja. Ha $i \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor létezik hozzá $n_i \in \mathbb{N}$, hogy $k_{n_i} < i \leq k_{n_i+1} \implies A \leq a_{k_{n_i}} \leq b_i \leq c_{k_{n_i}} \leq C \implies b_i$ korlátos sorozat $\implies \underline{\lim} b_n \in \mathbb{R}$ és $\overline{\lim} b_n \in \mathbb{R}$.

Legyen b_{l_n} a b_n olyan részsorozata, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{l_n} = \underline{\lim} b_n$. Legyen $H_n := \{i \in \mathbb{N} : k_n < l_i \leq k_{n+1}\}$. Ekkor H_n -nek létezik olyan H_{t_n} részsorozata, melyre $H_{t_n} \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$. Legyen $h_n := \min H_{t_n}$. Ekkor $k_{t_n} < l_{h_n} \leq k_{t_n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_{k_{t_n}} \leq b_{l_{h_n}} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_{t_n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_{l_{h_n}} = \underline{\lim} b_n$. A tétel másik állítása hasonlóan bizonyítható. $\square$

8.107. Tétel (Etemadi-féle nagy számok erős törvénye). Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = E \xi_1 \quad m.b.$$

Bizonyítás. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \eta_i := \xi_i \chi_{\{\xi_i \leq i\}}, \quad S_n^* := \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Először tegyük fel, hogy ξ_n nemnegatív minden n -re. Ekkor $f_n := \xi_1 \chi_{\{\xi_1 \leq n\}}$ jelöléssel $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \xi_1$. Így a monoton konvergencia tételből

$$E \xi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \xi_1 \chi_{\{\xi_1 \leq n\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \xi_n \chi_{\{\xi_n \leq n\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \eta_n. \quad (8.15)$$

Ebből és a Toeplitz-lemmából következően

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \eta_n = \mathbb{E} \xi_1. \quad (8.16)$$

Legyen $\alpha > 1$ és $k_n := [\alpha^n]$. Ekkor $\varepsilon > 0$ esetén a Csebisev-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon &:= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|S_{k_n}^* - \mathbb{E} S_{k_n}^*| \geq \varepsilon k_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2 S_{k_n}^*}{\varepsilon^2 k_n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} D^2 \eta_i \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E} \eta_i^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \eta_i^2 \sum_{k_n \geq i} \frac{1}{k_n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \eta_i^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k_{n_i+l}^2}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

ahol $n_i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $k_{n_i-1} < i \leq k_{n_i}$. Ha $x, y > 1$, akkor $\frac{x[y]}{[xy]} \leq \frac{xy}{[xy]} = \frac{[xy] + \{xy\}}{[xy]} = 1 + \frac{\{xy\}}{[xy]} \leq 2 \implies x[y] \leq 2[xy] \forall x, y > 1 \implies \alpha^l i \leq \alpha^l [\alpha^{n_i}] \leq 2[\alpha^l \alpha^{n_i}] = 2k_{n_i+l}$ ($l = 0, 1, \dots$) $\implies \frac{1}{k_{n_i+l}^2} \leq 4i^{-2} \alpha^{-2l}$ ($l = 0, 1, \dots$) $\implies$ (8.17) miatt

$$\Delta_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \eta_i^2 \sum_{l=0}^{\infty} 4i^{-2} \alpha^{-2l} = c \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathbb{E} \eta_i^2 = c \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathbb{E} (\xi_1^2 \chi_{\{\xi_1 \leq i\}}) \quad (8.18)$$

ahol $c = \frac{4}{\varepsilon^2(1-\alpha^{-2})} \in \mathbb{R}$. Ha $\omega \in \Omega$ esetén $0 < \xi_1(\omega) \leq i$, akkor $\xi_1^2(\omega) \chi_{\{0 < \xi_1 \leq i\}}(\omega) = \xi_1^2(\omega) \chi_{\{\xi_1 \leq i\}}(\omega)$. Ha $\xi_1(\omega) = 0$ vagy $\xi_1(\omega) > i$, akkor $\xi_1^2(\omega) \chi_{\{0 < \xi_1 \leq i\}}(\omega) = 0 = \xi_1^2(\omega) \chi_{\{\xi_1 \leq i\}}(\omega)$. Tehát $\xi_1^2 \chi_{\{\xi_1 \leq i\}} = \xi_1^2 \chi_{\{0 < \xi_1 \leq i\}} = \xi_1^2 \sum_{k=0}^{i-1} \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}$. Így (8.18) miatt

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon &\leq c \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{E} (\xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) = c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} (\xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} (\xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} (\xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{k+1} \xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}} \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Ha $\omega \in \Omega$ esetén $k < \xi_1(\omega) \leq k+1$, akkor $\frac{1}{k+1} \xi_1^2(\omega) \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}(\omega) = \frac{1}{k+1} \xi_1^2(\omega) \leq \frac{1}{\xi_1(\omega)} \xi_1^2(\omega) = \xi_1(\omega) = \xi_1(\omega) \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}(\omega)$. Ha $\xi_1(\omega) \leq k$ vagy $\xi_1(\omega) > k+1$, akkor $\frac{1}{k+1} \xi_1^2(\omega) \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}(\omega) = 0 \leq \xi_1(\omega) \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}(\omega)$. Tehát $\frac{1}{k+1} \xi_1^2 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}} \leq \xi_1 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}$. Így (8.19) miatt

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon &\leq 2c \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} (\xi_1 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) = 2c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} (\xi_1 \chi_{\{k < \xi_1 \leq k+1\}}) = \\ &= 2c \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\xi_1 \chi_{\{0 < \xi_1 \leq n\}}). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Ha $\omega \in \Omega$ esetén $0 < \xi_1(\omega) \leq n$, akkor $\xi_1(\omega) \chi_{\{0 < \xi_1 \leq n\}}(\omega) = \xi_1(\omega) \chi_{\{0 < \xi_1 \leq n\}}(\omega) = \xi_1(\omega) \chi_{\{\xi_1 \leq n\}}(\omega)$. Ha $\xi_1(\omega) = 0$ vagy $\xi_1(\omega) > n$, akkor $\xi_1(\omega) \chi_{\{0 < \xi_1 \leq n\}}(\omega) = 0 = \xi_1(\omega) \chi_{\{\xi_1 \leq n\}}(\omega)$. Tehát $\xi_1 \chi_{\{0 < \xi_1 \leq n\}} = \xi_1 \chi_{\{\xi_1 \leq n\}}$. Így (8.20) miatt

$$\Delta_\varepsilon \leq 2c \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\xi_1 \chi_{\{\xi_1 \leq n\}}) \stackrel{(8.15)}{=} 2c \mathbb{E} \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Tehát Δ_ε definíciójából

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|S_{k_n}^* - E S_{k_n}^*|}{k_n} \geq \varepsilon\right) \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Így a Borel–Cantelli-lemma alapján 0 annak a valószínűsége, hogy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ esetén $\frac{|S_{k_n}^* - E S_{k_n}^*|}{k_n} \geq \varepsilon$ teljesüljön végtelen sok n -re. Ebből következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{k_n}^*}{k_n} - \frac{E S_{k_n}^*}{k_n}\right) = 0$ m.b. $\implies$ (8.16) miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}^*}{k_n} = E \xi_1 \quad \text{m.b.} \quad (8.21)$$

A 8.82. tétel miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\eta_n \neq \xi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_1 > n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_1 \geq n) \in \mathbb{R}.$$

Így a Borel–Cantelli-lemma alapján 0 annak a valószínűsége, hogy $\eta_n \neq \xi_n$ végtelen sok n -re, azaz $\eta_n \neq \xi_n$ legfeljebb véges sok n -re m.b. $\implies \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\xi_k = \eta_k\}$ esetén létezik $n_\omega \in \mathbb{N}$, hogy $k \geq n_\omega$ esetén $\xi_k(\omega) = \eta_k(\omega) \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}^*(\omega)}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n_\omega}(\omega) + \dots + \eta_{k_n}(\omega)}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{n_\omega}(\omega) + \dots + \xi_{k_n}(\omega)}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}(\omega)}{k_n}.$$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}^*}{k_n}$ m.b. $\implies$ (8.21) miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = E \xi_1 \quad \text{m.b.} \quad (8.22)$$

$$\frac{1 - \frac{1}{\alpha^n}}{\alpha} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}} = \frac{[\alpha^n]}{[\alpha^{n+1}]} \leq \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1} - 1} = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha^n}} \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}. \quad (8.23)$$

Ha $i \in \mathbb{N}$ és $k_n < i \leq k_{n+1}$, akkor

$$\left. \begin{aligned} i S_{k_n} &\leq k_{n+1} S_{k_n} \leq k_{n+1} S_i \implies \frac{S_{k_n}}{k_{n+1}} \leq \frac{S_i}{i} \\ k_n S_i &\leq i S_i \leq i S_{k_{n+1}} \implies \frac{S_i}{i} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_n} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{S_{k_n}}{k_n} \leq \frac{S_i}{i} \leq \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} \quad (k_n < i \leq k_{n+1}). \quad (8.24)$$

Ekkor (8.24), (8.23), (8.22) és a 8.106. lemma alapján $\frac{1}{\alpha} E \xi_1 \leq \underline{\lim} \frac{S_n}{n}$ m.b. $\forall \alpha > 1$ és $\overline{\lim} \frac{S_n}{n} \leq \alpha E \xi_1$ m.b. $\forall \alpha > 1 \implies$

$$E \xi_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{1}{\alpha} E \xi_1 \leq \underline{\lim} \frac{S_n}{n} \leq \overline{\lim} \frac{S_n}{n} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \alpha E \xi_1 = E \xi_1 \quad \text{m.b.},$$

amelyből következik az állítás nemnegatív értékű valószínűségi változókra. Általános esetben a 8.104. lemma és az előzőek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^+ = E \xi_1^+ \text{ m.b. és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^- = E \xi_1^- \text{ m.b.,}$$

melyből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^+ - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^- = E \xi_1^+ - E \xi_1^- = E \xi_1 \text{ m.b. } \square$$

8.108. Tétel (Nagy számok gyenge törvénye). Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ valószínűségben konvergál $E \xi_1$ -hez, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - E \xi_1 \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+.$$

A valószínűségben vett konvergálást **sztochasztikus konvergenciának** is nevezzük.

Bizonyítás. A tétel következménye az Etemadi-féle nagy számok erős törvényének és a Lebesgue-tételnek. $\square$

8.109. *Megjegyzés.* Ha a nagy számok gyenge törvényében még a véges szórást is feltételezzük, akkor közvetlenül a Csebisev-egyenlőtlenségből is bizonyíthatunk, ugyanis ekkor $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ jelöléssel

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} - E \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq P \left(\left| \frac{S_n}{n} - E \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D^2 \frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},$$

továbbá $E \frac{S_n}{n} = E \xi_1$ és $D^2 \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} D^2 \xi_1$, így

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} - E \xi_1 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{D^2 \xi_1}{n \varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget is szokás nagy számok gyenge törvényének nevezni.

8.7. Karakterisztikus függvény

8.110. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi, \eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók és $\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\zeta(\omega) := \xi(\omega) + i\eta(\omega)$. Ekkor a ζ függvényt **komplex értékű valószínűségi változónak** nevezzük. Ha ξ és η véges várható értékűek, akkor ζ várható értékén a P -szerinti integrálját értjük és $E \zeta$ módon jelöljük, azaz

$$E \zeta := \int (\xi + i\eta) dP = \int \xi dP + i \int \eta dP = E \xi + i E \eta.$$

8.111. Definíció. Ha ξ valószínűségi változó, akkor a $\varphi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_\xi(t) := E e^{i\xi t}$ függvényt a ξ *karakterisztikus függvényének* nevezzük.

8.112. *Megjegyzés.* Minden ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye értelmezett minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ugyanis

$$\varphi_\xi(t) = E e^{i\xi t} = E(\cos \xi t + i \sin \xi t) = E \cos \xi t + i E \sin \xi t,$$

továbbá a $\cos$ és $\sin$ függvények korlátosak, így $\cos \xi t$ és $\sin \xi t$ véges várható értékűek.

8.113. Tétel. $\varphi_\xi(t) = \int e^{ixt} dQ_\xi(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. $\varphi_\xi(t) = E \cos \xi t + i E \sin \xi t = \int \cos xt dQ_\xi(x) + i \int \sin xt dQ_\xi(x) = \int (\cos xt + i \sin xt) dQ_\xi(x) = \int e^{ixt} dQ_\xi(x)$. □

8.114. Tétel. Ha ξ abszolút folytonos, akkor $\varphi_\xi(t) = \int e^{ixt} f_\xi(x) d\lambda(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. $\varphi_\xi(t) = E \cos \xi t + i E \sin \xi t = \int (\cos xt) f_\xi(x) d\lambda(x) + i \int (\sin xt) f_\xi(x) d\lambda(x) = \int (\cos xt + i \sin xt) f_\xi(x) d\lambda(x) = \int e^{ixt} f_\xi(x) d\lambda(x)$. □

8.115. Tétel. Minden karakterisztikus függvény valós és képzetes része korlátos, illetve egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. ► A korlátosság abból következik, hogy $|E \cos \xi t| \leq E |\cos \xi t| \leq 1$ és $|E \sin \xi t| \leq E |\sin \xi t| \leq 1$.

► $|E \cos \xi(t+h) - E \cos \xi t| = |E(\cos \xi(t+h) - \cos \xi t)| \leq E |\cos \xi(t+h) - \cos \xi t| = E \left| -2 \sin \frac{\xi(2t+h)}{2} \sin \frac{\xi h}{2} \right| \leq 2 E \left| \sin \frac{\xi h}{2} \right|$. Másrészt, ha h_n nullsorozat, akkor a $\sin$ függvény folytonossága miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{\xi h_n}{2} \right| = 0$, így a majorált konvergencia tételből $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \sin \frac{\xi h_n}{2} \right| = 0$. Mindezekből kapjuk, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} |E \cos \xi(t+h) - E \cos \xi t| = 0 \implies \varphi_\xi$ valós része egyenletesen folytonos. A képzetes részre hasonló a bizonyítás. □

8.116. Tétel. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt} \varphi_\xi(at) \quad \forall a, b, t \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. $\varphi_{a\xi+b}(t) = E e^{i(a\xi+b)t} = E e^{i\xi at} e^{ibt} = e^{ibt} E e^{i\xi at} = e^{ibt} \varphi_\xi(at)$. □

8.117. Tétel. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n} = \varphi_{\xi_1} \cdots \varphi_{\xi_n}.$$

Bizonyítás. $\eta := \xi_1 + \dots + \xi_n$ jelöléssel kapjuk, hogy $\varphi_\eta(t) = E(e^{i\xi_1 t} \dots e^{i\xi_n t}) = E \prod_{j=1}^n (\cos \xi_j t + i \sin \xi_j t) = E(\Sigma_1 + i \Sigma_2)$, ahol Σ_1 és Σ_2 is olyan összegek, melyekben minden tag $h_1(\xi_1 t) \dots h_n(\xi_n t)$ alakú, ahol h_k vagy $\sin$ vagy $\cos \Rightarrow \varphi_\eta(t) = E \Sigma_1 + i E \Sigma_2 = \Sigma_3 + i \Sigma_4$, ahol Σ_3 és Σ_4 is olyan összegek, melyekben minden tag $E(h_1(\xi_1 t) \dots h_n(\xi_n t)) = E h_1(\xi_1 t) \dots E h_n(\xi_n t)$ alakú a függetlenség miatt $\Rightarrow \varphi_\eta(t) = \prod_{j=1}^n (E \cos \xi_j t + i E \sin \xi_j t) = \varphi_{\xi_1}(t) \dots \varphi_{\xi_n}(t)$. $\square$

8.118. Lemma. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(2k)!}{2^k k!} \forall k = 0, 1, 2, \dots$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 0$, akkor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{2^0 0!}$. Tegyük fel, hogy $k = l$ esetén teljesül az állítás, vizsgáljuk $k = l + 1$ esetén. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(l+1)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x^{2l+1} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \underset{\text{parc.int.}}{\uparrow}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[-x^{2l+1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-t}^t + (2l+1) \int_{-t}^t x^{2l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = (2l+1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \underset{\text{ind.felt.}}{\uparrow}$
 $= (2l+1) \frac{(2l)!}{2^l l!} = \frac{(2(l+1))!}{2^{l+1} (l+1)!} \Rightarrow$ állítás. $\square$

8.119. Tétel. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \forall t \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. $(\sin xt)\varphi(x)$ páros függvény $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\sin xt)\varphi(x) dx = 0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) = E \cos \xi t + i E \sin \xi t = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos xt)\varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(tx)^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Az előző képletben szereplő hatványsor konvergenciasugara ∞ , így minden korlátos zárt intervallumon egyenletesen konvergencia, melyből kapjuk, hogy az integrálás és a szummázás sorrendje felcserélhető $\Rightarrow$

$$\varphi_\xi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (8.25)$$

Rögzített m esetén

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{8.118. lemma}}}{=} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^k k!} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8.26)$$

így a (8.25) képletben a limeszek felcserélhetőek $\implies$

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \underset{(8.26)}{=} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad \square\end{aligned}$$

8.120. Lemma. Ha ξ és η független valószínűségi változók, η standard normális eloszlású és $\sigma \in \mathbb{R}_+$, akkor $\xi + \sigma\eta$ abszolút folytonos és

$$f_{\xi+\sigma\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \varphi_\xi(u) d\lambda(u) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. ξ és $\sigma\eta$ függetlenek, így a 8.69. tétel miatt $\xi + \sigma\eta$ abszolút folytonos és $f_{\xi+\sigma\eta}(x) = \int f_{\sigma\eta}(x-v) dQ_\xi(v)$. Másrészt $F_{\sigma\eta}(x) = P(\sigma\eta < x) = P(\eta < \frac{x}{\sigma}) = \Phi(\frac{x}{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \implies f_{\sigma\eta}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \implies$

$$f_{\xi+\sigma\eta}(x) = \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-v)^2}{2\sigma^2}} dQ_\xi(v). \quad (8.27)$$

A 8.116. és 8.119. tételekből

$$\varphi_{\frac{\eta}{\sigma}}(t) = \varphi_\eta\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned}F_{\frac{\eta}{\sigma}}(x) &= P\left(\frac{\eta}{\sigma} < x\right) = P(\eta < \sigma x) = \Phi(\sigma x) = \int_{-\infty}^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} du \implies \\ f_{\frac{\eta}{\sigma}}(u) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \implies \varphi_{\frac{\eta}{\sigma}}(v-x) \underset{\uparrow}{=} \int e^{iu(v-x)} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} d\lambda(u) \underset{\uparrow}{=} e^{-\frac{(v-x)^2}{2\sigma^2}} \implies (8.27) \\ &\quad \text{8.114. tétel} \quad \quad \quad (8.28)\end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned}f_{\xi+\sigma\eta}(x) &= \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{iu(v-x)} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} d\lambda(u) dQ_\xi(v) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint e^{iu(v-x)} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} d\lambda(u) dQ_\xi(v) = \text{(Fubini-tétel)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \int e^{iuv} dQ_\xi(v) d\lambda(u) = \text{(8.113. tétel)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \varphi_\xi(u) d\lambda(u). \quad \square\end{aligned}$$

8.121. Lemma. Legyen ξ és η ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $E\eta = 0$ és $D\eta = 1$. Ha F_ξ az $x \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, akkor $\lim_{\sigma \rightarrow 0+0} F_{\xi+\sigma\eta}(x) = F_\xi(x)$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és $x \in \mathbb{R}$ az F_ξ egy folytonossági pontja. Ekkor

$$F_{\xi+\sigma\eta}(x) = P\left(\underbrace{\{\xi + \sigma\eta < x\} \cap \{|\sigma\eta| < \varepsilon\}}_{\subset \{\xi < x+\varepsilon\}}\right) + P\left(\underbrace{\{\xi + \sigma\eta < x\} \cap \{|\sigma\eta| \geq \varepsilon\}}_{\subset \{|\sigma\eta| \geq \varepsilon\}}\right) \leq$$

$$\leq F_\xi(x + \varepsilon) + P(|\sigma\eta| \geq \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Csebisev-egy.}}}{\leq} F_\xi(x + \varepsilon) + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

másrészt

$$\begin{aligned} F_{\xi+\sigma\eta}(x) &\geq P\left(\underbrace{\{\xi + \sigma\eta < x\} \cap \{|\sigma\eta| < \varepsilon\}}_{\{\xi < x - \varepsilon\} \cap \{|\sigma\eta| < \varepsilon\} \subset} \right) \geq P\left(\{\xi < x - \varepsilon\} \cap \{|\sigma\eta| < \varepsilon\}\right) = \\ &= P(\xi < x - \varepsilon) + P(|\sigma\eta| < \varepsilon) - P\left(\{\xi < x - \varepsilon\} \cup \{|\sigma\eta| < \varepsilon\}\right) \geq \\ &\geq F_\xi(x - \varepsilon) + P(|\sigma\eta| < \varepsilon) - 1 = F_\xi(x - \varepsilon) - P(|\sigma\eta| \geq \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Csebisev-egy.}}}{\geq} F_\xi(x - \varepsilon) - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Összegezve tehát,

$$F_\xi(x - \varepsilon) - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \leq F_{\xi+\sigma\eta}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon) + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \forall \sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (8.29)$$

Legyen σ_n pozitív értékű nullsorozat. Ekkor $\lim F_{\xi+\sigma_n\eta}(x) \in \mathbb{R}$ és $\overline{\lim} F_{\xi+\sigma_n\eta}(x) \in \mathbb{R}$ az $F_{\xi+\sigma_n\eta}(x)$ korlátossága miatt. Így (8.29) miatt $F_\xi(x - \varepsilon) \leq \lim F_{\xi+\sigma_n\eta}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi+\sigma_n\eta}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi+\sigma_n\eta}(x) = F_\xi(x)$, hiszen F_ξ az x -ben folytonos. Ebből már következik az állítás. $\square$

8.122. Tétel (Inverziós formula). *Ha ξ valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$ az F_ξ -nek folytonossági pontjai, akkor*

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+0} \int \varphi_\xi(u) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} d\lambda(u).$$

Bizonyítás. A 8.67. tétel alapján léteznek olyan ξ^*, η független valószínűségi változók, melyekre teljesül, hogy ξ^* azonos eloszlású ξ -vel és η standard normális eloszlású. Így a 8.120. lemma miatt $\sigma \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$f_{\xi^*+\sigma\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \varphi_{\xi^*}(u) d\lambda(u),$$

melyből $a \leq b$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\xi^*+\sigma\eta}(b) - F_{\xi^*+\sigma\eta}(a) &= \int_{[a,b]} \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \varphi_{\xi^*}(u) d\lambda(u) d\lambda(x) = \text{(Fubini-tétel)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \varphi_{\xi^*}(u) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \int_{[a,b]} e^{-iux} d\lambda(x) d\lambda(u). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Mivel

$$\int_{[a,b]} e^{-iux} d\lambda(x) = \int_a^b \cos(-ux) dx + i \int_a^b \sin(-ux) dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(-ux)}{-u} \right]_a^b + i \left[\frac{\cos(-ux)}{u} \right]_a^b = \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu},$$

így (8.30) és a 8.121. lemma alapján

$$F_{\xi^*}(b) - F_{\xi^*}(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+0} \int \varphi_{\xi^*}(u) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} d\lambda(u).$$

Mivel ξ^* azonos eloszlású ξ -vel, ezért $a \leq b$ esetén teljesül az állítás. Ha $a > b$, akkor

$$F_{\xi}(a) - F_{\xi}(b) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0+0} \int \varphi_{\xi}(u) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \frac{e^{-iub} - e^{-iua}}{iu} d\lambda(u),$$

melyből ebben az esetben is kapjuk az állítást. $\square$

8.123. Tétel (Unicitás tétel). *Két valószínűségi változó eloszlása pontosan akkor azonos, ha a karakterisztikus függvényeik megegyeznek.*

Bizonyítás. Az eloszlások azonosságából triviálisan teljesül, hogy a karakterisztikus függvények megegyeznek. Megfordítva, tegyük fel, hogy a ξ és η valószínűségi változók esetén $\varphi_{\xi} = \varphi_{\eta}$. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ azon pontok halmaza, melyekben az F_{ξ} és az F_{η} is folytonos. Monoton növekvő függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható számosságú, így S sűrű $\mathbb{R}$ -ben. Legyen $b \in S$ és a_n S -beli értékű $-\infty$ -be divergáló sorozat. Ekkor az inverziós formula miatt $F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a_n) = F_{\eta}(b) - F_{\eta}(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\implies F_{\xi}(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(a_n) = F_{\eta}(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta}(a_n) \implies$

$$F_{\xi}(b) = F_{\eta}(b) \quad \forall b \in S. \quad (8.31)$$

Most legyen $b \in \mathbb{R} \setminus S$. Ekkor létezik $b_n \in S$ ($n \in \mathbb{N}$), hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ és $b_n < b$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(b_n) = F_{\xi}(b)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta}(b_n) = F_{\eta}(b)$ az eloszlásfüggvény balról való folytonossága miatt. De (8.31) miatt $F_{\xi}(b_n) = F_{\eta}(b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies F_{\xi}(b) = F_{\eta}(b)$ $\forall b \in \mathbb{R} \setminus S$. Ez és (8.31) alapján $F_{\xi} = F_{\eta} \implies Q_{\xi} = Q_{\eta}$. $\square$

8.8. Gyenge konvergencia

8.124. Definíció. Legyenek ξ, ξ_n ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy Q_{ξ_n} *gyengén konvergál* Q_{ξ} -hez, ha minden $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dQ_{\xi_n} = \int f dQ_{\xi}.$$

Ilyenkor azt is szokták mondani, hogy F_{ξ_n} gyengén konvergál F_{ξ} -hez, illetve, hogy ξ_n *eloszlásban konvergál* ξ -hez.

8.125. Tétel. *Legyenek ξ, ξ_n ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változók. A Q_{ξ_n} pontosan akkor konvergál gyengén Q_{ξ} -hez, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi}(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyben F_{ξ} folytonos.*

Bizonyítás. ► „ $\Rightarrow$ ” Tegyük fel, hogy Q_{ξ_n} gyengén konvergál Q_ξ -hez. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ az F_ξ egy folytonossági pontja, és $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } y \leq x, \\ 0, & \text{ha } y \geq x + \varepsilon, \\ \frac{x-y}{\varepsilon} + 1, & \text{különben,} \end{cases} \quad g(y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } y \leq x - \varepsilon, \\ 0, & \text{ha } y \geq x, \\ \frac{x-y}{\varepsilon}, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi_n}(x) &= \int_{(-\infty, x)} dQ_{\xi_n} = \int_{(-\infty, x)} f dQ_{\xi_n} \leq \int f dQ_{\xi_n} \implies \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq \overline{\lim} \int f dQ_{\xi_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f dQ_{\xi_n} = \int f dQ_\xi \leq \int_{(-\infty, x+\varepsilon)} dQ_\xi = F_\xi(x + \varepsilon) \implies \end{aligned}$$

$$\overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x), \quad (8.32)$$

hiszen F_ξ az x -ben folytonos. $F_{\xi_n}(x) = \int_{(-\infty, x)} dQ_{\xi_n} \geq \int_{(-\infty, x)} g dQ_{\xi_n} = \int g dQ_{\xi_n} \implies \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \geq \underline{\lim} \int g dQ_{\xi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g dQ_{\xi_n} = \int g dQ_\xi \geq \int_{(-\infty, x-\varepsilon)} g dQ_\xi = \int_{(-\infty, x-\varepsilon)} dQ_\xi = F_\xi(x - \varepsilon) \implies \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \geq F_\xi(x)$. Így (8.32) miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$.

► „ $\Leftarrow$ ” Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyben F_ξ folytonos. Legyen $0 < \varepsilon < 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és folytonos, továbbá legyen $M := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

F_ξ monoton, így a szakadási helyeinek halmaza megszámlálható, melyből a folytonossági pontok halmaza sűrű $\mathbb{R}$ -ben. Másrészt $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$. Mindezekből következik, hogy léteznek $B < 0$ és $C > 0$, melyek folytonossági pontjai F_ξ -nek, $F_\xi(B) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $1 - F_\xi(C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor véges sok n -től eltekintve $F_{\xi_n}(B) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $1 - F_{\xi_n}(C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $A := \max\{-B, C\}$. Ekkor $Q_\xi([-A, A]) = F_\xi(A) - F_\xi(-A) \geq F_\xi(C) - F_\xi(B) > 1 - \varepsilon$. Hasonlóan, véges sok n -től eltekintve $Q_{\xi_n}([-A, A]) > 1 - \varepsilon \implies$

$$\begin{aligned} \left| \int f dQ_\xi - \int_{[-A, A]} f dQ_\xi \right| &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} |f| dQ_\xi \leq \\ &\leq M \int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} dQ_\xi = M (1 - Q_\xi([-A, A])) \leq M\varepsilon, \end{aligned} \quad (8.33)$$

hasonlóan, véges sok n -től eltekintve

$$\left| \int f dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A]} f dQ_{\xi_n} \right| \leq M\varepsilon. \quad (8.34)$$

Az f folytonos a $[-A, A]$ kompakt halmazon $\implies f$ egyenletesen folytonos $[-A, A]$ -n $\implies \exists \delta \in \mathbb{R}_+$, hogy $x, y \in [-A, A]$, $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Legyen $\{a_0, \dots, a_l\}$ olyan beosztása $[-A, A]$ -nak, melynek finomsága kisebb δ -nál és $a_0, \dots, a_l$ folytonossági pontjai F_ξ -nek. Ilyen beosztás létezik, hiszen az F_ξ

folytonossági pontjai sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{R}$ -ben. Legyen

$$h(x) := \sum_{i=1}^l f(a_{i-1}) \chi_{[a_{i-1}, a_i)}(x).$$

Ha $x \in [-A, A]$, akkor egyértelműen létezik $q \in \{1, \dots, l\}$, hogy $x \in [a_{q-1}, a_q) \implies |x - a_{q-1}| \leq |a_q - a_{q-1}| < \delta \implies |f(x) - h(x)| = |f(x) - f(a_{q-1})| < \varepsilon$. Az f korlátos és folytonos, a h pedig egyszerű függvény, így mindkettő integrálható Q_ξ és Q_{ξ_n} szerint is. $\implies$

$$\left| \int_{[-A, A)} f dQ_\xi - \int_{[-A, A)} h dQ_\xi \right| \leq \int_{[-A, A)} |f - h| dQ_\xi \leq \varepsilon \int_{[-A, A)} dQ_\xi \leq \varepsilon, \quad (8.35)$$

hasonlóan, véges sok n -től eltekintve

$$\left| \int_{[-A, A)} f dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A)} h dQ_{\xi_n} \right| \leq \varepsilon. \quad (8.36)$$

Mivel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-A, A)} h dQ_{\xi_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l f(a_{i-1}) Q_{\xi_n}([a_{i-1}, a_i)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l f(a_{i-1}) (F_{\xi_n}(a_i) - F_{\xi_n}(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^l f(a_{i-1}) (F_\xi(a_i) - F_\xi(a_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^l f(a_{i-1}) Q_\xi([a_{i-1}, a_i)) = \int_{[-A, A)} h dQ_\xi, \end{aligned}$$

így véges sok n -től eltekintve

$$\left| \int_{[-A, A)} h dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A)} h dQ_\xi \right| < \varepsilon. \quad (8.37)$$

A (8.34), (8.33), (8.36), (8.35) és (8.37) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \left| \int f dQ_{\xi_n} - \int f dQ_\xi \right| &\leq \left| \int f dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A)} f dQ_{\xi_n} \right| + \left| \int_{[-A, A)} f dQ_\xi - \int f dQ_\xi \right| + \\ &+ \left| \int_{[-A, A)} f dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A)} h dQ_{\xi_n} \right| + \left| \int_{[-A, A)} h dQ_\xi - \int_{[-A, A)} f dQ_\xi \right| + \\ &+ \left| \int_{[-A, A)} h dQ_{\xi_n} - \int_{[-A, A)} h dQ_\xi \right| \leq (2M + 3)\varepsilon \quad \text{véges sok } n\text{-től eltekintve.} \end{aligned}$$

Ebből következően Q_{ξ_n} gyengén konvergál Q_ξ -hez. $\square$

8.126. Tétel (Gyenge kompaktsági tétel). Legyen ξ_n valószínűségi változó minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $[A_\varepsilon, B_\varepsilon] \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\inf_n Q_{\xi_n}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \geq 1 - \varepsilon,$$

akkor létezik olyan ξ valószínűségi változó, melyre a Q_{ξ_n} valamely $Q_{\xi_{n_k}}$ részsorozata gyengén konvergál Q_ξ -hez.

Bizonyítás. ► Legyen r_n ($n \in \mathbb{N}$) olyan sorozat, mely a $\mathbb{Q}$ minden elemét pontosan egyszer veszi fel. Az $F_{\xi_n}(r_1)$ korlátos sorozat $\implies \exists h_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő függvény, hogy $F_{\xi_{h_1(n)}}(r_1)$ konvergens. Az $F_{\xi_{h_1(n)}}(r_2)$ korlátos sorozat $\implies \exists h_2: \mathbb{N} \rightarrow h_1(\mathbb{N})$ szigorúan monoton növekvő függvény, hogy $F_{\xi_{h_2(n)}}(r_2)$ konvergens. Folytatva az eljárást, kapjuk, hogy ha már h_{l-1} definiált, akkor $F_{\xi_{h_{l-1}(n)}}(r_l)$ korlátos sorozat $\implies \exists h_l: \mathbb{N} \rightarrow h_{l-1}(\mathbb{N})$ szigorúan monoton növekvő függvény, hogy $F_{\xi_{h_l(n)}}(r_l)$ ($n \in \mathbb{N}$) konvergens.

A $h_i(j)$ a $h_i(\mathbb{N})$ j -edik legkisebb eleme és $h_{i+1}(j)$ a $h_{i+1}(\mathbb{N})$ j -edik legkisebb eleme, így $h_{i+1}(\mathbb{N}) \subset h_i(\mathbb{N})$ miatt $h_i(j) \leq h_{i+1}(j)$ ($i, j \in \mathbb{N}$) $\implies h_l(l) < h_l(l+1) \leq h_{l+1}(l+1) < h_{l+1}(l+2) \leq h_{l+2}(l+2) < \dots$, azaz $h_l(l) < h_{l+1}(l+1) < h_{l+2}(l+2) < \dots$ ($l \in \mathbb{N}$). De $\mathbb{N} \supset h_1(\mathbb{N}) \supset h_2(\mathbb{N}) \supset \dots$ miatt $h_{l+m}(l+m) \in h_l(\mathbb{N})$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), így $h_l(l), h_{l+1}(l+1), h_{l+2}(l+2), \dots$ részsorozata a $h_l(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatnak minden rögzített $l \in \mathbb{N}$ esetén. $\implies$ Az $F_{\xi_{h_l(n)}}(r_l)$ konvergens sorozatnak részsorozata az $F_{\xi_{h_l(l)}}(r_l), F_{\xi_{h_{l+1}(l+1)}}(r_l), F_{\xi_{h_{l+2}(l+2)}}(r_l), \dots$, így ez is konvergens minden rögzített $l \in \mathbb{N}$ esetén. $\implies F_{\xi_{h_k(k)}}(r_l)$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergens minden $l \in \mathbb{N}$ esetén $\implies F_{\xi_{h_k(k)}}(r)$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergens minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén. A továbbiakban legyen $n_k := h_k(k)$ és

$$L: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(r) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(r).$$

Az $F_{\xi_{n_k}}$ minden k -ra monoton növekvő, másrészt $0 \leq F_{\xi_{n_k}}(r) \leq 1$ minden k -ra és r -re. Így az L függvény monoton növekvő és $0 \leq L(r) \leq 1$ minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén.

► Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x < A_\varepsilon$ és $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $F_{\xi_{n_k}}(x) \leq F_{\xi_{n_k}}(A_\varepsilon) \leq Q_{\xi_{n_k}}(\mathbb{R} \setminus [A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \leq \sup_k Q_{\xi_{n_k}}(\mathbb{R} \setminus [A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \leq \sup_n Q_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus [A_\varepsilon, B_\varepsilon]) = 1 - \sup_n Q_{\xi_n}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \leq 1 - \inf_n Q_{\xi_n}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \leq \varepsilon \implies$ Ha q_n olyan sorozat, melynek minden tagja racionális és $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\infty$, akkor $F_{\xi_{n_k}}(q_n) \leq \varepsilon$ véges sok n -től eltekintve $\implies L(q_n) \leq \varepsilon$ véges sok n -től eltekintve $\implies 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(q_n) \leq \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} L(q_n) = 0 \implies$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} L(r) = 0.$$

► Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x > B_\varepsilon$ és $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $F_{\xi_{n_k}}(x) \geq F_{\xi_{n_k}}(B_\varepsilon) \geq Q_{\xi_{n_k}}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \geq \inf_k Q_{\xi_{n_k}}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \geq \inf_n Q_{\xi_n}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) \geq 1 - \varepsilon \implies$ Ha q_n olyan sorozat, melynek minden tagja racionális és $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, akkor $F_{\xi_{n_k}}(q_n) \geq 1 - \varepsilon$ véges sok n -től

eltekintve $\implies L(q_n) \geq 1 - \varepsilon$ véges sok n -től eltekintve $\implies 1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L(q_n) \geq 1 - \varepsilon$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} L(q_n) = 1 \implies$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(r) = 1.$$

► Legyen

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \sup\{L(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}.$$

Mivel L monoton növekvő, ezért

$$F(x) = L(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Ha $x_1 < x_2$, akkor $\{L(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leq x_1\} \subset \{L(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leq x_2\} \implies F(x_1) \leq F(x_2) \implies F$ monoton növekvő.

► Legyen $x_n \rightarrow \infty$ -be divergáló sorozat. Ekkor létezik olyan ∞ -be divergáló racionális értékeket felvevő r_n sorozat, melyre $r_n \leq x_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor $L(r_n) \leq \sup\{L(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leq x_n\} = F(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq 1$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 1 \implies$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

► Legyen $x_n \rightarrow -\infty$ -be divergáló sorozat. Ekkor létezik olyan $-\infty$ -be divergáló racionális értékeket felvevő r_n sorozat, melyre $r_n \geq x_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor $F(x_n) \leq F(r_n) = L(r_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$
 $\implies$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

► Legyen $x \in \mathbb{R}$ és r_n olyan x -hez konvergáló, racionális értékű, monoton növekvő sorozat, melyre $r_n < x \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mivel L monoton növekvő és korlátos, ezért $L(r_n)$ is az $\implies L(r_n)$ konvergens, és $\{L(r_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{L(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) = \sup_n L(r_n) \leq F(x). \quad (8.38)$$

Tegyük fel, hogy $\sup_n L(r_n) < F(x)$, amennyiben x irracionális. Ekkor létezik $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$, hogy $\sup_n L(r_n) < L(r) \implies L(r_n) < L(r) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies r_n \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \leq r < x$, ami ellentmondás. Így (8.38) miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) = F(x), \quad \text{ha } x \text{ irracionális.} \quad (8.39)$$

Ha x racionális, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(r_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(r_n) \overset{\text{balról folyt.}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(x) = L(x) = F(x) \implies (8.39) \text{ miatt } \lim_{n \rightarrow \infty} F(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(r_n) = F(x) \implies$
Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, hogy

$$F(x) - \varepsilon \leq F(r_{k_\varepsilon}).$$

Legyen x_n olyan x -hez konvergáló számsorozat, melyre $x_n \leq x \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén véges sok n -től eltekintve $x_n \geq r_{k_\varepsilon} \implies F(x) \geq F(x_n) \geq F(r_{k_\varepsilon}) \geq F(x) - \varepsilon$ véges sok n -től eltekintve $\implies F(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq F(x) - \varepsilon \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x) \implies F$ balról folytonos.

► Az eddigiekből következik, hogy van olyan ξ valószínűségi változó, melyre $F_\xi = F$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ az F_ξ egy folytonossági pontja. Ha $x \leq r \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\overline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(r) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(r) = L(r) = F_\xi(r).$$

Ha $x \geq q \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\underline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \geq \underline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(q) = L(q) = F_\xi(q).$$

Legyen r_n és q_n olyan racionális értékű x -hez konvergáló sorozatok, melyekre $q_n \leq x \leq r_n \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor az előzőekből $F_\xi(q_n) \leq \underline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \leq F_\xi(r_n) \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(q_n) \leq \underline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_{n_k}}(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(r_n)$. De F_ξ folytonos x -ben, így $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(r_n) = F_\xi(x) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_{n_k}}(x) = F_\xi(x) \implies$ A 8.125. tétel miatt $Q_{\xi_{n_k}}$ gyengén konvergál Q_ξ -hez. $\square$

8.127. Lemma. Legyen ξ valószínűségi változó. Ekkor minden $u \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$0 \leq 1 - Q_\xi \left(\left[-\frac{2}{u}, \frac{2}{u} \right] \right) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi_\xi(t)) dt = 2 \int \left(1 - \frac{\sin ux}{ux} \right) dQ_\xi(x) < \infty.$$

Bizonyítás. $1 - \varphi_\xi$ valós és képzetes része is korlátos és folytonos, így Riemann-integrálható minden korlátos intervallumon. Emiatt

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi_\xi(t)) dt &= \frac{1}{u} \int_{[-u, u]} (1 - \varphi_\xi(t)) d\lambda(t) = \frac{1}{u} \int_{[-u, u]} \int (1 - e^{itx}) dQ_\xi(x) d\lambda(t) = \\ &= \frac{1}{u} \int \int_{[-u, u]} (1 - e^{itx}) d\lambda(t) dQ_\xi(x) = \frac{1}{u} \int \int_{-u}^u (1 - \cos tx - i \sin tx) dt dQ_\xi(x) = \\ &= \frac{1}{u} \int \int_{-u}^u (1 - \cos tx) dt dQ_\xi(x) = \frac{1}{u} \int \left[t - \frac{\sin tx}{x} \right]_{-u}^u dQ_\xi(x) = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{\sin ux}{ux} \right) dQ_\xi(x) \geq 2 \int \left(1 - \frac{1}{ux} \right) dQ_\xi(x) \geq \\ &\geq 2 \int_{(-\infty, -\frac{2}{u})} \left(1 - \frac{1}{ux} \right) dQ_\xi(x) + 2 \int_{(\frac{2}{u}, \infty)} \left(1 - \frac{1}{ux} \right) dQ_\xi(x) \geq \\ &\geq \int_{(-\infty, -\frac{2}{u})} dQ_\xi(x) + \int_{(\frac{2}{u}, \infty)} dQ_\xi(x) = 1 - Q_\xi \left(\left[-\frac{2}{u}, \frac{2}{u} \right] \right) \geq 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Végül $1 - \frac{\sin ux}{ux}$ korlátossága miatt Q_ξ szerint integrálható, azaz $\int \left(1 - \frac{\sin ux}{ux} \right) dQ_\xi(x)$ valós. $\square$

8.128. Tétel (Folytonossági tétel). Legyenek ξ, ξ_n ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változók és $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_\xi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ekkor Q_{ξ_n} gyengén konvergál Q_ξ -hez.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ és u_n pozitív tagú nullsorozat. Ekkor a 8.127. lemma és a majorált konvergencia tétel miatt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} \int_{-u_n}^{u_n} (1 - \varphi_\xi(t)) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int \left(1 - \frac{\sin u_n x}{u_n x}\right) dQ_\xi(x) = \\ &= 2 \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin u_n x}{u_n x}\right) dQ_\xi(x) = 0, \end{aligned}$$

így létezik $u_0 \in \mathbb{R}_+$, hogy $0 \leq \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} (1 - \varphi_\xi(t)) dt < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} (1 - \varphi_{\xi_n}(t)) dt =$
 $= \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varphi_{\xi_n}(t)) dt = \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} (1 - \varphi_\xi(t)) dt < \varepsilon \implies$ Véges sok n -től eltekintve
 $0 \leq \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} (1 - \varphi_{\xi_n}(t)) dt < \varepsilon \implies$ A 8.127. lemma miatt, véges sok n -től eltekintve

$$1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{u_0} \int_{-u_0}^{u_0} (1 - \varphi_{\xi_n}(t)) dt \leq Q_{\xi_n} \left(\left[-\frac{2}{u_0}, \frac{2}{u_0} \right] \right).$$

Ha az előző egyenlőtlenség minden n -re teljesül, akkor $A_\varepsilon := \frac{2}{u_0}$. Ha nem teljesül minden n -re, akkor azok csak véges sokan lehetnek. Jelöljük ezeket $n_1, n_2, \dots, n_l$ módon. Mivel $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{\xi_{n_i}}([-m, m]) = 1$, így létezik m_i , hogy $Q_{\xi_{n_i}}([-m_i, m_i]) \geq 1 - \varepsilon$. Ekkor legyen $A_\varepsilon := \max\{m_1, \dots, m_l, \frac{2}{u_0}\}$. Így $Q_{\xi_n}([-A_\varepsilon, A_\varepsilon]) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$\inf_n Q_{\xi_n}([-A_\varepsilon, A_\varepsilon]) \geq 1 - \varepsilon. \quad (8.40)$$

Tegyük fel a tétel állításával ellentétben, hogy Q_{ξ_n} nem konvergál gyengén Q_ξ -hez, azaz létezik olyan $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény, melyre teljesül, hogy az $\int f_0 dQ_{\xi_n}$ nem konvergál $\int f_0 dQ_\xi$ -hez. Az $\int f_0 dQ_{\xi_n}$ korlátos sorozat, így léteznek torlódási pontjai, és ezek mind végesek. Ezek közül legalább az egyik nem egyezik meg $\int f_0 dQ_\xi$ -vel. Így létezik olyan konvergens $\int f_0 dQ_{\xi_{n_k}}$ részsorozat, melyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_0 dQ_{\xi_{n_k}} \neq \int f_0 dQ_\xi. \quad (8.41)$$

Ekkor (8.40) miatt, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hogy $\inf_k Q_{\xi_{n_k}}([-A_\varepsilon, A_\varepsilon]) \geq 1 - \varepsilon$. Így a gyenge kompaktsági tétel miatt létezik olyan η valószínűségi változó, hogy az n_k valamely $m_l := n_{k_l}$ részsorozata esetén $Q_{\xi_{m_l}}$ gyengén konvergál Q_η -hoz, azaz, ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény, akkor

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int f dQ_{\xi_{m_l}} = \int f dQ_\eta. \quad (8.42)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \varphi_\xi(t) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_{m_l}}(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int e^{ixt} dQ_{\xi_{m_l}}(x) = \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\int \cos xt dQ_{\xi_{m_l}}(x) + i \int \sin xt dQ_{\xi_{m_l}}(x) \right) \stackrel{(8.42)}{=} \\
 &= \int \cos xt dQ_\eta(x) + i \int \sin xt dQ_\eta(x) = \varphi_\eta(t),
 \end{aligned}$$

így az unicitás tétel miatt $Q_\xi = Q_\eta$, azaz (8.42) miatt $\lim_{l \rightarrow \infty} \int f dQ_{\xi_{m_l}} = \int f dQ_\xi \implies \lim_{l \rightarrow \infty} \int f_0 dQ_{\xi_{m_l}} = \int f_0 dQ_\xi$, ami (8.41) miatt nem lehetséges. $\square$

8.9. Központi határelloszlás tétele

8.129. Lemma. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $h_1(x), h_2(x) \in (0, 1)$, hogy

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} (\cos(xh_1(x)) + i \sin(xh_2(x))).$$

Bizonyítás. A Taylor-tétel alapján létezik x_1 az x és 0 között, melyre

$$\cos x = \frac{\cos 0}{0!} x^0 + \frac{\cos' 0}{1!} x^1 + \frac{\cos'' x_1}{2!} x^2 = 1 - \frac{\cos x_1}{2} x^2.$$

Legyen $h_1(x) := \frac{x_1}{x}$. Ekkor $h_1(x) \in (0, 1)$ és

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \cos(xh_1(x)). \quad (8.43)$$

Hasonlóan, létezik x_2 az x és 0 között, melyre

$$\sin x = \frac{\sin 0}{0!} x^0 + \frac{\sin' 0}{1!} x^1 + \frac{\sin'' x_2}{2!} x^2 = x - \frac{\sin x_2}{2} x^2.$$

Legyen $h_2(x) := \frac{x_2}{x}$. Ekkor $h_2(x) \in (0, 1)$ és

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2} \sin(xh_2(x)). \quad (8.44)$$

Így $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ miatt, (8.43) és (8.44) alapján adódik az állítás. $\square$

8.130. Tétel (Központi határelloszlás tétele). Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású, pozitív véges szórású valószínűségi változók, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\tilde{S}_n}(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ és $\tilde{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{D S_n}$.

Bizonyítás. $D^2 S_n = D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D^2 \xi_1 + \dots + D^2 \xi_n = n D^2 \xi_1 \implies D S_n = \sqrt{n} D \xi_1$. Így $\eta_i := \xi_i - E \xi_i$ jelöléssel $\tilde{S}_n = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n} D \xi_1} \implies$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{S}_n}(t) &= E e^{i \tilde{S}_n t} = E e^{i(\eta_1 + \dots + \eta_n) \frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1}} = \varphi_{\eta_1 + \dots + \eta_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1} \right) = (8.117. \text{ tétel}) \\ &= \varphi_{\eta_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1} \right) \cdots \varphi_{\eta_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1} \right) = \varphi_{\eta_1}^n \left(\frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1} \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

A 8.129. lemma miatt

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_1} &= E e^{i \eta_1 t} = E \left(1 + i \eta_1 t - \frac{\eta_1^2 t^2}{2} (\cos(\eta_1 t h_1(\eta_1 t)) + i \sin(\eta_1 t h_2(\eta_1 t))) \right) = \\ &= E \left(1 + i t \eta_1 - \frac{t^2}{2} \eta_1^2 - \frac{t^2}{2} R(t) \right) = 1 - \frac{t^2}{2} D^2 \xi_1 - \frac{t^2}{2} E R(t), \end{aligned} \quad (8.46)$$

ahol $R(t) := \eta_1^2 (\cos(\eta_1 t h_1(\eta_1 t)) + i \sin(\eta_1 t h_2(\eta_1 t)) - 1)$.

Legyen t_n egy nullsorozat. Ekkor $|\eta_1^2 \cos(\eta_1 t_n h_1(\eta_1 t_n))| \leq \eta_1^2$, $E \eta_1^2 = D^2 \xi_1 \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1^2 \cos(\eta_1 t_n h_1(\eta_1 t_n)) = \eta_1^2 \cos 0 = \eta_1^2$. Így a majorált konvergencia tételből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \eta_1^2 \cos(\eta_1 t_n h_1(\eta_1 t_n)) = E \eta_1^2 = D^2 \xi_1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \eta_1^2 \sin(\eta_1 t_n h_2(\eta_1 t_n)) = 0.$$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} E R(t_n) = D^2 \xi_1 + i \cdot 0 - E \eta_1^2 = 0 \implies$

$$\lim_{t \rightarrow 0} E R(t) = 0. \quad (8.47)$$

Vezessük be az $a_n := E R \left(\frac{t}{\sqrt{n} D \xi_1} \right)$, $b_n := -\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2 D^2 \xi_1} a_n$ és $c_n := \frac{n}{b_n}$ jelöléseket. Ekkor (8.45) és (8.46) miatt

$$\varphi_{\tilde{S}_n}(t) = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{n D^2 \xi_1}}{2} D^2 \xi_1 - \frac{\frac{t^2}{n D^2 \xi_1}}{2} a_n \right)^n = \left(1 + \frac{b_n}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{c_n} \right)^{c_n b_n}.$$

De (8.47) miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{t^2}{2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{c_n} \right)^{c_n} = e \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{S}_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_\xi(t)$, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó (lásd a 8.119. tételt). Így a folytonossági tétel alapján $Q_{\tilde{S}_n}$ gyengén konvergál Q_ξ -hez. Ebből a 8.125. tétel alapján adódik az állítás. $\square$

8.131. *Megjegyzés.* A 8.125. tételhez analóg módon bizonyítható a következő állítás: *Legyenek ξ, ξ_n ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változók. Ha F_ξ folytonos függvény és Q_{ξ_n} gyengén konvergál Q_ξ -hez, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) = F_\xi(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.* Így a 8.130. tételben a következő állítás is teljesül:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{S}_n \leq x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Irodalomjegyzék

- [1] DARÓCZY ZOLTÁN: Mérték és integrál, Tankönyvkiadó, 1984.
- [2] FAZEKAS ISTVÁN: Valószínűségszámítás, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2000.
- [3] D. H. FREMLIN: Measure Theory, Biddles Short Run Books, King's Lynn, 2000.
- [4] PAUL R. HALMOS: Mértékelmélet, Gondolat, 1984.
- [5] JÁRAI ANTAL: Mérték és integrál, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [6] A. N. KOLMOGOROV, SZ. V. FOMIN: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Könyvkiadó, 1981.
- [7] LACZKOVICH MIKLÓS: Valós függvénytan, ELTE jegyzet, Budapest, 1995.
- [8] LACZKOVICH MIKLÓS, T. SÓS VERA: Analízis II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.
- [9] MOGYORÓDI JÓZSEF, SOMOGYI ÁRPÁD: Valószínűségszámítás I. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [10] RÉNYI ALFRÉD: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [11] RIMÁN JÁNOS: Matematikai analízis I. kötet, EKF Líceum Kiadó, Eger, 2006.
- [12] RIMÁN JÁNOS: Matematikai analízis II. kötet, EKF Líceum Kiadó, Eger, 2006.
- [13] A. N. SHIRYAYEV: Probability, Springer-Verlag, New York Inc., 1984.

A könyvben bevezetett jelölések

Jelölések

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	98
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	54
$\mathcal{B}(\mathbb{R}_b^n)$	54
$\overline{\text{co}}(H)$	116
$D\xi$	156
$D^2\xi$	156
$\frac{d\nu}{d\mu}$	121
$\Delta_{a,b}^{(k)}$	40
$\text{diam } A$	44
$\dim_{\mathcal{H}} B$	46
$E\xi$	154
$\mathcal{F}$	125
f_ξ	133
F_ξ	132
$f_{\bar{\xi}}$	142
$F_{\bar{\xi}}$	137
$[F(x)]_a^b$	90
f^+, f^-	78
φ, Φ	136
φ_ξ	166
$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n,p}$	44
$\mathcal{H}_{X,p}$	44
$\mathcal{I}_b(S)$	53
$I_*(f), I^*(f)$	86
I_f	74
$\mathcal{I}(S)$	52
$\Im h$	84
$\inf H$	9
$\inf \emptyset$	9
$\inf_{k \geq n} a_k$	9
$\int_a^b f, \int_a^b f(x) dx$	87

$\int f d\mu, \int f(x) d\mu(x)$	73, 79
$\bigtimes_{i=1}^\infty A_i$	128
χ_A	71
$\bar{\xi}$	136
$\mathcal{L}$	36
$\mathcal{L}_F$	41
λ	36
λ_F	41
λ^n	106
$\lim$	9
$\overline{\lim}$	9
$m_*(H, D)$	15
$m_*(H)$	15
$m^*(H, D)$	15
$m^*(H)$	15
$m(H)$	16
$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$	104
$\mu \otimes \nu$	98
$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$	52
$\mathcal{N}(\mathbb{R}_b^n)$	53
$\nu \ll \mu$	121
Ω	125
P	125
∂H	16
Q_ξ	132
$Q_{\bar{\xi}}$	136
$\mathbb{R}_b$	8
$\Re h$	84
$\sup H$	9
$\sigma(\xi)$	144
$\sup_{k \geq n} a_k$	9
$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S)$	52
$\mathcal{T}(\mathbb{R}_b^n, S)$	53

Tárgymutató

A

- abszolút folytonos valószínűségi változó133
- abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó 142
- abszolút folytonosság84, 121
- additivitás13, 81, 85
- altér14
- analitikus halmaz58
- approximációs tétel 71

B

- belső Jordan-mérték 15
- Beppo Levi tétel77
- biztos esemény 125
- Borel–Cantelli-lemma161
- Borel-mérhető függvény61
- Borel-mérhető halmaz54
- Box–Muller-transzformáció151

C

- Cantor-féle triadikus halmaz 39
- Caratheodory-féle kiterjesztési tétel 33, 35
- Cauchy-eloszlás135

Cs

- Csebisev-egyenlőtlenség156

D

- Darboux-féle alsó integrál86
- Darboux-féle felső integrál 87
- diszjunkt rendszer 13
- diszkrét valószínűségi változó 136
- diszkrét valószínűségi vektorváltozó 147

E

- egybevágóság-invariancia46
- egyenletes eloszlás 132, 133, 137, 141, 146, 147
- egyenletesen konvergens68
- egyszerű függvény71
- együttes eloszlás136
- együttes eloszlásfüggvény 137
- együttes sűrűségfüggvény142
- eloszlás 132, 136
- eloszlásban vett konvergencia170
- eloszlásfüggvény 132, 137
- eltolás-invariancia38, 112
- esemény125
- Etemadi-féle nagy számok erős törvénye 162

F

- Fatou-lemma76, 155
- félgyűrű 25
- felszín 114, 118
- folytonosság13, 62
- folytonossági tétel176
- Fubini-tétel 102, 105, 106
- független események126
- független kísérletek val. mezője ..126
- független valószínűségi változók ..145

G

- generált monoton osztály31
- generált σ -algebra 30
- generált σ -gyűrű29
- geometriai valószínűségi mező125

Gy

- gyenge kompaktsági tétel173
- gyenge konvergencia170

H

Hahn-féle felbontás	120
halmazalgebra	27
halmazgyűrű	26
hasonlóság-invariancia	49
Hausdorff-dimenzió	46
Hausdorff-féle külső mérték	44
Hausdorff-mérték	44
homogenitás	81, 85
hosszúság	36

I, í

improprius integrál	91, 92
indikátor	71
integrál	73, 79
integrál létezése	79
integrálhatóság	79
integrálközelítő összeg	73
inverziós formula	169
ívhossz	45
izodiametrális egyenlőtlenség	116

J

Jegorov-tétel	68
Jordan-mérték	16

K

karakterisztikus függvény	166
képzetes rész	84
kétszeres integrál	98
klasszikus valószínűségi mező	125
komplex értékű valószínűségi változó	165
konvex burok	116
központi határeloszlás tétele	177
külső Jordan-mérték	15
külső mérték	19

L

láncszabály	124
Lebesgue majorált konv. tétele	83
Lebesgue–Stieltjes-mérték	41
Lebesgue-féle külső mérték	36
Lebesgue-integrál	93
Lebesgue-integrálható függvény ...	93
Lebesgue-kritérium	95

Lebesgue-mérhető halmaz	36
Lebesgue-mérték	36, 42, 106
Lebesgue-mértéktér	36, 106
Lebesgue-tétel	70
logikai függvény	63

M

m.b.	131
m.m.	63
majdnem biztos	131
majdnem mindenütt	63
majorált konvergencia tétel ...	83, 155
majoráns kritérium	81, 85
Markov-egyenlőtlenség	74, 156
mérhető függvény	61
mérhető halmaz	12, 19
mérhető tér	12
mérték	13
mértékben konvergens	68
mértékek szorzata	98
mértéktér	13
monoton konvergencia tétel ...	77, 155
monoton osztály	30
monotonitás	13, 19, 32, 74

N

nagy számok gyenge törvénye	165
negatív halmaz	119
negatív rész	78
Newton–Leibniz-formula	90

Ny

nyílt halmaz	52
--------------------	----

P

páronként független valószínűségi	
változók	145
pozitív halmaz	119
pozitív homogenitás	74
pozitív rész	78
premérték	23

R

Radon–Nikodym-derivált	121
Radon–Nikodym-tétel	121
Riemann-integrál	87, 95
Riesz-féle kiválasztási tétel	70

S

standard normális eloszlás	136
Steiner-szimmetrizált	116
sűrű halmaz	52
sűrűségfüggvény	133, 142

Sz

számláló mérték	13
σ -additivitás	13, 32
σ -algebra	12
σ -gyűrű	28
σ -végeesség	13, 32
szórás	156
szórásnégyzet	156
szorzattér	98
sztochasztikus konvergencia	165
szubadditivitás	13, 19
Szuszin-operáció	56

T

teljesség	13
térfogat	106
terület	106

Toeplitz-lemma	162
----------------------	-----

U

unicitás tétel	170
----------------------	-----

V

valós rész	84
valós számok bővített halmaza	8
valószínűség	125
valószínűségben vett konvergencia	165
valószínűségi mező	125
valószínűségi változó	131
valószínűségi vektorváltozó	136
várható érték	154
véges additivitás	32
véges mérték	13
véges mértéktér	13
végtelen sok független kísérlet valószínűségi mezője	128
Vitali-féle halmaz	39

Z

zárt halmaz	53
-------------------	----