



Játsszunk a véletlennel!

Készítette
Dr. Tómacs Tibor
egyetemi docens

Ez a tananyag
A matematika napos oldala
című kurzus keretében készült

EGER, 2021

Tartalomjegyzék

1. Mivel foglalkozik a valószínűségszámítás?	3
1.1. Egy kis papírmunka	3
1.2. Számoljunk számítógéppel!	7
2. A véletlen modellezése számítógépen	8
3. Klasszikus valószínűségi mező	10
4. Feltételes valószínűség	13
5. Nyerjünk a lottón!	17
6. Három ajtó, melyiket válasszam?	28

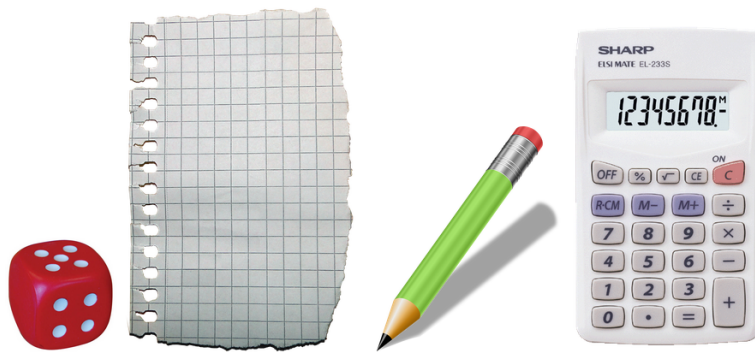
1. fejezet

Mivel foglalkozik a valószínűségszámítás?

Feltehetőleg a „valószínűségszámítás” szó hallatán sokan megijednek. Pedig ez a tudomány egy nagyon egyszerű megfigyelésen alapul.

1.1. Egy kis papírmunka

Hogy megtapasztalja ezt a jelenséget, nincs is másra szükség, mint egy dobókockára, néhány kockás lapra, egy ceruzára, egy számológépre és némi szabadidőre.



Ezekkel az eszközökkel egy véletlen eseménynek az úgynevezett **relatív gyakoriságát** fogjuk ábrázolni. Esetünkben legyen a megfigyelt esemény az, hogy a dobókockával hatost dobunk. Ennek a relatív gyakorisága annyit jelent, hogy több dobást megismételve a kockával, mennyi a hatos dobások száma az összes dobások számához viszonyítva, azaz a hatos dobások száma osztva az összes dobások számával. Például, ha 10 dobásból 3-szor dobunk hatost, akkor a relatív gyakoriság értéke $\frac{3}{10}$.

A feladat az lesz, hogy 100-szor dobjon egymásután egy dobókockával, majd ez alapján ábrázolja a hatos dobás relatív gyakoriságát a dobások számának függvényében. Ehhez először írja fel az egész számokat 1-től 100-ig egy kockás lapra.

		1													
		2													
		3													
		4													
		5													
		6													
		7													
		⋮													
1	0	0													

Ehhez ragasszon össze több lapot. Ezután dobja fel egymásután a kockát 100-szor és közben jegyezze fel, hogy mely dobásokra kapott hatost.

Fontos szabály, hogy abban a szerencsétlen esetben, amikor élére esik a kocka (például a szőnyeg szélén áll meg), a dobást ne vegye bele a számításba, hanem meg kell ismételni.

Például, ha a 3., 7., 9. stb. dobások hatosok voltak, akkor a 3, 7, 9, stb. számok mellé tegyen X jeleket:

		1													
		2													
		3	X												
		4													
		5													
		6													
		7	X												
		8													
		9	X												
1	0														
		⋮													
1	0	0													

A következő oszlopba azt írja fel, hogy az egyes dobásszámokból hányszor következett be, hogy hatost dobott. Az előző esetben például, az 1. első dobás nem hatos, így a 0 kerül bejegyzésre. A 2. dobás szintén nem hatos, így oda is 0 kerül. A 3. dobás hatos, így a 0 értékét meg kellett növelni eggyel, ezért ide 1 kerül. Ez folytatódik egészen a 6. dobásig. A 7. dobás ismételten hatos volt, ezért ide megint eggyel nagyobb számot, vagyis 2-t kell írni. Ezt folytassa a 100. dobásig.

		1			0				
		2			0				
		3	X		1				
		4			1				
		5			1				
		6			1				
		7	X		2				
		8			2				
		9	X		3				
	1	0			3				
⋮									
1	0	0			1	6			

A most beírt számokat nevezzük a hatos dobás **gyakoriságának**. Ezután rátérünk a relatív gyakoriság kiszámolására. Minden gyakoriság érték mellé írja be a relatív gyakoriságokat is, vagyis ossza el az addigi dobások számával. A felírás megkönnyítése érdekében, ha egy érték két tizedesjegynél többet tartalmaz, akkor azt kerekítse két tizedesjegyre.

		1			0	0			
		2			0	0			
		3	X		1	0,33			
		4			1	0,25			
		5			1	0,2			
		6			1	0,17			
		7	X		2	0,29			
		8			2	0,25			
		9	X		3	0,33			
	1	0			3	0,3			
⋮									
1	0	0			1	6	0,16		

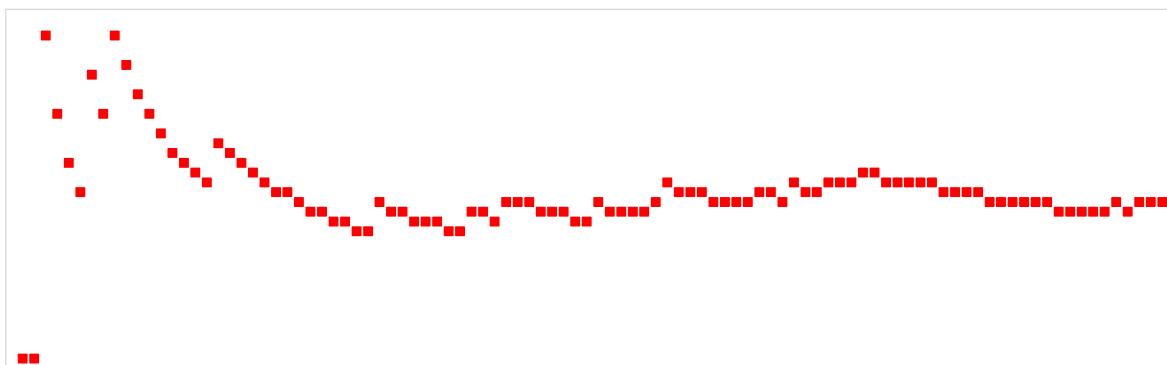
Ezután az első sorba írjon egész számokat 1-től 100-ig a következő ábra szerint. Ehhez ismét ragasztania kell még hozzá néhány lapot:

						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100
		1			0	0												
		2			0	0												
		3	X		1	0,33												
		4			1	0,25												
		5			1	0,2												
		6			1	0,17												
		7	X		2	0,29												
		8			2	0,25												
		9	X		3	0,33												
	1	0			3	0,3												

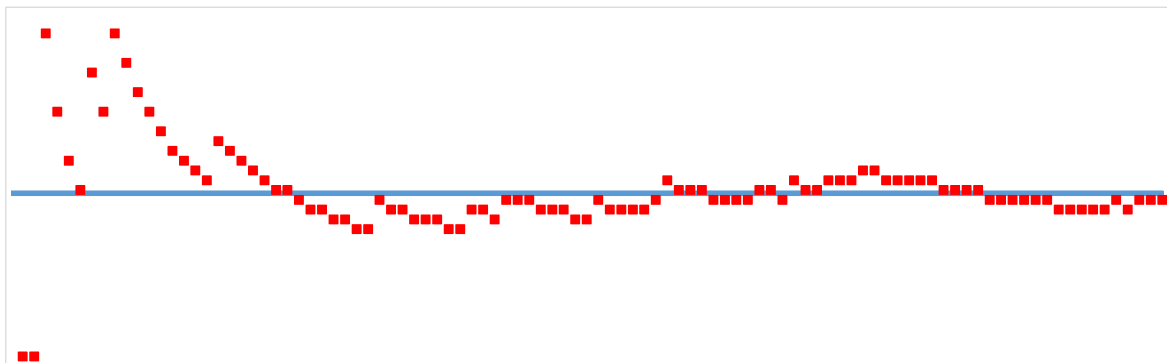
Utolsó lépésként ábrázolja minden dobáshoz a hozzá tartozó relatív gyakoriságot. Ha például a 3. dobásnál a relatív gyakoriság 0,33, akkor abban a sorban, a 33 jelű oszlopban a négyzetet sátrózza be.

						0	1	...	32	33	34
	1			0	0						
	2			0	0						
	3	X		1	0,33						

Ha mindezzel készen van, akkor jöhet a megfigyelés. Forgassa el a lapot 90 fokkal, így a relatív gyakoriságot a dobások számának függvényében tanulmányozhatja. Mit tapasztal a relatív gyakoriság viselkedésében, a dobások számának növekedésével?



Amint látható, a dobássorozat elején még elég nagy az ingadozás, de a végére ez lecsillapodik. Ez az egyre jobban csillapodó ingadozás egy bizonyos érték körül figyelhető meg.



Próbálja meg kitalálni, hogy a kék vonal milyen értéknél van meghúzva! Induljon ki abból a feltételezésből, hogy a dobókocka szabályos. Ezalatt nem geometriai értelemben vett szabályosságot értünk, hanem azt, hogy egy olyan középpontosan szimmetrikus tárgy, melynek hat oldala van, továbbá a geometriai középpontja egybeesik a tömegközéppontjával. Ilyenkor egyik oldalt sem tünteti ki semmilyen fizikai paramétere a másikhöz képest. Ebből már nem nehéz kitalálni, hogy a keresett érték $\frac{1}{6}$. Ezt az értéket a hatos dobás **valószínűségének** fogjuk nevezni.

A relatív gyakoriságnak az előzőekben látott viselkedését a **nagy számok Bernoulli-féle törvényének** nevezzük, amely tehát a következő:

Egy véletlen esemény relatív gyakorisága, a kísérletek számának növelésével, egyre kisebb mértékben ingadozik egy az eseményre jellemző érték körül, amely értéket az esemény valószínűségének nevezünk.

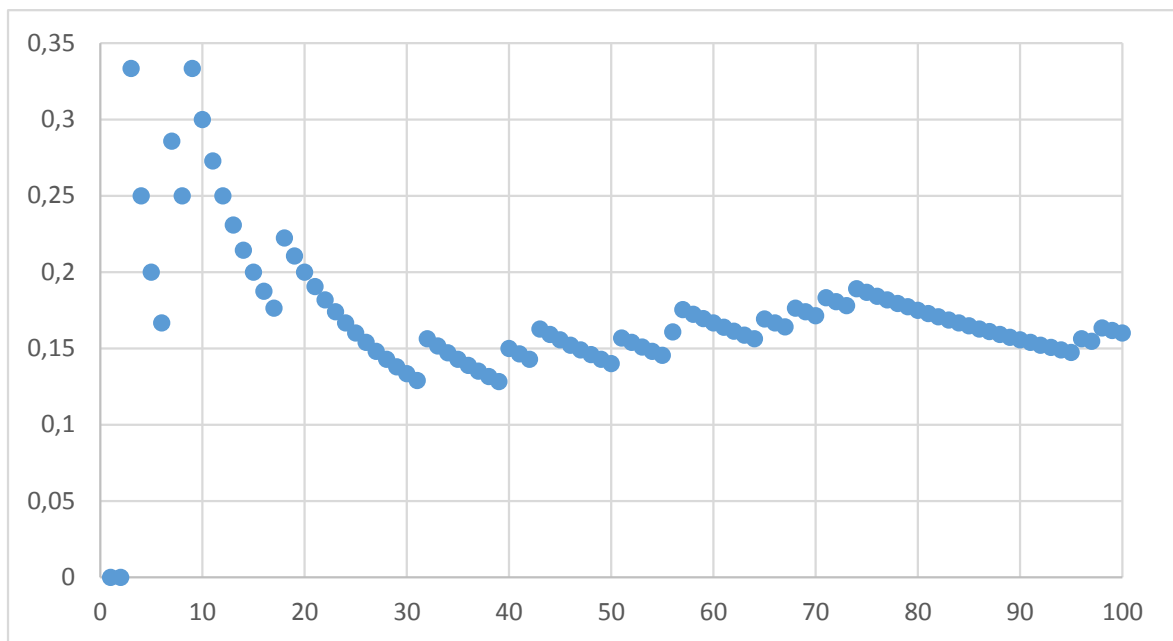
1.2. Számoljunk számítógéppel!

Feltehetőleg most azon mérgelődik, hogy miért kellett végig szenvedni egy csomó számolást, amikor mindezt könnyedén megoldhatta volna számítógéppel is. Ez teljes mértékben igaz, de tapasztalatom szerint, egyszer meg kell csinálni az előbbi módszerrel a kísérletet ahhoz, hogy megértsük a relatív gyakoriságot és annak viselkedését.

Hogy ne legyen hiányérzete, a dobásokat értékelje ki számítógépen, az Excel nevű programmal is. Nyisson meg egy Excel munkalapot, majd az A oszlop azon számú soraiba írjon X betűt, amelyekre a dobások értéke hatos volt. Ezután a B1 cellába írja a következőt:

```
=DARABTELI(A$1:A1;"X")/SOR(A1)
```

Ezután nyomja meg az Enter gombot, majd lépjen vissza a B1 cellára. Egérrel fogja meg a cella kitöltőjelét és húzza le a 100. sorig. (A kitöltőjel, a kijelölt cella jobb alsó sarkában látható kis négyzet.) Ezzel megkapja a relatív gyakoriság értékeit minden dobásszámhoz. Ezután már csak az ábrázolás maradt. Ehhez jelölje ki a B oszlopot, majd válassza a következő menüpontot: Beszúrás / Diagramok / Pont. A következőhöz hasonló ábrát fog kapni:



VIDEÓ

2. fejezet

A véletlen modellezése számítógépen

Az előző kísérlet még tanulságosabb lehetne, ha nem csak 100, hanem például 1000 dobást csináltunk volna. Azonban ez már tényleg túl sok időt venne el még akkor is, ha utána a dobások eredményét számítógéppel elemeznénk ki.

Ilyen esetekben a számítógép nem csak a számoláshoz hívható segítségül, hanem a dobásokat is végrehajthatja helyettünk. Persze nem ténylegesen, hanem csak modellezve a véletlen dobást. Ennek a matematikai háttere nagyon bonyolult, ezt most nem fogjuk részletezni. Nekünk elég annyit tudni, hogy vannak olyan számítógépes algoritmusok, amelyek képesek véletlen számsorozatok generálását imitálni. Ezek azonban nem fizikai értelemben vett valódi véletlen számot állítanak elő, hiszen ezek mögött bonyolult matematikai függvények állnak. Ezért ezeket **álvéletlennek** nevezzük.

Érdekesség kedvéért megemlíjtük, hogy a <https://www.random.org/> címről valódi véletlen számsorozatok is letölthet, amely az atmoszférikus háttérsugárzást használja fizikai generátorként.

A véletlen számok között kiemelt szerepe van azoknak, amelyek csak a $[0, 1]$ intervallumból kerülhetnek ki, és annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges $x \in [0, 1]$ esetén a véletlen szám x -nél kisebb, pontosan x -szel egyenlő. Az ilyen véletlen számokat a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük. Ilyet Excelben a **VÉL()** függvénnyel tudunk generálni.

Ebből könnyen készíthetünk olyan véletlen számot, amely az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok közül kerül ki egyenlő eséllyel. Ehhez a **VÉL()** értékét meg kell szorozni 6-tal, hozzá kell adni 1-et, majd az így kapott törtnek a tizedesjegyeit el kell hagyni:

=INT(6*VÉL()+1)

Erre az Excelben van egy másik függvény is, a **VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;6)**.

2.1. feladat. Modellezzen 1000 kockadobást, majd ábrázolja a hatos dobás relatív gyakoriságát!

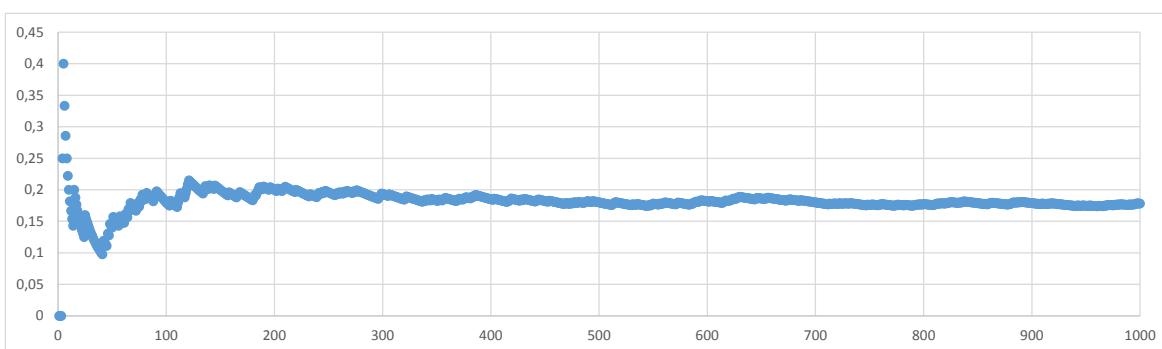
Megoldás. Írja a következőt az A1 cellába:

`=VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;6)`

Az A1 cella kitöltőjelét húzza le az 1000. sorig. Ezután a B1 cellába írja a következőt:

`=DARABTELI(A$1:A1;6)/SOR(A1)`

Nyomja meg az Enter gombot, majd lépjen vissza a B1 cellára. Kattintson kétszer a B1 cella kitöltőjére, amellyel megkapja minden dobás után a 6 dobás relatív gyakoriságát. Ezután ábrázolja a relatív gyakoriságot a dobások számának függvényében. Ehhez jelölje ki a B oszlopot, majd válassza a következő menüpontot: Beszúrás / Diagramok / Pont. A következőhöz hasonló ábrát fog kapni:



VIDEÓ

2.2. feladat. Vizsgálja meg, hogy a $VÉL()$ függvény valóban egyenletes eloszlású-e a $[0, 1]$ intervallum.

Megoldás. Ehhez azt kell megvizsgálni, hogy a $VÉL()$ függvénnyel generált számok közül, az $x \in [0, 1]$ értékénél kisebbek relatív gyakorisága x körül ingadozik-e. Nézzük ezt meg mondjuk 1000 szám esetén. Ehhez írja az A1 cellába, hogy

`=VÉL()`

Enter után lépjen vissza az A1-re, majd a kitöltőjelet húzza le az 1000. sorig. Írjon a C1 cellába egy tetszőleges x számot, például 0,5. Ezután a B1 cellába írja a következőt:

`=DARABTELI(A$1:A1;"<"&C$1)/SOR(A1)`

Enter után lépjen vissza a B1-re, majd a kitöltőjére kattintson kétszer. Ezzel megkapja az összes relatív gyakoriság értékét. Ezután ábrázolja a relatív gyakoriságot a dobások számának függvényében. Ehhez jelölje ki a B oszlopot, majd válassza a következő menüpontot: Beszúrás / Diagramok / Pont.

VIDEÓ

3. fejezet

Klasszikus valószínűségi mező

Szabályos kocka feldobása esetén könnyen látható, hogy nem csak a hatos, hanem az összes többi oldalra is $\frac{1}{6}$ valószínűséggel eshet a kocka.

Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehetséges, továbbá minden kimenetel ugyanakkora valószínűséggel következhet be, akkor klasszikus valószínűségi mezőről beszélünk.

Klasszikus valószínűségi mezőben egy esemény valószínűségét úgy tudjuk meghatározni, hogy először megnézzük, hányféleképpen következhet be az esemény, majd azt elosztjuk az összes lehetséges kimenetek számával.

3.1. feladat. Egy szabályos kockával dobva, mi a valószínűsége, hogy páros számot dobunk?

Megoldás. Mivel a kockával 3-féleképpen dobhatunk páros számot az összesen 6 esetből, ezért a valószínűség $\frac{3}{6} = 0,5$.

3.2. feladat. Két szabályos kockát feldobva, mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A következőkben ezt a feladatot kétféleképpen is megoldjuk. Azonban két különböző eredményt fogunk kapni, amely természetesen nem lehetséges. Gondolkodjunk el azon, vajon melyik megoldás jó és melyik rossz, vagy esetleg mindkettő rossz?

I. megoldás. Az első esetben tegyük fel, hogy a két kocka külsőre teljesen egyforma, külső szemlélő nem tud közöttük különbséget tenni. Ebben az esetben csak annyit tudunk a dobás után megállapítani, hogy az egyik kockán például egyes, a másikon pedig hatos van. Ezt az esetet jelöljük $\{1, 6\}$ módon. Ekkor az összes lehetséges kimenetele

a kísérletnek:

$$\begin{array}{cccccc}
 \{1, 1\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} & \{1, 5\} & \{1, 6\} \\
 & \{2, 2\} & \{2, 3\} & \{2, 4\} & \{2, 5\} & \{2, 6\} \\
 & & \{3, 3\} & \{3, 4\} & \{3, 5\} & \{3, 6\} \\
 & & & \{4, 4\} & \{4, 5\} & \{4, 6\} \\
 & & & & \{5, 5\} & \{5, 6\} \\
 & & & & & \{6, 6\}
 \end{array}$$

Ez összesen 21 eset. Másrészt ezekből azon esetek, amikor az összeg 7:

$$\{1, 6\} \quad \{2, 5\} \quad \{3, 4\}$$

Vagyis 3 esetben következik be a figyelt esemény. Így a valószínűség $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

II. megoldás. A második esetben tegyük fel, hogy az egyik kocka fekete alapon fehér pöttyös, míg a másik fehér alapon fekete pöttyös. Így nem csak azt tudjuk megmondani a dobás után, hogy például az egyikken egyes a másikon pedig hatos van, hanem azt is, hogy a fekete alapún van egyes és a fehér alapún hatos, vagy fordítva. Az előbbi jelöljük $(1, 6)$, míg az utóbbit $(6, 1)$ módon. Ekkor az összes lehetséges kimenetele a kísérletnek:

$$\begin{array}{cccccc}
 (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\
 (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\
 (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\
 (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\
 (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\
 (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6)
 \end{array}$$

Ez összesen 36 eset. Másrészt ezekből azon esetek, amikor az összeg 7:

$$(1, 6) \quad (2, 5) \quad (3, 4) \quad (4, 3) \quad (5, 2) \quad (6, 1)$$

Vagyis 6 esetben következik be a figyelt esemény. Így a valószínűség $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Összegezve tehát a két megoldást, $\frac{1}{7}$ a valószínűség, ha a kockákat nem tudjuk megkülönböztetni, míg $\frac{1}{6}$, ha meg tudjuk őket különböztetni.

Az világos, hogy mindkét eredmény nem lehet jó, hiszen egy kis festék nem változtathat a valószínűségen. Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani, melyik megoldás jó illetve melyik rossz, azt kell látni, hogy a kockák megkülönböztethetősége illetve nem megkülönböztethetősége csak rajtunk múlik, azaz szubjektív tényező. Ettől függetlenül a kockák önálló tárgyak. Így az első megoldásban a $\{1, 6\}$ eset kétszer akkora eséllyel következhet be, mint például az $\{1, 1\}$. Vagyis az első megoldásban nem klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, így a valószínűséget sem számolhatjuk a „kedvező per az összes eset” képlettel. A második esetben viszont a szimmetria miatt minden kimene-

tel azonos eséllyel következhet be, azaz klasszikus valószínűségi mező. Tehát a második megoldás jó, azaz a helyes eredmény $\frac{1}{6}$.

4. fejezet

Feltételes valószínűség

Szabályos kockával dobunk 10-szer. Tegyük fel például, hogy a következő számokat kapjuk:

1, 5, 4, 5, 5, 6, 4, 2, 2, 6.

Jelölje A azt az eseményt, hogy maximum hármast dobunk, és B azt, hogy páros számot dobunk. Amikor az A és B események egyszerre következnek be, jelöljük AB módon, ami most azt jelenti, hogy kettest dobunk. B ellenkezőjét $\overline{B}$ -vel fogjuk jelölni, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy páratlan számot dobunk.

Az A , B , AB , $\overline{B}$ események relatív gyakoriságait jelöljük rendre $r(A)$, $r(B)$, $r(AB)$, és $r(\overline{B})$ módon. Ekkor

$$r(A) = \frac{3}{10}, \quad r(B) = \frac{6}{10}, \quad r(AB) = \frac{2}{10}, \quad r(\overline{B}) = \frac{4}{10}.$$

Ezen jelölések bevezetése után, térjünk rá a feltételes valószínűség fogalmára. Emlékezzünk vissza, volt egy fontos feltételünk a dobókocka kísérlet végrehajtásánál. Abban az esetben, amikor élére esik a kocka, a dobást ne vegyük számításba. Most ezt a feltételt tovább bővítjük. Akkor se vegyük számításba a dobást, amikor nem páros számot dobunk, azaz nem a B esemény következik be:

~~1~~, ~~5~~, 4, ~~5~~, ~~5~~, 6, 4, 2, 2, 6

Így már csak hat érvényes dobásunk van. Ebben a módosított kísérletben az A esemény nem 3-szor, hanem csak kétszer következett be, így a relatív gyakorisága $\frac{2}{6}$. Ezt jelöljük $r(A | B)$ -vel. Tehát most

$$r(A | B) = \frac{2}{6}.$$

Ez a relatív gyakoriság pontosan olyan tulajdonságot fog mutatni, mint az eredeti relatív gyakoriság, azaz sok kísérlet esetén egy bizonyos érték körül fog ingadozni. Ezt az értéket nevezik az **A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűségének**, továbbá $P(A |$

$| B)$ módon szokták jelölni. Az eredeti kísérletben az A valószínűségének a szokásos jelölése $P(A)$.

Az $r(A | B) = \frac{2}{6}$ úgy jött ki, hogy a nevezőben csak a B bekövetkezéseinek a számát, azaz B gyakoriságát írtuk, míg a számlálóba az A -nak azon bekövetkezéseit írtuk, amikor B is bekövetkezett, hiszen a többit töröltük. Így teljesül a következő:

$$r(A | B) = \frac{r(AB)}{r(B)}.$$

Ebből már következik, hogy

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Még egy fontos és hasznos összefüggést fogunk megmutatni. Mivel az előzőek miatt

$$r(A) = r(AB) + r(A\bar{B}) = r(A | B)r(B) + r(A | \bar{B})r(\bar{B}),$$

így

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B})P(\bar{B})$$

Az utóbbi összefüggés az úgynevezett **teljes valószínűség tételének** egy speciális esete.

4.1. feladat. Excellel modellezzon 1000 dobást egy szabályos dobókockával! Az előző jelöléseket használva, számolja ki az $r(A | B)$ értékét!

Megoldás. Írja az A1 cellába:

=VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;6)

Enter után lépjen vissza az A1 cellára, majd a kitöltőjelet húzza le az 1000. sorig. Ezzel megvan az 1000 dobás. Ezután a B1 cellába írjon 1-et, ha a B esemény teljesül, azaz párosat dobtunk, ellenkező esetben írjon 0-t. Ehhez írja be a B1-be a következőt:

=HA(VAGY(A1=2;A1=4;A1=6);1;0)

Enter után lépjen vissza a B1 cellára, majd a kitöltőjelre kattintson kétszer. Ezzel minden érvényes dobás után 1, míg az érvénytelenek után 0 áll.

A C1 cellába írjon 1-et, ha az AB esemény teljesül, azaz háromnál kisebbet és párosat dobtunk, ami azt jelenti hogy kettest dobtunk. Ellenkező esetben írjon be 0-t. Ehhez írja be a C1-be a következőt:

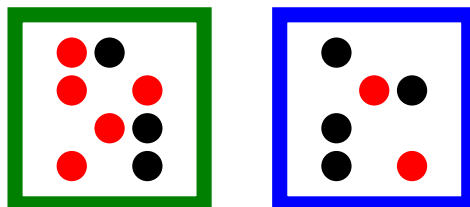
=HA(A1=2;1;0)

Enter után lépjen vissza a C1 cellára, majd a kitöltőjelre kattintson kétszer. Ezzel minden kettes dobás után 1, ellenkező esetben 0 áll. Végül a D1 cellába ezt írja:

$$= \text{SZUM}(C:C) / \text{SZUM}(B:B)$$

Ezzel megkaptuk $r(A | B)$ értékét.

4.2. feladat. Egymás mellé teszünk egy zöld és egy kék dobozt. A zöld dobozban 5 piros és 3 fekete golyó, míg a kék dobozban 2 piros és 4 fekete golyó van.



A zöld dobozból áttesszünk egy golyót a kék dobozba, majd ezután a kékből húzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a kék dobozból piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

B : a zöld dobozból piros golyót teszünk át a kék dobozba.

$\overline{B}$: a zöld dobozból fekete golyót teszünk át a kék dobozba.

A : a kék dobozból piros golyót húzunk.

Ekkor

$$P(B) = \frac{5}{8} \quad \text{és} \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{8}.$$

Ha a zöld dobozból piros golyót tettünk át, akkor a kék dobozban már 3 piros golyó lesz az összesen 7 golyóból, azaz

$$P(A | B) = \frac{3}{7},$$

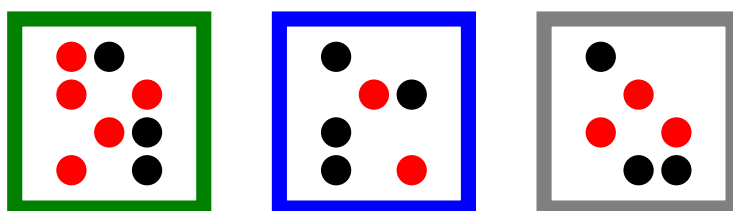
illetve, ha a zöld dobozból fekete golyót tettünk át, akkor a kék dobozban 2 piros golyó lesz az összesen 7 golyóból, azaz

$$P(A | \overline{B}) = \frac{2}{7}.$$

Így a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \overline{B})P(\overline{B}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{56} = 0,375.$$

4.3. feladat. Az előző feladatban szereplő dobozok mellé teszünk még egy szürkét is, amelyben 3 piros és 3 fekete golyó van.



A zöld dobozból áttesszünk egy golyót a kék dobozba, ezután a kékből áttesszünk egyet a szürkébe, végül a szürkéből húzunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a szürke dobozból piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

A : a kék dobozból piros golyót teszünk át a szürke dobozba.

$\bar{A}$: a kék dobozból fekete golyót teszünk át a szürke dobozba.

C : a szürke dobozból piros golyót húzunk.

Felhasználva az előző feladat eredményét:

$$P(A) = \frac{21}{56} \quad \text{és} \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{21}{56} = \frac{35}{56}.$$

Ha a kék dobozból piros golyót tettünk át, akkor a szürke dobozban már 4 piros golyó lesz az összesen 7 golyóból, azaz

$$P(C \mid A) = \frac{4}{7},$$

illetve, ha a kék dobozból fekete golyót tettünk át, akkor a szürke dobozban 3 piros golyó lesz az összesen 7 golyóból, azaz

$$P(C \mid \bar{A}) = \frac{3}{7}.$$

Így a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid \bar{A})P(\bar{A}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{56} + \frac{3}{7} \cdot \frac{35}{56} = \frac{189}{392} \approx 0,48.$$

5. fejezet

Nyerjünk a lottón!

Magyarországon többféle lottójátékot is játszanak, de talán a legnépszerűbb, az 1957 óta üzemelő ötöslottó.



Ennek lényege, hogy az $1, 2, 3, \dots, 90$ számokból kisorsolnak ötöt visszatevés nélküli módszerrel. Ez azt jelenti, hogy miután kisorsolnak egy számot, azt már nem teszik vissza a számokat tartalmazó urnába. Így biztosan öt különböző számot kapunk. Ezek a számok növekvő sorrendbe állítva alkotják az adott játékban a nyerő lottóötöst.

A játékosnak a húzás előtt egy szelvényen meg kell tippelni öt szám megjelölésével a nyerő lottóötöst. Egy játékos több szelvényvel is játszhat. Egy szelvény 225 forintba kerül. Négy esetben nyerhetünk: ha az ötből 2, 3, 4 vagy 5 számot találunk el.

A Szerencsejáték Zrt. a szelvényekből befolyt összeg 54%-át nyereségként elkönyveli. A fennmaradó 46% képezi az úgynevezett nyereményalapot, amit a nyerő szelvények tulajdonosai között osztanak el. A 2 találatos szelvények kapják a nyereményalap 35%-át, a 3 találatosok a 18%-át, a 4 találatosok a 17%-át, végül az 5 találatosok a 30%-át.

Ha egy nyereményosztályban az adott héten nem volt nyerő szelvény, akkor annak a nyereményét átviszik a következő hétre. Ha a következő héten sincs abban a nyereményosztályban nyertes, akkor a halmozódás tovább folytatódik a rákövetkező hétre. Ezt maximum egy évig lehet folytatni. Utána a teljes felhalmozott összeget hozzáteszik a nyereményalaphoz, és szétosztják a többi nyereményosztályban az előzőekben ismertett arányokban. Természetesen ennek a halmozódásnak az öt találatos nyereményosztályban legnagyobb a valószínűsége.

Mindezek alapján, ha például azt akarjuk kiszámítani, hogy egy adott játékban mennyit fognak fizetni az öttalálatos szelvényre, akkor a következő képlettel tehetjük meg:

$$\frac{0,3 \cdot 0,46 \cdot 225S + H}{T},$$

ahol S az adott húzásban résztvevő szelvények száma, H a halmozott nyeremény és T az öttalálatos szelvények száma. Ha $T = 0$, akkor a következő hétre átvitt nyeremény összege $0,3 \cdot 0,46 \cdot 225S + H$, vagyis a következő húzásnál már ennyi lesz a H értéke.

5.1. feladat. Határozza meg az összes lottóötösök számát!

Megoldás. Az első húzáskor az urnában 90 szám van, így 90 lehetőségünk van az első szám kiválasztására. A második húzásnál már csak 89 számból választhatunk, hiszen a kihúzott számokat nem tesszük vissza az urnába. Így a második számot 89-féleképpen választhatjuk ki. Ebből már következik, hogy az első két szám kiválasztása $90 \cdot 89$ módon történhet. Ebből nem nehéz kitalálni, hogy az öt szám kiválasztására $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ lehetőség van. Ez azonban még nem a helyes eredmény, hiszen például a 12, 24, 35, 64, 78 lottóötöst többször is beleszámoltuk. Pontosan annyiszor, ahányféleképpen ezt az öt számot sorba tudjuk rendezni, azaz $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ esetben. Ez minden lottóötösre igaz, így a helyes eredményhez az előző eredményt el kell osztani $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ -gyel:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

A matematikában ezt a hányadost $\binom{90}{5}$ módon jelöljük és **90 alatt az 5-nek** olvassuk. Ezt Excellel könnyen kiszámíthatjuk a

=KOMBINÁCIÓK(90;5)

függvénnyel. A kapott érték 43 949 268.

5.2. feladat. Tegyük fel, adok Önnek 225 forintot, hogy adjon fel egy lottószelvényt. Ha a szelvény nyer, akkor Ön a nyeremény. Nekem csak annyi kikötésem van, hogy a következő két lottóötösből kell választania:

$$1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{vagy} \quad 24, 31, 54, 71, 78.$$

Melyiket választja és miért?

Megoldás. Sok diáknak feltettem már ezt a kérdést a valószínűességszámítás órákon, és csak elenyésző százalékban választották az 1, 2, 3, 4, 5 lottóötöst. Ezen diákok a következőképpen érvelnek:

Minden lottóötöst ugyanakkora valószínűséggel sorsolhatnak ki, így tulajdonképpen mindegy melyiket választjuk. Ugyanakkor, szinte biztosan nem tippelne senki az 1, 2, 3, 4, 5 számokra, így ha mégis kisorsolják, akkor nagy eséllyel nem kell osztozni a nyeremenyen senkivel.

A 24, 31, 54, 71, 78 számokat választókat a miértről faggatva, a legtöbbször a következő választ kaptam:

Tapasztalat szerint sokkal ritkábban húznak ki „szabályos” lottóötöst, ami arra utal, hogy a valószínűsége is kisebb. Ezért inkább a „szabálytalan” választom.

Vajon helyes-e ez a gondolatmenet? Ami a tapasztalatot illeti, leellenőrizhetjük, mert itt megtalál minden lottóötöst, amit 1957 óta kihúztak: <http://www.szerencsejatek.hu/xls/otos.html>. Ez valóban alátámasztja azt a véleményt, hogy sokkal ritkábban húznak ki „szabályos” lottóötöst, vagyis a kihúzásának a valószínűsége is kisebb. Tehát a magyarázat helytálló. De ebből a tényből az is következik, hogy az 1, 2, 3, 4, 5 lottóötös kihúzása kisebb valószínűséggel történhet meg, mint a 24, 31, 54, 71, 78 lottóötösé?

A válaszhoz tegyük fel, hogy azoknak a diákoknak van igazuk, akik azt mondják, hogy mindegy melyik lottóötössel játszanak, mert minden lottóötöst ugyanakkora eséllyel sorsolnak ki. Ekkor a játék úgy is játszható elviekben, hogy a lottóötösök mindegyikét felírjuk egy-egy ping-pong labdára, majd azokból becsukott szemmel egyet kisorsolunk. Természetesen, így a választásra nincs hatással az, ha a labdák különböző színűek. Ezért azt is megtehetjük sorsolás előtt, hogy a „szabálytalan” lottóötösöket fehér labdára, míg a „szabályosokat” pirosra írjuk. Az így elkészült 43 949 268 darab labdát szórjuk ki egy nagy focipályára. A focipályát felülről nézzük meg. Vajon mit fogunk látni a labdák színeloszlását tekintve? Természetesen azt, hogy a labdák döntő többsége fehér, és csak elenyésző részük piros. Ebből következik, hogy találmra kiválasztva egy labdát, az csak kis valószínűséggel lesz piros, azaz kisebb a valószínűsége annak, hogy „szabályos” lottóötöst választunk. Másrészt viszont az 1, 2, 3, 4, 5 számok csak egy labdán szerepelnek (bár az piros), csakúgy, mint a 24, 31, 54, 71, 78 számok is (ami fehér). Így mindkettő ugyanakkora eséllyel sorsolható ki. Azaz az előző kérdésünkre a válasz:

Abból, hogy „szabályos” lottóötös kihúzásának a valószínűsége kisebb mint „szabálytalané”, még nem következik, hogy az 1, 2, 3, 4, 5 lottóötös kihúzásának kisebb a valószínűsége, mint a 24, 31, 54, 71, 78 lottóötösé.

Persze ettől még nem állíthatjuk, hogy minden lottóötös ugyanakkora valószínűséggel húzható ki, csak annyit mondhatunk, hogy a megfigyelt tény nem mond ennek ellent. Tehát még mindig nyitott a kérdés:

Minden lottóötös ugyanakkora valószínűséggel húzható ki?

Ezt a kérdést feltéve a diákoknak a „szabályos” lottóötösök körüli téveszmék tisztázása után, szinte kivétel nélkül mindenki amellet szokott szavazni, hogy minden lottóötös valószínűsége megegyezik.

Ennek indoklásához induljunk ki abból a jóhiszemű feltételezésből, hogy az urnában található számokat rejtő golyók, külső jegyeiket tekintve teljesen egyformák. Azaz az

első húzásnál bármely golyó (és így bármely szám) ugyanakkora eséllyel választható ki. Ezután a második golyó a megmaradó 89-ből megint csak egyforma eséllyel húzható, és így tovább. Ezzel a feltételezéssel, ha annak a valószínűségét akarjuk kiszámítani, hogy a kihúzott számok sorrendben például a 31, 24, 78, 54, 71, akkor ugyanazt kell kapnunk, mintha akármelyik más kimenetelt kérdeztük volna. Jelöljük ezt a közös valószínűséget p -vel. Korábban már láttuk, hogy $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ ilyen számötös van, így $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot p = 1$. Másrészt egy lottóötös $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ -féle sorrendben húzható ki, így a kihúzásának valószínűsége $120p$, ami a következővel egyezik meg:

$$120 : (90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86) = 1 : \binom{90}{5} = 1 : 43\,949\,268 = 0,000000022753507521445.$$

Összegezve tehát, azoknak van igazuk, akik azt mondják, hogy teljesen mindegy melyik lottóötöst írják a lottószelvényre. Ez azt jelenti, hogy az ötöslottó klasszikus valószínűségi mezővel írható le.

5.3. feladat. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ötöslottó szelvénnel játszva, hármas találatunk lesz a héten? Általánosítsa a feladatot!

Megoldás. A hármas találatához az kell, hogy az általunk megtippelt 5 számból hármat húzzanak ki, míg a maradék két számot az általunk be nem jelölt 85 darab számból kell kiválasztani. Ez $\binom{5}{3} \binom{85}{2}$ lottóötös esetén teljesül. Mivel az összes lottóötösök száma $\binom{90}{5}$ és klasszikus a valószínűségi mező, ezért a valószínűség

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

Általánosítva, annak valószínűsége, hogy t találatunk lesz:

$$\frac{\binom{5}{t} \binom{85}{5-t}}{\binom{90}{5}}.$$

A képlet $t = 0$ és $t = 5$ esetén úgy marad érvényben, ha bevezetjük az $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1$ jelölést. Excellel számolva a következőket kapjuk:

találatok száma	valószínűség
0	0,746349563774305
1	0,230354803634045
2	0,0224736393789312
3	0,000812300218515585
4	0,0000096702406966141
5	0,000000022753507521445

5.4. feladat. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ötöslottó szelvénnel játszva, nem nyerünk semmit?

Megoldás. Akkor nem nyerünk, ha 0 vagy 1 találatunk van, így az előző táblázatban csak az ezekhez tartozó valószínűségeket kell összeadni:

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 0,97670436740835.$$

Ebből már azt is kiszámolhatjuk, hogy mennyi a nyeresre az esélyünk:

$$1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 1 - 0,97670436740835 = 0,02329563259165.$$

5.5. feladat. Néhány évvel ezelőtt Bulgáriában kétszer egymásután ugyanazokat a lottószámokat húzták ki. Mekkora ennek ötöslottó esetén a valószínűsége?

Megoldás. Sokszor kapom erre a következő rossz megoldást: $\frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{1}{\binom{90}{5}}$. Vajon milyen gondolatmenettel kaphatjuk ezt a megoldást és miért rossz? Ezzel szemben a helyes megoldás $\frac{1}{\binom{90}{5}} = 0,000000022753507521445$. Indokolja az eredményt!

Ez ugyanannyi, mint az 5 találat valószínűsége. Mégis az a tapasztalat, hogy 5 találatos szelvény minden évben több is van, míg eddig az ötöslottóban ehhez hasonló eset nem történt. Mi lehet a magyarázata ennek a látszólagos ellentmondásnak?

5.6. feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy kihúzott lottóötösben a legnagyobb és legkisebb lottószám különbsége 10? Általánosítsa a feladatot!

Megoldás. Először azt számoljuk ki, hogy hány olyan lottóötös van, amelyben a legkisebb szám az 1, a legnagyobb pedig a 11. A maradék 3 lottószám a 2, 3, ..., 10 számok közül kerülhet ki. Ez $\binom{9}{3}$ módon lehetséges, tehát ennyi ilyen lottóötös van. Ugyanennyi olyan lottóötös van, amelyben a legkisebb a 2, a legnagyobb pedig a 12. Mivel a legkisebb szám helyére 80-féle számot választhatunk, ezért azon lottóötösök száma, melyekben a legnagyobb és legkisebb különbsége 10,

$$80\binom{9}{3}.$$

Így a kérdéses valószínűség

$$\frac{80\binom{9}{3}}{\binom{90}{5}} = 0,00015290357054411.$$

Általánosítva, annak a valószínűsége, hogy a kihúzott legnagyobb és legkisebb lottószám különbsége k ,

$$\frac{(90-k)\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}},$$

ahol a k lehetséges értékei $4, 5, \dots, 89$.

5.7. feladat. Mekkora a legnagyobb valószínűséggel egy kihúzott lottóötösben a legnagyobb és legkisebb lottószám különbsége?

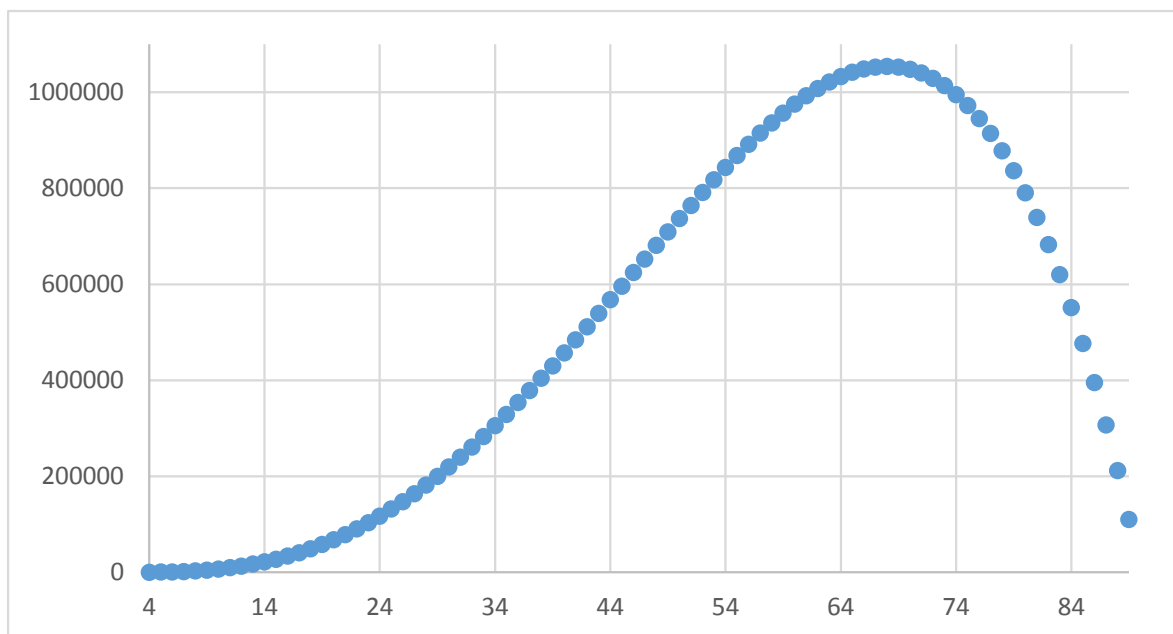
Megoldás. Az előző feladat megoldása alapján azt kell megtalálni, hogy a lehetséges k értékek közül melyikre lesz a

$$(90 - k) \binom{k-1}{3}$$

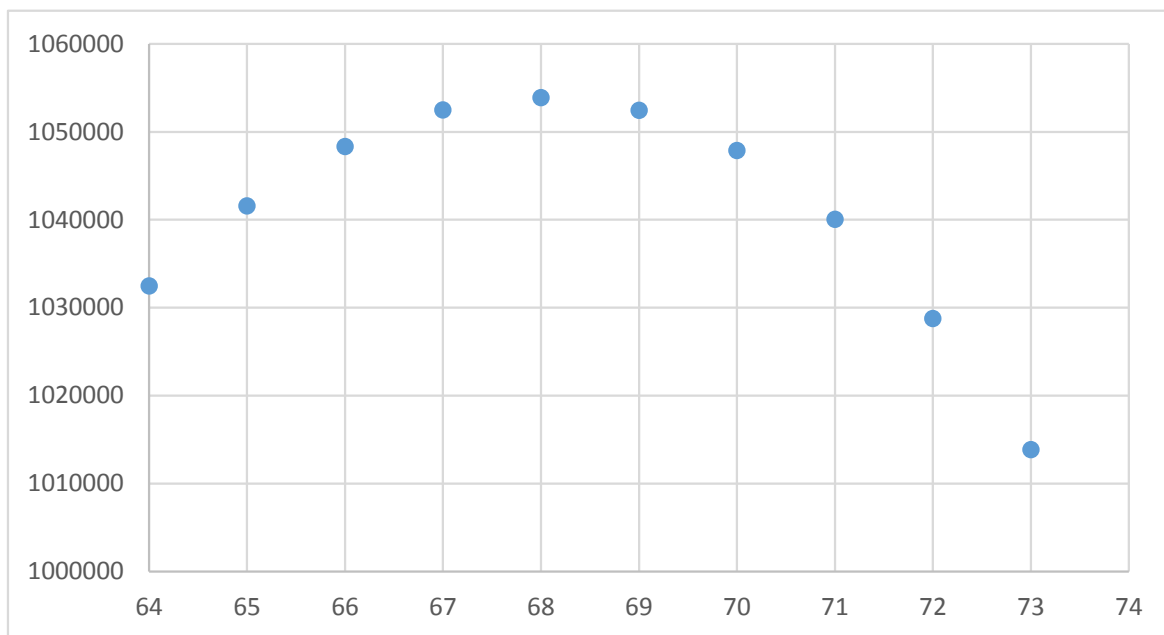
értéke maximális. A megoldást Excel használatával könnyen megtalálhatja. Írja be az A1 cellába a 4 számot, míg az A2-be az 5 számot. Ezután jelölje ki az A1:A2 cellatartományt, majd a kitöltőjelet húzza le a 86. sorig. Ezzel az A oszlopba beírta az összes lehetséges k értéket. Következő lépésként a B1 cellába írja a következőt:

`= (90-A1)*KOMBINÁCIÓK(A1-1;3)`

majd Enter. Végül visszalépve a B1 cellára, kattintson kétszer a kitöltőjelre. Ezzel a B oszlopban megkaptuk az összes $(90 - k) \binom{k-1}{3}$ értékeket. Itt gyorsan leellenőrizheti, hogy a 68 mellett szerepel a legnagyobb érték, nevezetesen 1 053 910. Akár ábrázolhatja az értékeket grafikonon is. Ehhez jelölje ki az A és B oszlopokat, majd válassza a Beszúrás / Diagramok / Pont menüpontot.



Jól látható, hogy a maximum érték 64 és 74 között van. Ezt a részt kinagyítva a következőt láthatja:



Ebből már jól látható, hogy 68-nál van a maximum.

5.8. feladat. Hány olyan lottóötös van, amelyben növekvő sorrendben a negyedik szám a 80? Általánosítsa a feladatot!

Megoldás. A megoldáshoz csak azt kell meghatározni, hogy az $1, 2, \dots, 79$ számok közül hányféleképpen tudunk kiválasztani hármat, illetve a $81, 82, \dots, 90$ számok közül hányféleképpen tudunk kiválasztani egyet. Ez alapján a válasz

$$\binom{79}{3} \binom{10}{1}.$$

Ebből már nem nehéz az általánosítás. Annak a valószínűsége, hogy növekvő sorrendben a j -edik lottószám az i :

$$\binom{i-1}{j-1} \binom{90-i}{5-j}.$$

Vegye észre, hogy ennek a képletnek csak $0 \leq i - j \leq 85$ esetén van értelme, ellenkező esetben az eredmény 0, ahol tehát $i = 1, 2, \dots, 90$ és $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

5.9. feladat. Készítsen Excellel táblázatot, amely az előző feladat eredményeit összegzi! A táblázat eredményeit ábrázolja grafikonon is!

Megoldás. A B1 cellától az F1 celláig írja be a számokat 1-től 5-ig. Ezek jelentik majd az előző képletben a j értékét. Ezután A2-től A91-ig írja be 1-től 90-ig a számokat. Ezek jelentik majd az előző képletben az i értékét. A B2 cellába írja a következőt:

=HA(ÉS(0<=\$A2-B\$1;\$A2-B\$1<=85);KOMBINÁCIÓK(\$A2-1;B\$1-1)*KOMBINÁCIÓK(90-\$A2;5-B\$1);0)

Az Enter megnyomása után lépjen vissza a B2 cellára. A kitöltőjelet húzza az F2-ig, engedje el az egeret, majd a kitöltőjelet húzza a 91. sorig. Ezzel megkapja az előző feladat összes eredményét:

	1	2	3	4	5
1	2 441 626	0	0	0	0
2	2 331 890	109 736	0	0	0
3	2 225 895	211 990	3 741	0	0
4	2 123 555	307 020	10 965	86	0
5	2 024 785	395 080	21 420	340	1
6	1 929 501	476 420	34 860	840	5
7	1 837 620	551 286	51 045	1 660	15
8	1 749 060	619 920	69 741	2 870	35
9	1 663 740	682 560	90 720	4 536	70
10	1 581 580	739 440	113 760	6 720	126
11	1 502 501	790 790	138 645	9 480	210
12	1 426 426	836 836	165 165	12 870	330
13	1 353 275	877 800	193 116	16 940	495
14	1 282 975	913 900	222 300	21 736	715
15	1 215 450	945 350	252 525	27 300	1 001
16	1 150 626	972 360	283 605	33 670	1 365
17	1 088 430	995 136	315 360	40 880	1 820
18	1 028 790	1 013 880	347 616	48 960	2 380
19	971 635	1 028 790	380 205	57 936	3 060
20	916 895	1 040 060	412 965	67 830	3 876
21	864 501	1 047 880	445 740	78 660	4 845
22	814 385	1 052 436	478 380	90 440	5 985
23	766 480	1 053 910	510 741	103 180	7 315
24	720 720	1 052 480	542 685	116 886	8 855
25	677 040	1 048 320	574 080	131 560	10 626
26	635 376	1 041 600	604 800	147 200	12 650
27	595 665	1 032 486	634 725	163 800	14 950
28	557 845	1 021 140	663 741	181 350	17 550
29	521 855	1 007 720	691 740	199 836	20 475
30	487 635	992 380	718 620	219 240	23 751
31	455 126	975 270	744 285	239 540	27 405
32	424 270	956 536	768 645	260 710	31 465
33	395 010	936 320	791 616	282 720	35 960
34	367 290	914 760	813 120	305 536	40 920
35	341 055	891 990	833 085	329 120	46 376
36	316 251	868 140	851 445	353 430	52 360
37	292 825	843 336	868 140	378 420	58 905
38	270 725	817 700	883 116	404 040	66 045
39	249 900	791 350	896 325	430 236	73 815
40	230 300	764 400	907 725	456 950	82 251
41	211 876	736 960	917 280	484 120	91 390
42	194 580	709 136	924 960	511 680	101 270
43	178 365	681 030	930 741	539 560	111 930
44	163 185	652 740	934 605	567 686	123 410
45	148 995	624 360	936 540	595 980	135 751

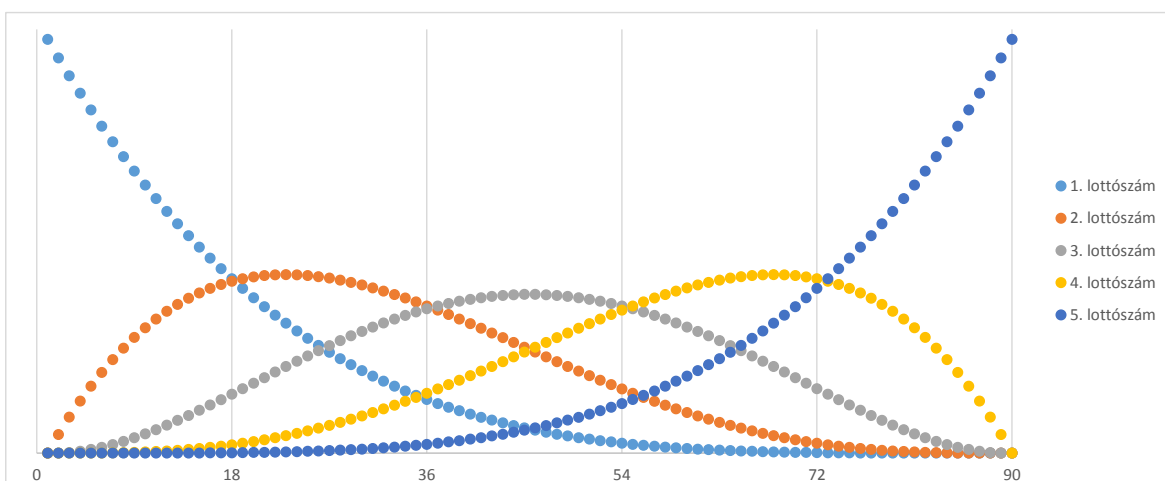
	1	2	3	4	5
46	135 751	595 980	936 540	624 360	148 995
47	123 410	567 686	934 605	652 740	163 185
48	111 930	539 560	930 741	681 030	178 365
49	101 270	511 680	924 960	709 136	194 580
50	91 390	484 120	917 280	736 960	211 876
51	82 251	456 950	907 725	764 400	230 300
52	73 815	430 236	896 325	791 350	249 900
53	66 045	404 040	883 116	817 700	270 725
54	58 905	378 420	868 140	843 336	292 825
55	52 360	353 430	851 445	868 140	316 251
56	46 376	329 120	833 085	891 990	341 055
57	40 920	305 536	813 120	914 760	367 290
58	35 960	282 720	791 616	936 320	395 010
59	31 465	260 710	768 645	956 536	424 270
60	27 405	239 540	744 285	975 270	455 126
61	23 751	219 240	718 620	992 380	487 635
62	20 475	199 836	691 740	1 007 720	521 855
63	17 550	181 350	663 741	1 021 140	557 845
64	14 950	163 800	634 725	1 032 486	595 665
65	12 650	147 200	604 800	1 041 600	635 376
66	10 626	131 560	574 080	1 048 320	677 040
67	8 855	116 886	542 685	1 052 480	720 720
68	7 315	103 180	510 741	1 053 910	766 480
69	5 985	90 440	478 380	1 052 436	814 385
70	4 845	78 660	445 740	1 047 880	864 501
71	3 876	67 830	412 965	1 040 060	916 895
72	3 060	57 936	380 205	1 028 790	971 635
73	2 380	48 960	347 616	1 013 880	1 028 790
74	1 820	40 880	315 360	995 136	1 088 430
75	1 365	33 670	283 605	972 360	1 150 626
76	1 001	27 300	252 525	945 350	1 215 450
77	715	21 736	222 300	913 900	1 282 975
78	495	16 940	193 116	877 800	1 353 275
79	330	12 870	165 165	836 836	1 426 426
80	210	9 480	138 645	790 790	1 502 501
81	126	6 720	113 760	739 440	1 581 580
82	70	4 536	90 720	682 560	1 663 740
83	35	2 870	69 741	619 920	1 749 060
84	15	1 660	51 045	551 286	1 837 620
85	5	840	34 860	476 420	1 929 501
86	1	340	21 420	395 080	2 024 785
87	0	86	10 965	307 020	2 123 555
88	0	0	3 741	211 990	2 225 895
89	0	0	0	109 736	2 331 890
90	0	0	0	0	2 441 626

Ebben a táblázatban például a 7. sorban és a 4. oszlopban található 1660 azt jelenti, hogy ennyi darab olyan lottóötös létezik, amelyben növekvő sorrendben a 4. lottószám a 7.

Minden sorban keresse meg a legnagyobb értéket! Ezek pirossal lettek kiemelve. Ezután minden oszlopban keresse meg a legnagyobb értéket! Ezeket szürke háttérrel láthatja.

A grafikon elkészítéséhez jelölje ki a B2:B91 cellatartományt, majd válassza a Be-
szúrás / Diagramok / Pont menüpontot. Ezzel azon lottóötösök számát ábrázolta i
függvényében, melyekben az i lottószám növekvő sorrendben az első helyen szerepel.
Ezután a rajzterületen a helyi menüben válassza az Adatok kijelölése / Hozzáadás
menüpontot. Itt az Adatsor Y értékeinek megadásához jelölje ki a C2:C91 cellatarto-
mányt. Ezután OK / OK. Ezzel azon lottóötösök számát ábrázolta i függvényében,
melyekben az i lottószám növekvő sorrendben a második helyen szerepel. Ezt folytassa

az F oszlopig. A következő grafikont kapja:



VIDEÓ

5.10. feladat. Értelmezze az előző táblázatban a pirossal kiemelt számokat!

Megoldás. A pirossal kiemelt számok alapján a következők igazak:

- Az $1, 2, \dots, 18$ lottószámok a legnagyobb valószínűséggel egy lottóötösben, növekvő sorrendben az 1. helyen szerepelhetnek.
- A $19, 20, \dots, 36$ lottószámok a legnagyobb valószínűséggel egy lottóötösben, növekvő sorrendben a 2. helyen szerepelhetnek.
- A $37, 38, \dots, 54$ lottószámok a legnagyobb valószínűséggel egy lottóötösben, növekvő sorrendben a 3. helyen szerepelhetnek.
- Az $55, 56, \dots, 72$ lottószámok a legnagyobb valószínűséggel egy lottóötösben, növekvő sorrendben a 4. helyen szerepelhetnek.
- A $73, 74, \dots, 90$ lottószámok a legnagyobb valószínűséggel egy lottóötösben, növekvő sorrendben az 5. helyen szerepelhetnek.

5.11. feladat. Egy „feltaláló” az előző feladat megoldását tapasztalati úton felismerte. Ezen felbuzdulva, készített egy szerkezetet, amellyel olyan lottóötösöket lehetett kisorsolni, melyben sorrendben a legkisebb az $1, 2, \dots, 18$, a következő a $19, 20, \dots, 36$, a harmadik a $37, 38, \dots, 54$, a negyedik az $55, 56, \dots, 72$ és végül az ötödik a $73, 74, \dots, 90$ számok közül kerül ki. A szerkezetet azzal a reklámmal tudta eladni, hogy az ilyen számötösöknek nagyobb a valószínűsége a kihúzásra. Érdeemes-e megvenni ezt a szerkezetet, vagy legalábbis ilyen lottóötössel játszani?

Megoldás. Természetesen nem érdemes pénzt áldozni erre a szerkezetre. Korábban láttuk, hogy minden lottóötösnek ugyanakkora a valószínűsége, bárhogyan is osztályozzuk őket. Egyébként ez a szerkezet $18^5 = 1\,889\,568$ darab lottóötöst tud kisorsolni a lehetséges 43 949 268-ból.

5.12. feladat. Értelmezze az előző táblázatban a szürke háttérrel kiemelt számokat!

Megoldás. Egy lottóötösben legnagyobb valószínűséggel, növekvő sorrendben az első helyen az 1, a második helyen a 23, a harmadik helyen a 45 és 46, a negyedik helyen a 68, végül az ötödik helyen a 90 állhat.

5.13. feladat. Pár évvel ezelőtt készült egy riport a sajtóban arról, hogy valaki talált egy jó lottó szisztémát. Eszerint egy lottóötösben a páros lottószámok száma 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 lehet. Vagyis minden héten hat szelvénnel kell játszani úgy, hogy egy szelvényen ne legyen páros, egy szelvényen pontosan egy páros szám legyen és így tovább, a hatodik szelvényen mindegyik szám páros legyen. Van-e értelme ennek a logikának? Hová vezetne a szisztéma „tökéletesítése”?

Megoldás. Ez a rendszer a lottóötösöket hat osztályra bontja a kettővel való osztás maradéka szerint. Mivel bármely lottóötösnek ugyanakkora a valószínűsége, ezért mindegy, hogy mely osztályból vagy osztályokból vesszük ki ezeket, így a szisztéma értelmetlen. Természetesen azért valamennyivel nő a valószínűség, hiszen most nem egy, hanem hat szelvénnel játszunk, de ennek semmi köze az osztályokhoz.

A szisztémát úgy „tökéletesíthetjük”, ha az alapnak tekintett kettőt növeljük. Például a hárommal való osztás maradékát figyeljük. Eszerint lehet például egy lottóötösben egy olyan szám, amely hárommal osztható, három olyan szám, amely hárommal osztva 1 maradékot ad és egy olyan, amely hárommal osztva 2 maradékot ad. Hány ilyen osztály létezik? A választ az ismétléses kombinációk számával lehet megadni: $\binom{3+5-1}{5} = 21$. Ha a k -val való osztás maradékai szerint osztályozunk, akkor az osztályok száma $\binom{k+5-1}{5}$. A legtökéletesebb osztályozást akkor kapjuk, amikor $k = 86$. Ebből azt kapjuk, hogy minden lottószámot meg kell játszani.

5.14. feladat. Ha az előző szisztéma legtökéletesebb verzióját játszánánk, azaz minden lottóötöst megtennénk, akkor mennyit buknánk? A konkrét számolás kedvéért tegyük fel, hogy rajtunk kívül még 5 millió szelvény játszik, melyek közül egyik sem lesz 5 találatos, a telitalálatos osztályban 2 milliárd forint a halmozódás, míg a többi nyeremenyosztályban nincs halmozódás.

Megoldás. Technikailag ez megoldható egy kombinációs szelvénnel, melyen be kell jelölnünk mind a 90 számot. Ezért a pénztáros el fog tőlünk kérni

$$43\,949\,268 \cdot 225 = 9\,888\,585\,300,$$

azaz közel 10 milliárd forintot (vagy inkább az elmeosztályt hívja telefonon 😊). A nyereményalap

$$0,46 \cdot 225(43\,949\,268 + 5\,000\,000) = 5\,066\,249\,238 \text{ forint.}$$

Ehhez még hozzáadódik a 2 milliárd forintos halmozódás. Tehát a kiosztásra kerülő teljes nyeremény

$$7\,066\,249\,238 \text{ forint.}$$

Természetesen ezt nem mind mi kapjuk, hiszen a többiek között is lesznek nyertesek. Így a veszteségünk több, mint

$$2\,822\,336\,062 \text{ forint.}$$

Tehát ebben az esetben körülbelül 3 milliárd forintot bukunk.

5.15. feladat. Az előző feladat feltételeivel, mennyit fizetnek egy négytalálatos szelvényre, ha rajtunk kívül még 40 ilyen szelvény van? Ha mi nem játszottunk volna, akkor mennyit fizetne?

Megoldás. A nyereményalapból a négytalálatosokra jutó összeg:

$$0,17 \cdot 5\,066\,249\,238 = 861\,262\,370 \text{ forint.}$$

Az összes négytalálatos szelvények száma

$$40 + \binom{5}{4} \binom{85}{1} = 465,$$

így egy négytalálatos szelvényre

$$861\,262\,370 : 465 = 1\,852\,177 \text{ forintot}$$

fognak fizetni. Ha nem játszottunk volna, akkor

$$0,17 \cdot 0,46 \cdot 225 \cdot 5\,000\,000 : 40 = 2\,199\,375 \text{ forint}$$

lett volna a nyeremény.

6. fejezet

Három ajtó, melyiket válasszam?

Ezt a játékot **Monty Hall-dilemmának** is nevezik, mert Monty Hall „Let’s make a deal” című tévés vetélkedőjében játszották.



Ebben a televíziós vetélkedőben adott három ajtó:



A három ajtó közül az egyik mögött autó, a másik kettő mögött kecske található, például így:



A játékos a becsukott ajtók közül kiválaszt egyet,



majd a játékvezető a másik kettő közül kinyit egy olyat, ami mögött kecske van.



A játékos ezután még egyszer dönthet: Az eredetileg kiválasztott ajtónál marad, vagy inkább a másik ajtóra tippel. Persze mi most tudjuk a játékvezetővel együtt, hogy nem érdemes változtatni, de ezzel a játékos nincs tisztában.

A kérdés a következő:

Vajon mikor nagyobb a valószínűsége annak, hogy nyer a játékos? Ha változtat az első döntésén, vagy ha kitart mellette? Esetleg teljesen mindegy, mert maradnak az esélyek?

Marilyn Savant – akinek az IQ-ja 228, ami a valaha mért legnagyobb érték – a váltás mellett érvelt.



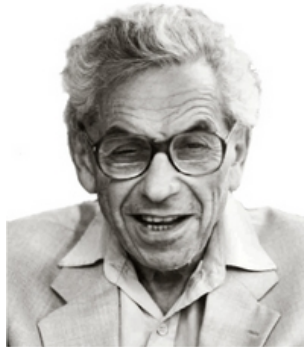
Azonban a legtöbb matematikus nem tartotta jónak a magyarázatot. Ilyen vélemények hangoztak el:

„Hivatásos matematikusként mélységesen elszomorít, mennyire alacsony az átlagemberek matematikai műveltsége. Ne súlyosbítsa a helyzetet, vallja be, hogy tévedett!”

„Hát ezt elszúrta, de nagyon! Miután a műsorvezető felfedi az egyik kecskét, a játékos 1 : 2-höz eséllyel nyerhet. Akár meggondolja magát, akár nem, az esély nem változik. Erre az országra amúgy is nagyon jellemző a matematikai analfabetizmus, felesleges, hogy erre még a legmagasabb IQ birtokosa is rátegyen egy lapáttal! Szégyellje magát!”

„Óriásit téved a vetélkedős feladattal kapcsolatban, mindamellett remélem, hogy ez a vita ráirányítja a figyelmet matematikaoktatásunk elképesztő hiányosságaira. Tévedése beismerésével valamelyest Ön is kivehetné részét e szánalmas állapot felszámolásából. Hány ingerült matematikus kell még, hogy végre meggondolja magát?!”

Savant magyarázatát még korunk legnagyobb matematikusa, Erdős Pál sem fogadta el elsőre.



Akkor hát mi az igazság? Csináljuk azt, amit Erdős is tett. Játsszunk sokszor, és nézzük meg mi történik az egyik taktika, és mi a másik esetében. A következő videóban 9 játékot játszunk úgy, hogy nem változtatunk az első tippet:

VIDEÓ

Amint láthattuk, 9 játékban 3-szor nyertünk. Most nézzük meg mi történik a 9 játék alatt, ha változtatunk a tippet:

VIDEÓ

Tehát most 6-szor nyertünk. Azaz kétszerese annak, mint amikor maradtunk az eredeti választásunknál. Ez azt sejteti, hogy Marilyn Savantnak van igaza. Persze ez még lehetett véletlen is. A videón látható játékkal Ön is játszhat a következő weblapon:

Monty Hall-dilemma

A kísérlet meggyőzőbb lenne, ha az arányt nagyobb számú játék esetén is megnézhetnénk. Ehhez az Excelt hívjuk segítségül. Írja az A1 cellába:

=VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;3)

Jelentse ez a kiválasztott ajtó számát. Írja a B1 cellába a következőt:

=VÉLETLEN.KÖZÖTT(1;3)

Jelentse ez a nyerő ajtó számát. A C1 cellába aszerint írjon 1-et vagy 0-t, hogy változtatás nélkül nyerünk-e vagy sem. Nyilván, ha $A1=B1$, azaz a kiválasztott és a nyerő ajtó sorszáma ugyanaz, akkor nyerünk. Tehát a C1 cellába ezt írja:

=HA(A1=B1;1;0)

A D1 cellába aszerint írjon 1-et vagy 0-t, hogy változtatással nyerünk-e vagy sem. Ha rossz ajtót választunk, akkor a játékvezető kénytelen a másik rossz ajtót kinyitni. Így a változtatással pont a nyerő ajtót találjuk meg. Vagyis ebben az esetben akkor nyerünk, ha A1 és B1 értéke különböző, illetve akkor veszítünk, ha megegyezik. Tehát a D1 cellába ezt írja:

=HA(A1=B1;0;1)

Jelölje ki az A1:D1 cellatartományt, majd az 1000. sorig húzza le a kitöltőjelet. Így 1000 játékot modelleztünk mindkét taktikával. Az E1 cellába írja a következőt:

=SZUM(C:C)

Ezzel az 1000-ből azon játékok számát kapjuk, amelyben változtatás nélkül nyertünk volna. Az F1 cellába ezt írja:

=SZUM(D:D)

Ezzel az 1000-ből azon játékok számát kapjuk, amelyben változtatással nyertünk volna. Végül a G1 cellába kerüljön ez:

=F1/E1

Ez adja meg, hogy körülbelül hányszorosa a nyerés esélyének abban az esetben, amikor változtatunk, ahhoz képest, mint amikor nem változtatunk. Az F9 billentyűt megnyomva, az 1000 kísérletet újra végrehajtja az Excel, így újabb arányt fog számolni. Ezt tetszőleges számban megismételheti. Közben figyelje a G1 cella értékét.

VIDEÓ

Elég jól megfigyelhető, hogy az arány 2 körül ingadozik, azaz a tapasztalat azt mutatja, hogy körülbelül kétszer akkora az esélye annak, hogy nyerünk, ha változtatunk, ahhoz képest, mint amikor nem változtatunk. Ezt a vizsgálati módszert egyébként **Monte Carlo-módszernek** nevezik.

Most térjünk rá az elméleti magyarázatra, bár ha jól figyelt, akkor az Excel munkalap elkészítésekor, már megkaptuk a magyarázatot.

Ha nem változtat: abban az esetben nyer, ha eltalálta a nyerő ajtót, melynek $\frac{1}{3}$ a valószínűsége.

Ha változtat: abban az esetben nyer, ha elsőre nem találta el a nyerő ajtót, hiszen ekkor a játékvezető a másik rossz ajtót nyitja ki, így amire változtat a játékos, ott biztosan autó van. Ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$.

Összegezve tehát, igaza volt Marilyn Savantnak, azaz megváltoztatva a tip-pünket, kétszeresére nő az esélyünk a nyerésre.

Amint láttuk, az ember első reakciójához képest (ami az, hogy a változtatás nem befolyásolhatja a valószínűséget) meglepő a valóság, ugyanakkor nagyon egyszerű a magyarázat. Akkor miért váltott ki Savant érvelése ekkora ellenállást a matematikusok körében? Nos, Savant eredeti magyarázata meglehetősen körülményes és nehezen érthető volt, ugyanakkor a matematikusok első gondolata, miszerint nem változik a valószínűség, annyira nyilvánvalónak tűnt számukra, hogy nem vették a fáradságot Savant magyarázatának értelmezésére. Tisztelet a kivételnek.

6.1. feladat. A játék paraméterein változtatva, hogyan változik a valószínűség? Próbáljuk meg általánosítani a feladatot!

Legyen $n \geq 1$ azon ajtók száma, melyek mögött autó van. Legyen $m \geq 2$ azon ajtók száma, melyek mögött kecske van. A játékos az $n + m$ csukott ajtóból választ egyet, majd a játékvezető k darab ajtót kinyit, melyek mögött kecske van. Ezután a játékos eldöntheti, hogy marad-e az eredeti választásánál vagy változtat. Érdemes-e változtatni?

Megoldás. Ha nem változtat, akkor el kell találni egy nyerő ajtót a nyeréshez, melynek esélye:

$$\frac{n}{n+m}.$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor változtat a játékos. Vezessük be a következő jelöléseket:

A : a játékos nyer

B : elsőre nyerő ajtót választ

$\bar{B}$: elsőre nem nyerő ajtót választ

Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(A) = \underbrace{P(A|B)}_{\frac{n-1}{n+m-(k+1)}} \underbrace{P(B)}_{\frac{n}{n+m}} + \underbrace{P(A|\bar{B})}_{\frac{n}{n+m-(k+1)}} \underbrace{P(\bar{B})}_{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m} \cdot \underbrace{\frac{n+m-1}{n+m-k-1}}_{S>1} > \frac{n}{n+m}.$$

Tehát nagyobb eséllyel nyer a játékos, ha változtat a döntésén! Speciálisan, ha $n = 1$ és $k = m - 1$, akkor $S = \frac{1+m-1}{1+m-m} = m$, azaz az eredeti valószínűség m -szeresével nyer,

ha változtat. Másrészt, ha k rögzített, akkor $n + m$ növelésével S közelít 1-hez, vagyis a változtatással egyre kisebb mértékben nő a valószínűség a változtatással.

Következzen az utolsó feladat:

6.2. feladat. Mi a helyzet, ha a játékos több ajtót is választhat?

Ezt a kérdést nem válaszoljuk meg, mindenkinek legyen ez otthoni fejtörő!

