EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Gazdasági számítások matematikai alapjai

Eger, 2018. november 14.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a tananyag az egri Eszterházy Károly Egyetem „Gazdasági számítások matematikai alapjai” című tantárgyának első két féléves anyagát tartalmazza. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy ez nem gazdasági számításokat jelent, hanem az ezekhez szükséges matematikai eszközök áttekintését.

A tananyag négy fejezetből áll. Az első a középiskolában tanult elemi matematika néhány fontos részét összegzi. Ezekre részletesen nem térünk ki sem az előadáson, sem a gyakorlati órákon. Ezt a fejezetet a hallgatónak önállóan kell feldolgozni.

A második fejezet tárgya a matematikai analízis, mely az első félévben kerül ismertetésre. A harmadik és negyedik fejezetben valószínűségszámítást és lineáris algebrát tanulunk, mely a második félév anyaga.

A további félévekben operációkutatást és statisztikát fognak tanulni, amely szintén a gazdasági számítások matematikai alapjaihoz tartozik, de ezekről ebben a tananyagban nem esik szó.

1. fejezet

Elemi matematika

Ebben a fejezetben átismételjük a középiskolában tanult matematika azon részeit, amelyek szükségesek a további fejezetek megértéséhez és az ott található feladatok megoldásához.

1.1. Számírás

Tízezer alatt a számjegyeket egybe kell írni, de tízezertől ezres csoportosítás kell, csoportosító jel a szóköz. Pl. 8997, 9999, 10 000, 4 217 626. Ha egy táblázat valamely oszlopában szerepel tízezer vagy annál nagyobb szám és tízezer alatti szám is, akkor annak érdekében, hogy a számjegyek egymás alá kerüljenek, tízezer alatt is kell az ezres csoportosítás.

Pl. helyes:

10 826
8 543

helytelen:

10 826
8543

A számok szöveges kiírásánál 2000 után ezres csoportosítás kell, csoportosítójel a kötőjel. Például
ezernyolcszázkilencvenkilenc
kettőezer-ötszáznegyvennyolc
egymillió-kettőszázhuszonháromezer-ötszázhatvanhat.

Tizedes törtekben tizedes vesszőt írunk (és nem pontot), mely előtt és után nincs szóköz. Pl. 13,723. Végtelen szakaszos tizedes törtekben az ismétlődő szakaszt föléhúzzuk, kivéve, ha a szakasz egyetlen szám. Ekkor pontot teszünk az ismétlődő szám fölé. Pl. $12{,}\overline{231}$ illetve $14{,}\dot{7}$.

Tizedes törtek kiolvasása: pl. 23,12 huszonhárom egész tizenkét század, vagy 0,1234 nulla egész ezerkettőszázharmincnégy tízezred.

1.2. Halmazok

Az *elem*, *halmaz* és az *elem eleme a halmaznak* fogalmakat nem definiáljuk. Ezek úgynevezett alapfogalmak. Az x elem eleme a H halmaznak jelölése: $x \in H$. Az x elem nem eleme a H halmaznak jelölése: $x \notin H$.

Az *üreshalmaz* olyan halmaz, melynek nincs egyetlen eleme sem. Jele: $\emptyset$.

Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak ha minden A-beli elem eleme B-nek is. Jele: $A \subset B$. Az $\emptyset$ minden halmaznak részhalmaza.

Halmaz megadásánál a halmaz elemeit $\{\ \}$ jelek között soroljuk fel. Pl. $\{1, 2, 3\}$. Egy halmaz az elem tulajdonságaival is megadható. Pl. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3 < x < 5\}$ azon valós számokból álló halmazt jelöli, melyek 3-nál nagyobbak de 5-nél kisebbek.

Halmazműveletek

Az A és B halmazok *uniója* azon elemek halmaza, melyek A-nak vagy B-nek elemei. Jele: $A \cup B$.
Az A és B halmazok *metszete* azon elemek halmaza, melyek A-nak és B-nek is elemei. Jele: $A \cap B$.
Az A és B halmazok *különbsége* azon elemek halmaza, melyek A-nak elemei, de B-nek nem. Jele: $A \setminus B$.
Legyen $A \subset H$. Az A-nak H-ra vonatkozó *komplementere* azon elemek halmaza, melyek H-nak elemei, de A-nak nem. Jele: $\overline{A}$.

Számhalmazok

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *természetes számok halmaza*

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *egész számok halmaza*

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ *racionális számok halmaza*

$\mathbb{R}$ *valós számok halmaza*

Korlátos számhalmazok

$H \subset \mathbb{R}$ *felülről korlátos*, ha van olyan K szám, melynél nincs nagyobb H-beli szám. Ekkor K-t a H felső korlátjának nevezzük. A H felső korlátai közül a legkisebbet a H *pontos felső korlátjának* nevezzük.

$H \subset \mathbb{R}$ *alulról korlátos*, ha van olyan k szám, melynél nincs kisebb H-beli szám. Ekkor k-t a H alsó korlátjának nevezzük. A H alsó korlátai közül a legnagyobbat a H *pontos alsó korlátjának* nevezzük.

$H \subset \mathbb{R}$ *korlátos*, ha alulról is és felülről is korlátos.

Intervallumok

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$ (*korlátos nyílt intervallum*)

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\}$ (*felülről nem korlátos nyílt intervallum*)

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}$ (*alulról nem korlátos nyílt intervallum*)

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ (*zárt intervallum*)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x < b\}$ (*félig zárt félig nyílt intervallum*)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leqslant b\}$ (*félig nyílt félig zárt intervallum*)

1.3. Függvények

*Függvény*eknek az egyértelmű hozzárendeléseket nevezzük. Egy függvény *kölcsönösen egyértelmű*, ha a fordított hozzárendelés is egyértelmű. Azon elemek halmazát, melyekhez a függvény rendel valamit, a függvény *értelmezési tartomány*ának nevezzük. Az értelmezési tartomány elemeihez rendelt elemek halmazát a függvény *értékkészlet*ének nevezzük. Ha egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számokból áll, akkor *valós függvény*ről beszélünk.

Ha az f-fel jelölt függvény értelmezési tartománya A és az értékkészlete vagy annál bővebb halmaz B, akkor azt $f\colon A \to B$ módon jelöljük. Kiolvasása: „ef át bébe képező függvény”. Az $x \in A$-hoz rendelt B-beli elemet $f(x)$ -szel jelöljük. (Az $f(x)$ kiolvasása: „ef iksz”.)

PÉLDA

$1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 6,\ 3 \mapsto 6$ nem függvény, mert 2-höz két különböző értéket is rendel.

$1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 5$ függvény, de nem kölcsönösen egyértelmű, mert az 1-hez és 2-höz ugyanazt rendeli. Értelmezési tartománya $\{1, 2, 3\}$, értékkészlete $\{4, 5\}$.

$1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 6$ kölcsönösen egyértelmű függvény. Értelmezési tartománya $\{1, 2, 3\}$, értékkészlete $\{4, 5, 6\}$.

1.4. Zárójelek

Ha negatív szám előjele előtt műveleti jel van, akkor a negatív számot zárójelbe kell tenni. Például $5(-2)$ vagy $3 + (-2) \cdot (-5)$.

Több tagú összegek szorzása esetén az összeget mindig zárójelbe kell tenni. A szorzás végrehajtásánál az első tényező minden tagjával össze kell szorozni a második tényező minden tagját. Például

$$(n^2 + n - 2)(n - 1) = n^3 - n^2 + n^2 - n - 2n + 2 = n^3 - 3n + 2.$$

Ennek fordított végrehajtása az ún. kiemelés. Például

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x - 3 &= x^3 + 2x^2 + 3x - x^2 - 2x - 3 = x(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x - 1). \end{aligned}$$

Összeg négyzetre emelésére sokszor van szükség:
$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Másik sokszor hasznos képlet a két tag különbségének és összegének szorzata:
$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$

Gyakori, hogy az f függvény ismeretében ki kell számolni az $f(x + 1)$ képletét. Például, ha $f(x) = \frac{5x^2+2x-1}{5+x-2x^2}$, akkor

$$f(x + 1) = \frac{5(x+1)^2+2(x+1)-1}{5+(x+1)-2(x+1)^2} = \frac{5(x^2+2x+1)+2x+2-1}{5+x+1-2(x^2+2x+1)} = \frac{5x^2+10x+5+2x+1}{5+x+1-2x^2-4x-2} = \frac{5x^2+12x+6}{-2x^2-3x+4}.$$

1.5. Törtek

$\boxed{\text{A 0-val való osztás nem megengedett művelet!}}$

$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd},\ bd \neq 0}$ Pl. $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{3\cdot7+5\cdot4}{4\cdot7} = \frac{21+20}{28} = \frac{41}{28}$

$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd},\ bd \neq 0}$ Pl. $\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3)-(n+2)n}{n(n+3)} = \frac{n^2+n+3n+3-(n^2+2n)}{n^2+3n} =$

$$= \frac{n^2+n+3n+3-n^2-2n}{n^2+3n} = \frac{2n+3}{n^2+3n}$$

$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ bd \neq 0}$ Pl. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3\cdot5}{4\cdot7} = \frac{15}{28}$

$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},\ bcd \neq 0}$ Pl. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3\cdot7}{4\cdot5} = \frac{21}{20}$

$\boxed{\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c},\ cd \neq 0}$ Pl. $\frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$

$\boxed{\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c},\ c \neq 0}$ Pl. $\frac{n^2+5n}{n^3} = \frac{n^2}{n^3} + \frac{5n}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}$

$\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},\ bc \neq 0}$ Pl. $\frac{2n^2-3n+2}{5n^2+2n+1} = \frac{\frac{2n^2-3n+2}{n^2}}{\frac{5n^2+2n+1}{n^2}} = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc},\ bc \neq 0}$ Pl. $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

1.6. Abszolút érték

Az x szám abszolút értéke x, ha $x \geqslant 0$ és $-x$, ha $x < 0$. Az x szám abszolút értékének a jele $|x|$. Pl. $|5| = 5$ és $|-5| = -(-5) = 5$.

Az a és b számok távolságán az $|a-b|$ számot értjük. Így $|x|$ az x távolsága 0-tól.

$\boxed{\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},\ b \neq 0}$ illetve $\boxed{|ab| = |a| \cdot |b|}$

PÉLDA

Hozzuk egyszerűbb alakra az $\left|\frac{1-n^2-2n}{3n^2+2n+1} + \frac{1}{3}\right|$ kifejezést, ahol $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|\frac{1-n^2-2n}{3n^2+2n+1} + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(1-n^2-2n)+1\cdot(3n^2+2n+1)}{3(3n^2+2n+1)}\right| = \left|\frac{3-3n^2-6n+3n^2+2n+1}{9n^2+6n+3}\right| =$$
$$= \left|\frac{4-4n}{9n^2+6n+3}\right| = \frac{|4-4n|}{|9n^2+6n+3|} = \frac{-(4-4n)}{9n^2+6n+3} = \frac{4n-4}{9n^2+6n+3},$$

mert $4-4n \leqslant 0$ és $9n^2+6n+3 > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

1.7. Hatványozás, gyökvonás

Egy a valós szám első hatványa $a^1 := a$, második hatványa $a^2 := a^1 \cdot a$, harmadik hatványa $a^3 := a^2 \cdot a$, és így tovább, n-edik hatványa $(n \in \mathbb{N})$ $a^n := a^{n-1} \cdot a$.

Mivel $a \neq 0$ esetén $a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$ teljesül, ezért ebből lehetőségünk van kiterjeszteni a hatvány fogalmát 0 és negatív egész kitevők esetén is. Legyen $a^0 := \frac{a^1}{a} = 1$, $a^{-1} := \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} := \frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a^2}$, és így tovább $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Vegyük észre, hogy a 0^0 kifejezést nem tudjuk értelmezni, mert azt $0^0 = \frac{0^1}{0}$ módon kellene megtennünk, ami értelmetlen kifejezés.

Egy nemnegatív a szám m-edik gyökén ($m \in \mathbb{N}$ páros) azt a nemnegatív számot értjük, melynek m-edik hatványa a. Pl. 4 második gyöke (vagy négyzetgyöke) 2.

Egy a szám m-edik gyökén ($m \in \mathbb{N}$ páratlan) azt a számot értjük, melynek m-edik hatványa a. Pl. -8 harmadik gyöke (vagy köbgyöke) -2.

Az a m-edik gyökét $\sqrt[m]{a}$ módon jelöljük. Az a négyzetgyökét $\sqrt{a}$-val jelöljük.

A hatvány fogalma kiterjeszthető racionális kitevőkre is, ha figyelembe vesszük, hogy $(a^m)^n = a^{mn}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Az m helyére $\frac{k}{n}$ írva $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, az adódik, hogy $a^{\frac{k}{n}}$ olyan szám, melynek n-edik hatványa a^k, azaz $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$ módon értelmezhető. Ez a definíció azonban csak akkor lesz minden $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezett, ha $a > 0$. Ezért csak pozitív számnak értelmezünk tört kitevőjét.

Végül értelmezzük egy pozitív szám irracionális kitevőjű hatványát. Ha $a > 0$ és r irracionális, akkor legyen

$$a^r := \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\} \text{ pontos alsó korlátja, ha } 0 < a \leqslant 1, \text{ illetve}$$
$$a^r := \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\} \text{ pontos felső korlátja, ha } a > 1.$$

A következőkben felsoroljuk a hatványozás tulajdonságait. Ahová feltételt nem írtunk, azokban az azonosságokban szereplő betűk helyére minden olyan szám beírható, amelyre az egyenlőség mindkét oldala értelmezett.

$\boxed{0^x = 0,\ x > 0}$ Pl. $0^\pi = 0$; $0^3 = 0$

$\boxed{x^0 = 1,\ x \neq 0}$ Pl. $5^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $(-2)^0$

$\boxed{1^x = 1,\ x \in \mathbb{R}}$ Pl. $1^{-\pi} = 1$; $1^{3,4} = 1$

$\boxed{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$ Pl. $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$

$\boxed{a^x \cdot b^x = (ab)^x}$ Pl. $2^5 \cdot 3^5 = 6^5$

$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$ Pl. $(3^2)^5 = 3^{10}$

$\boxed{\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$ Pl. $\frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2}$

$\boxed{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x}$ Pl. $\frac{4^5}{2^5} = \left(\frac{4}{2}\right)^5 = 2^5 = 32$

$\boxed{\dfrac{1}{a^x} = a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$ Pl. $\frac{1}{2^3} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\boxed{\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}}$

$\boxed{\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}}$ Pl. $\sqrt[3]{4^5} = 4^{\frac{5}{3}}$

$\boxed{\sqrt{a^y} = a^{\frac{y}{2}}}$ Pl. $\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[x]{a^y}} = a^{-\frac{y}{x}}} \text{ Pl. } \frac{1}{\sqrt[3]{4^5}} = 4^{-\frac{5}{3}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^y}} = a^{-\frac{y}{2}}} \text{ Pl. } \frac{1}{\sqrt{3^5}} = 3^{-\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{\sqrt[x]{a}\sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}} \text{ Pl. } \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = 2$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \text{ Pl. } \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

$$\boxed{\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a} = a^{\frac{1}{xy}}} \text{ Pl. } \sqrt[3]{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[15]{10} = 10^{\frac{1}{15}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}} \text{ Pl. } \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \dots \quad (a \geqslant 0)}$$

Gyakori hiba, hogy tagonként vonnak gyököt, pl. $\sqrt{2+7} = \sqrt{2} + \sqrt{7} \approx 4,06$, ami természetesen nem igaz. Helyesen $\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$. Azaz először az összeadást kell végrehajtani, csak ezután a gyökvonást!

PÉLDA

$$\frac{\sqrt{n^2+2n-1}+n}{\sqrt[3]{n^3+n^2+5}+\sqrt[4]{5n^4+3}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{n^2+2n-1}+n}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+n^2+5}+\sqrt[4]{5n^4+3}}{n}} = \frac{\frac{\sqrt{n^2+2n-1}}{\sqrt{n^2}}+\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n^3+n^2+5}}{\sqrt[3]{n^3}}+\frac{\sqrt[4]{5n^4+3}}{\sqrt[4]{n^4}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n^2+2n-1}{n^2}}+1}{\sqrt[3]{\frac{n^3+n^2+5}{n^3}}+\sqrt[4]{\frac{5n^4+3}{n^4}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}}+\sqrt[4]{5+\frac{3}{n^4}}}$$

1.8. Logaritmus

Legyen $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$. Ekkor $\log_a b$ (ejtsd: „á alapú logaritmus bé”) azt a c számot jelenti, melyre $a^c = b$. Azaz pl. $2^{\log_2 3} = 3$. A következőkben felsoroljuk a logaritmus alapvető tulajdonságait.

$\boxed{\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1}$ Pl. $\log_3 3 = 1$

$\boxed{\log_a(b^c) = c\log_a b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \in \mathbb{R}}$ Pl. $\log_3 5^2 = 2\log_3 5$

$\boxed{\log_a(b^c) = c\log_a |b|,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ c \text{ páros egész}}$ Pl. $\log_3(-5)^2 = 2\log_3 5$

$\boxed{\log_a b + \log_a c = \log_a(bc),\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0}$ Pl. $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$

$\boxed{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c},\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0}$ Pl. $\log_2 3 - \log_2 5 = \log_2 \frac{3}{5}$

$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1}$ Pl. $\log_2 3 = \frac{\log_4 3}{\log_4 2}$

A 10-es alapú logaritmus lg-vel szoktuk jelölni. Tehát pl. $\lg 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$.

2. fejezet

Matematikai analízis

2.1. Számsorozatok

Azokat a valós függvényeket, melyek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$, *számsorozat*oknak nevezzük. Egy számsorozat n-hez rendelt tagját a_n (vagy b_n, c_n stb.) módon jelöljük. (Ejtsd: „á en, bé en, cé en".) A továbbiakban magát a számsorozatot is a_n, b_n, c_n stb. módon jelöljük.

Monotonitás

Az a_n számsorozat
- *monoton nő*, ha $a_n \leqslant a_{n+1}$,
- *szigorúan monoton nő*, ha $a_n < a_{n+1}$,
- *monoton csökken*, ha $a_n \geqslant a_{n+1}$,
- *szigorúan monoton csökken*, ha $a_n > a_{n+1}$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

PÉLDA

$a_n = \frac{3n+2}{4n-1}$ esetén $a_n - a_{n+1} = \frac{3n+2}{4n-1} - \frac{3(n+1)+2}{4(n+1)-1} = \frac{11}{(4n-1)(4n+3)} > 0$, így $a_n > a_{n+1}$, azaz a_n szigorúan monoton csökkenő.

Részsorozat

Legyen c_n olyan szigorúan monoton növekvő számsorozat, melynek értékkészlete természetes számokból áll és legyen a_n tetszőleges sorozat. Ekkor a $b_n = a_{c_n}$ sorozatot az a_n sorozat egy *részsorozat*ának nevezzük.

PÉLDA

$\frac{1}{4n^2+2}$ az $\frac{1}{n}$ sorozat részsorozata, $\sqrt[5n]{5n}$ az $\sqrt[n]{n}$ sorozat részsorozata.

Konvergens számsorozatok

Az a_n számsorozatot *nullsorozat*nak nevezzük, ha bármely $r > 0$ esetén legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ létezik, melyre a_n távolsága 0-tól nagyobb mint r, azaz $|a_n| > r$.

PÉLDA

$a_n = \frac{1}{n}$ vagy $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nullsorozatok.

Az a_n számsorozatot *konvergens*nek nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy az $a_n - a$ nullsorozat. Ezt az a számot az a_n sorozat határértékének nevezzük. Jele: $a_n \to a$. Kiolvasása: „a_n konvergál a-hoz” vagy „a_n tart a-hoz” vagy „a_n határértéke a”.

PÉLDA

$\frac{5n+1}{n} \to 5$, mert $\frac{5n+1}{n} - 5 = \frac{1}{n}$ nullsorozat.

Konvergens sorozatnak nem lehet két különböző határértéke.

Egy sorozat pontosan akkor nullsorozat, ha konvergens és határértéke 0.

Egy sorozat pontosan akkor nullsorozat, ha abszolút értéke nullsorozat.

Ha az a_n sorozat értékkészlete korlátos és $b_n \to 0$, akkor $a_n b_n \to 0$.

PÉLDA

$(-1)^n \frac{1}{n} \to 0$, mert $|(-1)^n \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \to 0$.

$\frac{\sin n}{n} \to 0$, mert $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ és $\frac{1}{n} \to 0$.

Határátmeneti szabályok

Ha $a, b, k \in \mathbb{R}$, $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor

- $a_n + k \to a + k$
- $ka_n \to ka$
- $a_n^k \to a^k$ (amennyiben értelmezettek ezek a kifejezések)
- $a_n + b_n \to a + b$

- $a_n - b_n \to a - b$
- $a_n b_n \to ab$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ (amennyiben értelmezettek ezek a kifejezések)
- $a_n^{b_n} \to a^b$ (amennyiben értelmezettek ezek a kifejezések).

PÉLDA

$\frac{5n^2+3n+2}{7n^2-4n-1} = \frac{5+3\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{7-4\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2} \to \frac{5+3\cdot 0+2\cdot 0^2}{7-4\cdot 0-0^2} = \frac{5}{7}$

$\frac{3n+2}{4n^2+5n-1} = \frac{3\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{4+5\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2} \to \frac{3\cdot 0+2\cdot 0^2}{4+5\cdot 0-0^2} = \frac{0}{4} = 0$

$\frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}{\sqrt{\frac{1}{n}}+1} \to \frac{\sqrt{0+2}}{\sqrt{0}+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{2} = 0$

Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a_n \to a$ és $r > 0$. Egy természetes számot az r-hez tartozó *küszöbszám*nak nevezzük, ha minden attól nagyobb $n \in \mathbb{N}$ esetén a_n távolsága a-tól, kisebb r-nél, azaz $|a_n - a| < r$.

Bármely küszöbszámnál nagyobb természetes szám is küszöbszám.

PÉLDA

Legyen $a_n = \frac{4n+1}{5n+3}$. Számoljuk ki az $r = 0{,}01$-hez tartozó küszöbszámot.
Mivel $\frac{4n+1}{5n+3} = \frac{4+\frac{1}{n}}{5+3\cdot\frac{1}{n}} \to \frac{4}{5}$, így

$$\begin{aligned} |a_n - a| = \left|\frac{4n+1}{5n+3} - \frac{4}{5}\right| = \frac{7}{25n+15} &< 0{,}01 \\ 700 &< 25n+15 \\ 685 &< 25n \\ \frac{685}{25} = 27{,}4 &< n \end{aligned}$$

Így minden $27 < n$ esetén teljesül, hogy $|a_n - a| < 0{,}01$. Tehát 27 küszöbszám.

Legyen $a_n = \frac{5n+4}{3n^3+7n^2-1}$. Számoljuk ki az $r = 0{,}03$-hoz tartozó küszöbszámot.
Mivel $\frac{5n+4}{3n^3+7n^2-1} = \frac{5\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3+7\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^3} \to \frac{0}{3} = 0$, így

$$\begin{aligned} |a_n - a| = \left|\frac{5n+4}{3n^3+7n^2-1} - 0\right| = \frac{5n+4}{3n^3+7n^2-1} \leqslant \frac{5n+4n}{3n^3+0-n^3} = \frac{9}{2n^2} &< 0{,}03 \\ 300 &< 2n^2 \\ 150 &< n^2 \\ \sqrt{150} \approx 12{,}25 &< n \end{aligned}$$

Így minden $12 < n$ esetén teljesül, hogy $|a_n - a| < 0{,}03$. Tehát 12 küszöbszám.

Nevezetes konvergens számsorozatok

$\boxed{\frac{1}{n} \to 0}$

$\boxed{q^n \to 0, \ \text{ha } -1 < q < 1}$

PÉLDA

$\frac{3^{n+2}+2^{n-2}}{4+5^n} = \frac{9\cdot 3^n+\frac{1}{4}\cdot 2^n}{4+5^n} = \frac{9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n+1} \to \frac{9\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0}{4\cdot 0+1} = \frac{0}{1}=0.$

Bizonyítható, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens. A határértéke viszont nem fejezhető ki a szokásos algebrai műveletek véges sokszori alkalmazásával, hasonlóan mint a π. Ezt a határértéket e-vel (ejtsd: „é”) fogjuk jelölni ($e \approx 2{,}718\ldots$).

$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e}$

$\boxed{\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \to e^p, \ \text{ahol } p \in \mathbb{R}.}$ (Ejtsd: „é a péediken” vagy „é ad pé”.)

PÉLDA

$\left(1+\frac{5}{n}\right)^n \to e^5$

$\left(\frac{5n+2}{5n-1}\right)^{2n+1} = \left(\frac{\left(1+\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{5}}{n}\right)^n}\right)^{2+\frac{1}{n}} \to \left(\frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{-\frac{1}{5}}}\right)^{2+0} = e^{\frac{6}{5}}$

$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{5n}}{2^{5n}} = \left(\frac{1}{2^5}\right)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^5 \to 0\cdot e^5 = 0$

Konvergens sorozat részsorozata

Ha $a_n \to a$, akkor a_n minden részsorozata a-hoz konvergál.

PÉLDA

$\frac{1}{4n^2+2} \to 0$, mert az $\frac{1}{n}$ részsorozata,

$\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2} \to e^4$, mert az $\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ részsorozata.

Divergens számsorozatok

Ha egy számsorozat nem konvergens, akkor azt *divergens*nek nevezzük. Két speciális típusú divergens sorozatot részletezünk.

Azt mondjuk, hogy az a_n számsorozat *végtelenbe divergál*, ha bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén véges sok n-re lesz $a_n < k$. Jele: $a_n \to \infty$ Kiolvasása: „a_n divergál végtelenbe” vagy „a_n tart végtelenbe” vagy „a_n határértéke végtelen”.

Azt mondjuk, hogy az a_n számsorozat *mínusz végtelenbe divergál*, ha bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén véges sok n-re lesz $a_n > k$. Jele: $a_n \to -\infty$ Kiolvasása: „a_n divergál mínusz végtelenbe” vagy „a_n tart mínusz végtelenbe” vagy „a_n határértéke mínusz végtelen”.

Nevezetes divergens számsorozatok

$\boxed{n \to \infty}$

$\boxed{q^n \to \infty, \quad \text{ha } q > 1}$

Határátmeneti szabályok

- Ha $a_n \to \infty$ és $k > 0$, akkor $ka_n \to \infty$, $a_n^k \to \infty$ és $k + a_n \to \infty$.
- Ha $a_n \to \infty$ és $k < 0$, akkor $ka_n \to -\infty$ és $k + a_n \to \infty$.
- Ha $a_n \to -\infty$ és $k > 0$, akkor $ka_n \to -\infty$ és $k + a_n \to -\infty$.
- Ha $a_n \to -\infty$ és $k < 0$, akkor $ka_n \to \infty$ és $k + a_n \to -\infty$.
- Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$, $a_n b_n \to \infty$ és $a_n^{b_n} \to \infty$.
- Ha $a_n \to \infty$ és b_n konvergens, akkor $a_n + b_n \to \infty$.
- Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to b > 0$, akkor $a_n b_n \to \infty$.
- Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to b < 0$, akkor $a_n b_n \to -\infty$.
- $|a_n| \to \infty$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{a_n} \to 0$.

PÉLDA

$\frac{5n^2+3n+2}{7n-4} = \frac{5n+3+2\cdot\frac{1}{n}}{7-4\cdot\frac{1}{n}} \to \infty$,

$\frac{3^{2n+1}+1}{5^{n-1}+7} = \frac{3\cdot 9^n+1}{\frac{1}{5}\cdot 5^n+7} = \frac{3\left(\frac{9}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}+7\left(\frac{1}{5}\right)^n} \to \infty$.

Divergens sorozat részsorozata

∞-be divergáló sorozat minden részsorozata ∞-be divergál.

PÉLDA

$4^{5n^2+2} \to \infty$, mert a 4^n részsorozata.

Vizsgálja meg a következő sorozatok monotonitását.

1. $\frac{n+4}{2n+3}$ **2.** $\frac{n-1}{2-3n}$ **3.** $\frac{3n+10}{n^2+1}$ **4.** $\frac{3n^2-4}{2n^2+1}$

Számolja ki a következő sorozatok határértékét.

5. $\frac{12n^3-5n^2+8}{3n^3+2n+7}$ **6.** $\frac{-4n^5+3n^3-5}{3n^5+4n^4+n^3+9}$ **7.** $\frac{2n^2+2}{n^3+5n-3}$ **8.** $\frac{2n^3+5n^2+n+2}{-5n^3+2n^2+6}$ **9.** $\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^3}}$

10. $\frac{n^2+1}{2n} - \frac{3n^2}{6n+1}$ **11.** $\frac{(n+1)^5}{3n^5}$ **12.** $\sqrt[2n]{\frac{2n+3}{5n-4}}$ **13.** $\frac{3n^2-2}{4n+5}$ **14.** $\frac{-2n^2+n+1}{3n+2}$

15. $\frac{3n^3+4n^2-n+2}{3n^2+n+7}$ **16.** $\frac{6n^4-3n^2+1}{-n^2+n-7}$ **17.** $6n^2-5n+1$ **18.** $\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ **19.** $\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

20. $\sqrt{n^2+2}-n$ **21.** $n^2\left(\sqrt{n^4-1}-n^2\right)$ **22.** $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$ **23.** $\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

24. $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$

Adjon meg 0,001-hez tartozó küszöbszámot a következő sorozatok esetén.

25. $\frac{(-1)^n}{n}$ **26.** $\frac{n+2}{n+1}$ **27.** $\frac{-6n}{n+7}$ **28.** $\frac{3n+2}{4n+2}$ **29.** $\frac{2}{n^2+6}$ **30.** $\frac{3n+2}{n^2+5}$ **31.** $\frac{\sin n}{n}$ **32.** $\frac{1}{n^3+5}$

33. $\frac{n^2+2}{n^2+n+1}$ **34.** $\frac{6n^2+n+2}{n^2+n+2}$ **35.** $\sqrt{\frac{n^2+3}{2n^3-1}}$ **36.** $6-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **37.** $5+\frac{(-1)^n}{5^n}$ **38.** $\frac{6n^3+n^2-2n+1}{n^3+n-1}$

Számolja ki a következő sorozatok határértékét.

39. $\sqrt{n^2+6n+1}-\sqrt{n^2+5n+3}$ **40.** $\frac{100}{1{,}01^n}$ **41.** $(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^{2n}$ **42.** $\frac{(-2)^n+4^{n+1}}{3^n+7^{n-2}}$ **43.** $\frac{5^{n-1}+3^{2n-2}}{1+6^n}$

44. $\frac{\sqrt{3^{2n-1}}+2^{3n+1}}{8^{n+1}+7^{n-2}}$ **45.** $\left(\frac{3n+4}{3n-5}\right)^n$ **46.** $\left(\frac{5n-1}{5n+3}\right)^{n+2}$ **47.** $\left(\frac{7n-1}{7n+4}\right)^{n-5}$ **48.** $\left(\frac{6n^2-1}{6n^2+3}\right)^{2n^2+4}$

49. $\left(\frac{3n^2+7}{3n^2-5}\right)^{4n^2-1}$ **50.** $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n}$ **51.** $\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{2n+1}$ **52.** $\left(\frac{3n^3-1}{2n^3+5}\right)^{4n^3-1}$ **53.** $\left(\frac{2n-1}{3n}\right)^n$

54. $\left(\frac{n^2+3}{3n^2}\right)^{4n^2}$

2.2. Sorok

Akhilleusz és a teknős versenyt futnak. Akhilleusz tízszer gyorsabb a teknősnél, így 10 méter előnyt ad. Az ókori görögök szerint ekkor Akhilleusz sohasem éri utol a teknőst, ugyanis amíg 10 métert fut Akhilleusz, addig a teknős 1 métert. Ekkor a teknősnek 1 méter az előnye. Amíg ezt az 1 métert lefutja Akhilleusz, addig a teknős 0,1 métert fut, így a teknősnek ekkor 0,1 méter az előnye. Ezt a végtelenségig folytathatjuk, így a teknős mindig Akhilleusz előtt lesz. A tapasztalat azonban ezzel ellentétes. Hol a hiba? Írjuk le sorban az előbb említett előnyöket:

$$10 \quad 1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}01 \quad 0{,}001 \quad \ldots$$

Az ókori görögök szerint ezen számok összege végtelen. Ellenőrizzük ezt az állítást. Jelöljük a számok összegét x-szel. Ekkor

$$10x = 100 + \underbrace{10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \dots}_{x} = 100 + x,$$

melyből $x = \frac{100}{9}$, azaz Akhilleusz a kiindulási pontjától $\frac{100}{9}$ méternél utoléri a teknőst. Az ókori görögök állítása ezek szerint hamis. Végtelen sok pozitív szám összege lehet véges.

Hogyan lehet értelmezni végtelen sok szám összegét? Legyenek az összeadandó számok az a_n számsorozat tagjai. Vagyis a kérdés, hogy hogyan értelmezzük az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

összeget? Az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot az a_n sorozatból képzett *sor*nak nevezzük. Ha $s_n \to s$, ahol $s \in \mathbb{R}$, $s = \infty$ vagy $s = -\infty$, akkor az s határértéket az a_n sorozatból képzett sor összegének nevezzük. Jele: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Kiolvasása: „az a_n sorozatból képzett sor összege” vagy „szumma n megy 1-től végtelenig a_n”. Ha az s_n sorozatnak nincs határértéke, akkor azt mondjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nem létezik.

Az $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ végtelen sok tagból álló összeget a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sorösszegként értelmezzük.

Például az Akhilleusz és a teknős eseténél tárgyalt x egyenlő a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10 \cdot 0{,}1^{n-1}$ sorösszeggel, melyről később a mértani sornál látni fogjuk, hogy $\frac{100}{9}$.

Ha az összeadás nem a_1-től indul, hanem a_k-tól, akkor az

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

összeg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+k-1}$ sorösszeggel egyenlő és $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ módon jelöljük. Pl. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4}$.

PÉLDA

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ esetén

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$ sorösszeget. Ehhez először a nevezőt gyöktényezős alakban írjuk fel, majd a törtet ún. elemi törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3} = \frac{(2a+2b)n+(3a+b)}{(2n+1)(2n+3)},$$

melyből látható, hogy $2a+2b=0$ és $3a+b=1$. Ebből kapjuk, hogy $a=\frac{1}{2}$ és $b=-\frac{1}{2}$. Így $\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3}$, melyből

$$s_n = \left(\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{5} - \frac{\frac{1}{2}}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3} \to \frac{1}{6}.$$

Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{6}$.

Nevezetes sorok

Mértani sor

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad \text{ha} \quad -1<q<1}$$

PÉLDA

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0{,}1^n = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{5}{3^n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n + 5\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}$

Hiperharmonikus sor

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} \in \mathbb{R}, \text{ ha } c>1}$$

Itt a sorösszeg meghatározására nem tanulunk módszert, de példaként megemlítjük, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} = \infty, \text{ ha } c \leqslant 1}$$ ($c=1$ esetén *harmonikus sor*ról beszélünk.)

Konvergenciakritériumok

Ha a_n nem nullsorozat, akkor s_n divergens.

Ha $a_n \to a > 0$ vagy $a_n \to \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Ha $a_n \to a < 0$ vagy $a_n \to -\infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

PÉLDA

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{3n-1} = \infty$, mert $\frac{5n+2}{3n-1} \to \frac{5}{3} > 0$.

Majoráns kritérium

Ha $|a_n| \leqslant b_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R}$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

PÉLDA

$\frac{n+1}{2n^3+2n+1} \leqslant \frac{n+n}{2n^3} = \frac{1}{n^2}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+2n+1} \in \mathbb{R}$.

Minoráns kritérium

Ha $a_n \geqslant b_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

PÉLDA

$\frac{n+1}{2n^2+2n+1} \geqslant \frac{n}{2n^2+2n^2+n^2} = \frac{1}{5n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+2n+1} = \infty$.

Gyökkritérium

Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \to a$.

- Ha $a < 1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$.
- Ha $a > 1$ vagy $a = \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

PÉLDA

$a_n = \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1$, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n \in \mathbb{R}$.

Hányadoskritérium

Tegyük fel, hogy $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to a$.

- Ha $a < 1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$.
- Ha $a > 1$ vagy $a = \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

PÉLDA

$a_n = \frac{n^n}{n!}$ esetén $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$.

Az $n!$ (ejtsd: „en faktoriális”) az 1-től n-ig terjedő egészek szorzatát jelenti.

GYAKORLÓ FELADATOK

Határozza meg a következő sorösszegeket.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$ **2.** $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{3}{n^2-5n+4}$ **3.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-n-2}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ **8.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!}$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+1}}$

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{6^{2n+5}}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3\cdot 5^{n+1}}$ **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{2}{5^{n+1}}\right)$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{10^n}$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n+2^n}{8\cdot 6^n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot 3^{n+1}}$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n}$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$ **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\cos(n\pi)}{4^{n+3}}$

Valamelyik konvergenciakritériummal döntse el, hogy az alábbi sorösszegek végesek vagy végtelenek.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$ **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1{,}01^n$ **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-n^2}{2n^2+4n+1}$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+5n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n^4+n^2+1}$ **26.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2n^2+n+1}$ **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ **29.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+3n+4}}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{3^n n!}$ **31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0{,}1^n}{n!}$ **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{(2n+1)!}$ **35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n n^n}$

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!2^{1-n}$ **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{3}\right)^n$ **38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ **39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+4}}{n^n}$ **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1}$

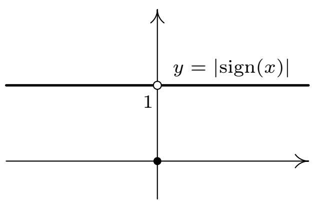
2.3. Függvények határértéke és folytonossága

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Az x számot a H *torlódási pont*jának nevezzük, ha minden $r > 0$ esetén az $(x-r, x+r)$ nyílt intervallumban a H-nak végtelen sok eleme van.

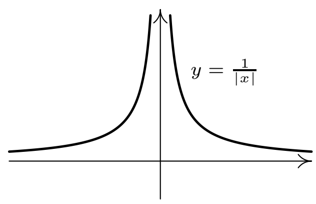
PÉLDA

$H = (1,2)$ esetén minden $x \in [1,2]$ torlódási pont.
$H = [0,5] \cup \{6\}$ esetén minden $x \in [0,5]$ torlódási pont.
$H = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ esetén csak a 0 torlódási pont.

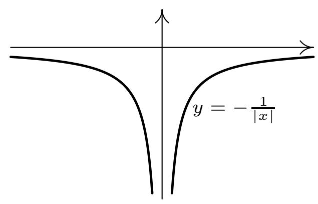
Legyen $H \subset \mathbb{R}$, x_0 (ejtsd: „iksz nulla") a H torlódási pontja, $y \in \mathbb{R}$ vagy $y = \infty$ vagy $y = -\infty$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban y a *határértéke*, ha minden x_0-hoz konvergáló $H \setminus \{x_0\}$-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n) \to y$. Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$. Kiolvasása: „limesz x tart x_0-hoz $f(x)$ egyenlő y" vagy „f x_0-beli határértéke y". Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban véges a határértéke.



$\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign}(x)| = 1$



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$

(sign az ún. szignum vagy előjel függvény, mely pozitív számhoz 1-gyet, negatív számhoz -1-gyet és 0-hoz 0-t rendel.)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény x_0-ban *folytonos*, ha minden x_0-hoz konvergáló H-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n) \to f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ a H egy torlódási pontja és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Az f pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Egy valós függvényt folytonosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Folytonos függvények például: abszolútérték-függvény, reciprok függvény, minden trigonometrikus függvény, logaritmus függvények, exponenciális függvények.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény x_0-ban *balról folytonos*, ha minden x_0-hoz konvergáló $H \cap (-\infty, x_0]$-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Az f x_0-ban *jobbról folytonos*, ha minden x_0-hoz konvergáló $H \cap [x_0, \infty)$-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n) \to f(x_0)$.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ a H egy torlódási pontja és $f\colon H \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Ha létezik $g\colon H \to \mathbb{R}$ függvény, mely x_0-ban folytonos és $f(x) = g(x)$ minden $x \in H \setminus \{x_0\}$ esetén, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$.

PÉLDA

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$

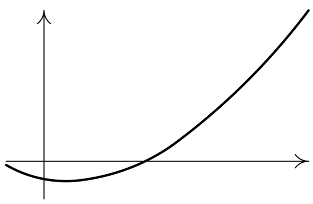
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}}=$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+2\cdot 0}}=-\frac{1}{2}$$

Legyen $H\subset\mathbb{R}$ felülről nem korlátos, $y\in\mathbb{R}$ vagy $y=\infty$ vagy $y=-\infty$ és $f\colon H\to\mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f-nek végtelenben y a határértéke, ha minden végtelenbe divergáló H-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n)\to y$. Jele: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y$. Kiolvasása: „limesz x tart végtelenbe $f(x)$ egyenlő y” vagy „f végtelenben vett határértéke y”.

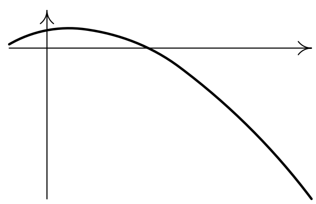
PÉLDA

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\left(\frac{1}{x}\right)^2}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0^2}+3}=\frac{1}{6}$$

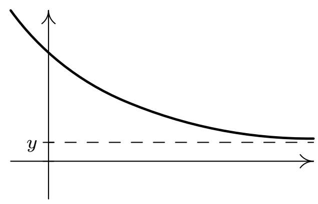
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-4}{3^{x+2}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\left(\frac{5}{3}\right)^x-4\left(\frac{1}{3}\right)^x}{9+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\infty$$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

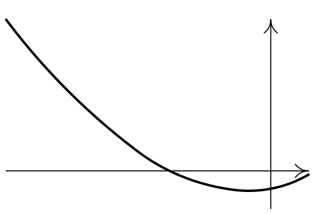


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

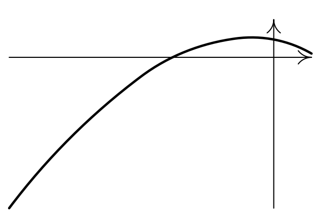


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y\in\mathbb{R}$

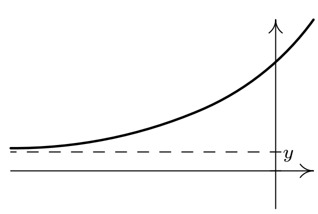
Legyen $H\subset\mathbb{R}$ alulról nem korlátos, $y\in\mathbb{R}$ vagy $y=\infty$ vagy $y=-\infty$ és $f\colon H\to\mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f-nek mínusz végtelenben y a határértéke, ha minden mínusz végtelenbe divergáló H-beli értékeket felvevő x_n sorozat esetén $f(x_n)\to y$. Jele: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y$. Kiolvasása: „limesz x tart mínusz végtelenbe $f(x)$ egyenlő y” vagy „f mínusz végtelenben vett határértéke y”.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y\in\mathbb{R}$

Könnyen látható, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.

PÉLDA

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+2}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6(-x)+2}{\sqrt[3]{(-x)^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x+2}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6+2\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^3-1}}=\frac{-6+2\cdot 0}{\sqrt[3]{0^3-1}}=6.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

Számolja ki a következő határértékeket.

1. $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{|x|-2}$ **2.** $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$ **3.** $\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ **4.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ **5.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$ **6.** $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

7. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x}$ **8.** $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ **9.** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **10.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}}{x}$ **11.** $\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

12. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ **13.** $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-2x+9}}{x^2-3x+2}$ **14.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$ **15.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}$

16. $\lim_{x\to1}\frac{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **17.** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ **18.** $\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$ **19.** $\lim_{x\to1}\frac{3x^2+12x-15}{10x-2x^2-8}$ **20.** $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$

21. $\lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **22.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ **23.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$ **24.** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$

25. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)$ **26.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$ **27.** $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-6x+1}{x+2}$ **28.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

29. $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ **30.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$ **31.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[4]{2x^2+1}}{\sqrt[3]{x}+3}$ **32.** $\lim_{x\to\infty}\frac{6\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{7x+1}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2}x}$

33. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt{2}}{\sqrt[10]{x^7+2000}-x}$ **34.** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)$ **35.** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$ **36.** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$

37. $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$ **38.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ **39.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-\pi}{5x^2+\sqrt{2}}\right)^{4x^2+2}$

40. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$ **41.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+2}{6x^2-4}\right)^{x^2}$ **42.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{x}$

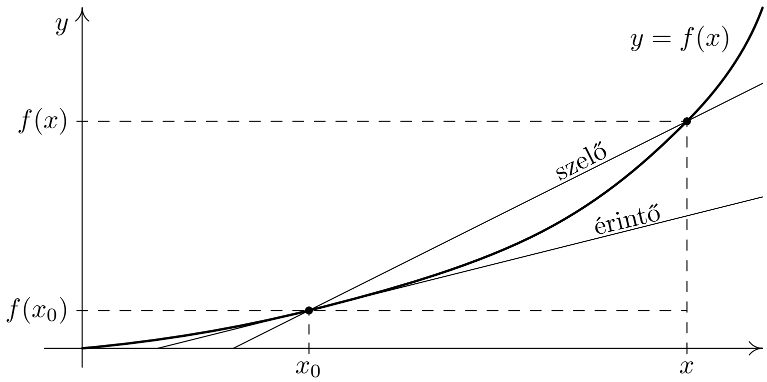
2.4. Differenciálszámítás

Érintő meghatározása

Az f függvény görbéjéhez húzzunk érintőt az $\big(x_0, f(x_0)\big)$ koordinátájú pontban, illetve húzzunk szelő egyenest az $\big(x_0, f(x_0)\big)$ és $\big(x, f(x)\big)$ koordinátájú pontokon keresztül, ahol $x \neq x_0$.

Az x közelítésekor x_0-hoz, a szelő is közeledik az érintőhöz, így a tangens függvény folytonossága miatt, a szelő meredeksége (azaz az x tengellyel bezárt szögének tangense) is közeledik az érintő meredekségéhez. Pontosabban fogalmazva az érintő meredeksége

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



PÉLDA

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény görbéjének a $(3, 9)$ koordinátájú pontban húzott érintőjének a meredeksége

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

Differenciálhányados

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Az x számot a H *belső pont*jának nevezzük, ha van olyan $r > 0$, hogy $(x - r, x + r) \subset H$.

PÉLDA

$H = (1, 2)$ esetén minden $x \in (1, 2)$ belső pont.
$H = [0, 5] \cup \{6\}$ esetén minden $x \in (0, 5)$ belső pont.
$H = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ esetén nincs belső pont.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, x_0 a H egy belső pontja és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban *differenciálható*, ha létezik a

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

véges határérték. Ezt a határértéket az f függvény x_0-beli *differenciálhányados*ának nevezzük és $f'(x_0)$ módon jelöljük. Kiolvasása: „f x_0-beli differenciálhányadosa” vagy „f deriváltja az x_0 helyen” vagy „f derivált x_0”.

Ezek szerint $f'(x_0)$ az f függvény görbéjének az $\big(x_0, f(x_0)\big)$ koordinátájú pontjában húzott érintőjének a meredeksége.

Legyen D azon számok halmaza, melyekben az f differenciálható. Azt a függvényt, mely minden D-beli x_0-hoz hozzárendeli az $f'(x_0)$ értéket, az f *derivált*jának nevezzük, és f' módon jelöljük.

PÉLDA

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ esetén az f deriváltja az x helyen $2x$, azaz $f'(x) = 2x$. Ezt $(x^2)' = 2x$ módon jelöljük. Kiolvasása: „x^2 deriváltja $2x$”.

Alapderiváltak

$(k)' = 0$, ahol $k \in \mathbb{R}$
$(x)' = 1$
$(x^k)' = kx^{k-1}$, ahol $k \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (ahol $\ln x = \log_e x$ az ún. természetes alapú logaritmus)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Deriválási szabályok

$\big(kf(x)\big)' = kf'(x)$
$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$
$\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x)$
$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

PÉLDA

$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x^{2-1} = 10x$
$(\log_3 x + \sin x)' = (\log_3 x)' + (\sin x)' = \frac{1}{x \ln 3} + \cos x$
$(\operatorname{ctg} x - 2^x)' = (\operatorname{ctg} x)' + (-2^x)' = (\operatorname{ctg} x)' - (2^x)' = -1 - \operatorname{ctg}^2 x - 2^x \ln 2$
$(e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$
$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{(x)' \sin x - x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$
$(\sin 3^x)' = (\cos 3^x)(3^x)' = (\cos 3^x)3^x \ln 3$

$\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\ln x \sin x}\right)' = e^{\ln x \sin x}(\ln x \sin x)' = e^{\ln x \sin x}\left((\ln x)' \sin x + \ln x(\sin x)'\right) =$
$= x^{\sin x}\left(\frac{1}{x}\sin x + \ln x \cos x\right)$

Második derivált

Ha az f függvénynek létezik a deriváltja és az f' függvénynek is létezik a deriváltja, akkor az $(f')'$ függvényt f'' módon fogjuk jelölni és az f *második derivált*jának nevezzük.

PÉLDA

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ esetén $f'(x) = 3x^2$, így $f''(x) = (3x^2)' = 6x$. Ezt $(x^3)'' = (3x^2)' = 6x$ módon jelöljük.

GYAKORLÓ FELADATOK

Határozza meg a következő függvények deriváltját.

1. $x^5+\sqrt[4]{x^3}+7x^4+\frac{5}{x^2}$ **2.** $6x^7+5\sqrt{\pi x^3}+\frac{\sqrt{2}}{x}$ **3.** $(2\cos x+1)(x^2+6\cdot 3^x)$ **4.** $(\ln x+\operatorname{ctg} x)(5+2^x)$ **5.** $\frac{6\pi^2 \operatorname{tg} x+6}{\sqrt{2}\cos x}$

6. $\frac{\pi\cos x-3\sin x+\sqrt{x}}{x^2+7\ln x}$ **7.** $7^{x^2+6}+\pi$ **8.** $\cos(\sqrt{x}+x^2)$ **9.** $\sin(x^7+1)$ **10.** $\cos^2 x$ **11.** $(x^2+e)\sin^6 x$

12. $2^{\sin\sqrt{x}}$ **13.** $\ln(x^2 3^{\ln x})$ **14.** $\operatorname{tg}\sqrt{\frac{2x^2+1}{6\sqrt{x}}}$ **15.** $2\ln^2 \operatorname{tg} x$ **16.** $\ln\ln\ln x$ **17.** $\sin^2(\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x})$

18. $\sqrt{\frac{6\cos^4 x}{7\sqrt{x}+\pi}}$ **19.** $\frac{\sqrt[3]{x^7}+\operatorname{ctg} x^2}{\pi^2+2}$ **20.** $2^{\sqrt[3]{2}}+\pi\ln 8^6$ **21.** $\log_6 \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2^x+\sqrt{2}}$ **22.** $\pi\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}+\frac{7}{x^2 3^{\sin x}}}$ **23.** x^x

24. $(\sin x)^x$ **25.** $(\sin x)^{\cos x}$ **26.** $(\ln x)^{2\sqrt{x}}$ **27.** $(x^2)^{\frac{1}{x}}$ **28.** $\log_x \cos x$

2.5. Függvényvizsgálat

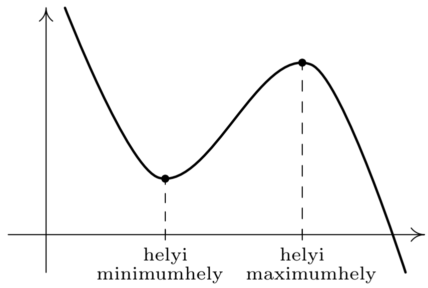
Monotonitás, helyi szélsőértékhely

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a,b) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény az (a,b) intervallumon

- *monoton nő*, ha $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
- *szigorúan monoton nő*, ha $f(x_1) < f(x_2)$,
- *monoton csökken*, ha $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,
- *szigorúan monoton csökken*, ha $f(x_1) > f(x_2)$

minden $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ esetén.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $x_0 \in H$ az f *helyi minimumhelye*, ha van olyan $r > 0$, hogy minden $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap H$ esetén $f(x_0) \leqslant f(x)$. Azt mondjuk, hogy $x_0 \in H$ az f *helyi maximumhelye*, ha van olyan $r > 0$, hogy minden $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap H$ esetén $f(x_0) \geqslant f(x)$. A helyi maximum- illetve minimumhelyeket összefoglalóan *helyi szélsőértékhely*eknek nevezzük.



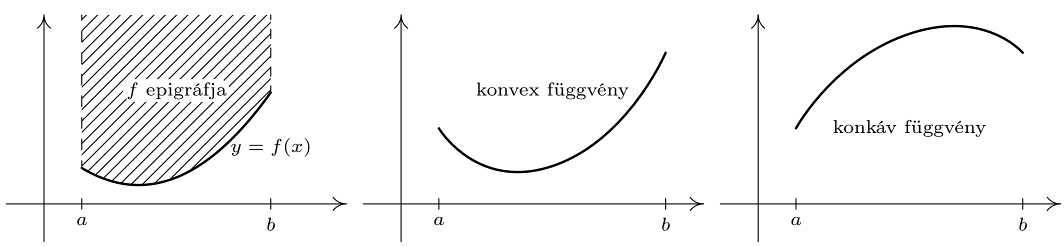
Konvex illetve konkáv függvények

Egy síkidomot *konvex*nek nevezzük, ha abban két pont nem tud „elbújni” egymás elől, pontosabban, ha a síkidom bármely két pontját összekötő szakasz minden pontját tartalmazza. Ez a fogalom átvihető függvényekre is az ún. epigráf segítségével.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a, b) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Az f függvény (a, b) intervallumra vonatkozó *epigráf*ján azon (x, y) koordinátájú pontok mértani helyét értjük, melyekre teljesül, hogy $x \in (a, b)$ és $y > f(x)$.

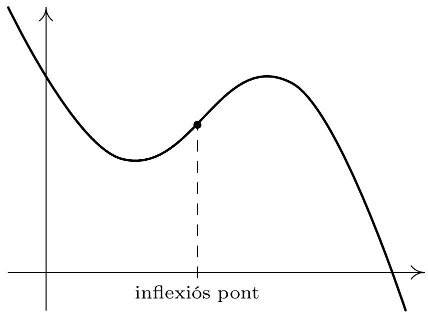
Az f függvényt az (a, b) intervallumon konvexnek nevezzük, ha f-nek az (a, b) intervallumra vonatkozó epigráfja konvex síkidom.

Ha $-f$ az (a, b) intervallumon konvex, akkor azt mondjuk, hogy f az (a, b) intervallumon *konkáv*.



Inflexiós pont

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Az $x_0 \in H$ számot az f *inflexiós hely*ének nevezzük, ha létezik olyan $r > 0$, hogy $(x_0 - r, x_0 + r) \subset H$ és f az $(x_0 - r, x_0)$ intervallumon konvex, míg az $(x_0, x_0 + r)$ intervallumon konkáv, vagy fordítva, az $(x_0 - r, x_0)$ intervallumon konkáv és az $(x_0, x_0 + r)$ intervallumon konvex.



Függvényvizsgálat deriváltakkal

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a, b) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f az (a, b) intervallum minden pontjában differenciálható.

- Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f szigorúan monoton nő az (a, b) intervallumon.
- Ha $f'(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f szigorúan monoton csökken az (a, b) intervallumon.

PÉLDA

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ esetén $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, melynek gyökei 1 és 2, így $f'(x) < 0$ pontosan akkor, ha $x \in (1, 2)$. Tehát f az $(1, 2)$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, $r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallum minden pontjában és $f'(x_0) = 0$.

- Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (x_0 - r, x_0)$ esetén és $f'(x) < 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + r)$ esetén, akkor f-nek x_0 helyi maximumhelye.
- Ha $f'(x) < 0$ minden $x \in (x_0 - r, x_0)$ esetén és $f'(x) > 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + r)$ esetén, akkor f-nek x_0 helyi minimumhelye.

PÉLDA

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ esetén $f'(x) = 2x - 2$, melynek gyöke 1, továbbá $f'(x) < 0$, ha $x < 1$, míg $f'(x) > 0$, ha $x > 1$. Így f-nek 1 helyi minimumhelye.

Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? Legyen a kerület k, a téglalap egyik oldala pedig x hosszúságú. Ekkor a terület az x függvényében $f(x) = x(\frac{k}{2} - x) = \frac{k}{2}x - x^2$. Mivel $f'(x) = \frac{k}{2} - 2x$, melynek gyöke $\frac{k}{4}$ és $f'(x) > 0$, ha $x < \frac{k}{4}$ és $f'(x) < 0$, ha $x > \frac{k}{4}$, ezért f-nek $\frac{k}{4}$ helyi maximumhelye. Vagyis a terület $x = \frac{k}{4}$ esetén a legnagyobb. Ekkor a téglalap négyzet.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a, b) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f az (a, b) intervallum minden pontjában kétszer differenciálható.

- Ha $f''(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f konvex az (a, b) intervallumon.
- Ha $f''(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

PÉLDA

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ esetén $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$, melynek gyökei 1 és 2, így $f''(x) < 0$ pontosan akkor, ha $x \in (1, 2)$. Tehát f az $(1, 2)$ intervallumon konkáv.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, $r > 0$, $(x_0 - r, x_0 + r) \subset H$ és $f\colon H \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallum minden pontjában és $f''(x_0) = 0$. Ha $f''(x_1) > 0$ minden $x_1 \in (x_0 - r, x_0)$ és $f''(x_2) < 0$ minden $x_2 \in (x_0, x_0 + r)$ esetén, vagy fordítva, $f''(x_1) < 0$ minden $x_1 \in (x_0 - r, x_0)$ és $f''(x_2) > 0$ minden $x_2 \in (x_0, x_0 + r)$ esetén, akkor f-nek x_0 inflexiós helye.

PÉLDA

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ esetén $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$, melynek gyökei 1 és 2. Mivel $f''(x) > 0$, ha $x < 1$, és $f''(x) < 0$, ha $x \in (1, 2)$, ezért f-nek az 1 inflexiós helye. Hasonlóan látható, hogy a 2 is inflexiós hely.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Melyik az adott sugarú körbe írt téglalapok közül a legnagyobb területű?

2. Adott oldalú téglalap sarkaiból mekkora oldalú négyzeteket kell kivágni, hogy a fennmaradó részt felül nyitott dobozzá hajtogatva, a keletkezett doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

3. Adott felszínű, felül nyitott hengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

4. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara r, a kúp magassága m. Határozzuk meg a kúpba írható legnagyobb térfogatú henger térfogatát.

5. Egyenlő szélességű három deszkából csatornát készítünk. Az oldalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete a legnagyobb területű?

6. Bontsa fel 8-at két pozitív összeadandóra úgy, hogy az összeadandók köbeinek összege minimális legyen.

7. Adott térfogatú szabályos háromszög alapú egyenes hasábok közül mekkorák annak az élei, amelynek a legkisebb a felszíne?

8. A 20 cm alkotójú, kúp alakú tölcsérek közül mekkora a maximális térfogatúnak a magassága?

9. Egy α középponti szöghöz tartozó körcikkből kúppalástot sodrunk. Az α-nak milyen választása mellett lesz az így meghatározott kúp térfogata maximális?

10. Határozza meg egy adott sugarú gömbbe írható maximális felszínű körhenger magasságát és alapkörének sugarát.

11. Határozza meg egy adott sugarú gömbbe írható maximális térfogatú körhenger magasságát és alapkörének sugarát.

Vizsgálja meg a következő függvényeket monotonitás, szélsőértékhely, konvexitás, konkávitás és inflexiós hely szempontjából.

12. x^3-5x^2+3x-5 **13.** $x^4-12x^3+48x^2-50$ **14.** $(x^2-1)^3$ **15.** $\frac{1}{1-x^2}$ **16.** $\frac{x}{x^2-1}$ **17.** $\frac{x^2}{x^2-1}$ **18.** $\frac{x^3}{3-x^2}$

19. $\frac{x^3}{(2x+1)^2}$ **20.** $\frac{10x}{1+x^2}$ **21.** $\frac{6x}{1+x^3}$ **22.** xe^x **23.** x^2e^{-x} **24.** $x^2e^{-x^2}$ **25.** $\cos x+\sin x$ **26.** $x+\sin x$

27. $2x^2-\ln x$

2.6. Integrálszámítás

Határozatlan integrál

Ha egy nyílt intervallumon értelmezett valós f függvény minden pontban differenciálható, akkor az f függvényt az f' *primitív függvény*ének nevezzük.

PÉLDA

x^2 a $2x$ primitív függvénye, mert $(x^2)' = 2x$. De $2x$-nek az x^2+1 is primitív függvénye, mert $(x^2+1)' = 2x$.

Ha f-nek F primitív függvénye, azaz $F' = f$, akkor f-nek az összes primitív függvénye előáll $F + c$ alakban, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezt a továbbiakban

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

módon jelöljük. Kiolvasása: „f határozatlan integrálja $F + c$” vagy „integrál $f(x)$ dé iksz egyenlő $F(x) + c$”.

Alapintegrálok

Legyen $c \in \mathbb{R}$.

$\int k\,\mathrm{d}x = kx + c, \ \ k \in \mathbb{R}$

$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \ \ k \neq -1$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$

$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \;\; a > 0, \, a \neq 1,$

$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$

$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + c$

Integrálási szabályok

$\int k f(x) \,\mathrm{d}x = k \int f(x) \,\mathrm{d}x$

PÉLDA

$\int 5x^2 \,\mathrm{d}x = 5 \int x^2 \,\mathrm{d}x = 5\frac{x^3}{3} + c, \, c \in \mathbb{R}$

$\int \big(f(x) + g(x)\big) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$

PÉLDA

$\int (x^2 + 2^x) \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + c, \, c \in \mathbb{R}$

$\int f'(x) g'\big(f(x)\big) \,\mathrm{d}x = g\big(f(x)\big) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$

A g' speciális választása esetén a következőket kapjuk:

$\int f'(x) f^k(x) \,\mathrm{d}x = \frac{f^{k+1}(x)}{k+1} + c, \;\; k \neq -1, c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int (\sin x)'(\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^3 x}{3} + c, \;\; c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c, \;\; c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c, \;\; c \in \mathbb{R}$

$\int f'(x) a^{f(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, \;\; a > 0, a \neq 1, c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int x3^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2)'3^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{3^{x^2}}{\ln 3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\int f'(x)\sin f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)'\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\int f'(x)\cos f(x)\,\mathrm{d}x = \sin f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \frac{\cos \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)'\cos \ln x\,\mathrm{d}x = \sin \ln x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \frac{1}{\cos^2 5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{(5x)'}{\cos^2 5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

PÉLDA

$\int \frac{1}{x\sin^2 \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\sin^2 \ln x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} \ln x + c,\ c \in \mathbb{R}$

A következő ún. *parciális integrálás* a függvények szorzatának deriváltjából bizonyítható be.

$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$

PÉLDA

$f'(x) = e^x$ és $g(x) = x$ esetén $f(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$, így

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ esetén $f(x) = x$ és $g'(x) = \frac{1}{x}$, így

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\int e^x \cos x \, dx = ?$ Legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \cos x$. Ekkor $f(x) = e^x$ és $g'(x) = -\sin x$, így $\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$. Most legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \sin x$. Ekkor $f(x) = e^x$ és $g'(x) = \cos x$, így $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$. A két eredményből kapjuk, hogy

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx,$$

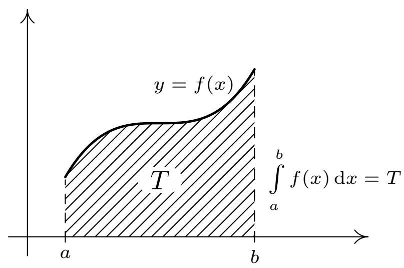
melyből $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Határozott integrál

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos értékkészletű függvény. Ha $f(x) \geqslant 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor az f a-tól b-ig vett integrálján azon síkidom területét értjük, mely pontjainak (x,y) koordinátáira teljesül, hogy $x \in [a,b]$ és $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Jele: $\int\limits_a^b f(x) \, dx$ Kiolvasása: „f ától béig vett integrálja” vagy „integrál a-tól b-ig $f(x) \, dx$”.

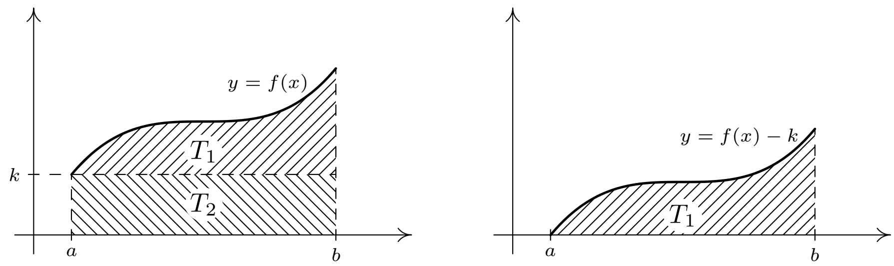
Feltételezzük az f függvényről, hogy az előbb említett terület létezik. Annak tisztázása, hogy ez pontosan mit is jelent, sokkal mélyebb matematikai hátteret igényel, melynek kiépítése most nem feladatunk.



PÉLDA

$\int\limits_1^5 3 \, dx = 3(5-1) = 12$, $\int\limits_0^1 x \, dx = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ illetve $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$ (az utolsó integrál az origó középpontú egység sugarú félkör területe).

Hogyan lehetne általánosítani az integrál fogalmát olyan esetre, amikor a függvény felvehet negatív értékeket is? Ehhez először a már definiált nemnegatív f függvényre vonatkozó integrál egy egyszerű tulajdonságát vegyük észre, amely a következő ábra alapján kézenfekvő:



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_1 + T_2 = \int_a^b \big(f(x) - k\big)\,\mathrm{d}x + k(b-a).$$

Függetlenül attól, hogy f felvehet-e negatív értékeket vagy sem, az $f(x)-k$ sohasem negatív. Így $\int_a^b \big(f(x)-k\big)\,\mathrm{d}x$ minden esetben értelmezett.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos értékkészletű függvény és k az f értékkészletének egy alsó korlátja. Ekkor az f a-tól b-ig vett integrálját a következő formulával definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - k\big)\,\mathrm{d}x + k(b-a).$$

PÉLDA

$\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \big(x-(-1)\big)\,\mathrm{d}x + (-1)\big(2-(-1)\big) = \int_{-1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x - 3 = \frac{3\cdot 3}{2} - 3 = 1{,}5.$

A határozott integrálnak megemlítjük még két fontos tulajdonságát:

$a < b < c$ esetén $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Az integrálok fenti számítása azon alapszik, hogy a kapott síkidomnak kiszámítottuk a területét. Ezt csak szakaszokkal és körívekkel határolt síkidomok esetén tudjuk megtenni eddigi középiskolai ismereteink alapján. De valójában már a kör területét sem tudjuk, csak becsületszóra megtanították nekünk a képletét. A matematikában fordítva lesz a menetrend. Nem a területszámítást használjuk fel az integrálszámításban, hanem az integrálszámítást a területszámításban. Ehhez azonban szükségünk lesz az integrál területtől független számítására. Erre vonatkozik a következő tétel.

Newton–Leibniz-tétel

$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$ ahol F primitív függvénye f-nek.

Hasznos jelölésnek fog bizonyulni a következő: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

PÉLDA

$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$, $(c \in \mathbb{R})$ így $\int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 1{,}5$

$\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)' \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + c$, $(c \in \mathbb{R})$ így

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

Számítsa ki a következő függvények határozatlan integrálját.

1. $\frac{3x^2-4\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ **2.** $\frac{e^x}{e^x+1}$ **3.** $\operatorname{ctg} x$ **4.** $\sqrt[4]{1-4x}$ **5.** $\frac{x+2}{2x-1}$ **6.** $\sin x \cos x$ **7.** $\cos^3 x$ **8.** $x(x^2-1)$

9. $\frac{1-2x}{x^2-x+1}$ **10.** $\frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}}$ **11.** $\sin^3 x$ **12.** $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ **13.** $\frac{1}{x\ln x}$ **14.** $\frac{\ln^5 x}{x}$ **15.** $\frac{1}{1+\sin x}$

16. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **17.** $1+e^{x-1}$ **18.** $\operatorname{tg}^2 x$ **19.** $\operatorname{ctg}^2 x$ **20.** $\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$ **21.** $\frac{1+\cos x-\cos^3 x}{\sin^2 x}$ **22.** $\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$

23. $\frac{1}{\cos x}$ **24.** $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ **25.** $\frac{1}{\sin 2x}$ **26.** $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ **27.** $\frac{1}{x+2\sqrt[3]{x}}$ **28.** $\frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}+2}$ **29.** $\frac{1}{x\ln^2 x \log_x 2}$

30. e^{3x+1} **31.** $x\sin x^2$ **32.** $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ **33.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **34.** $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ **35.** $x\sqrt[4]{2-3x^2}$

36. xe^{-x^2} **37.** $\frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}$ **38.** $\sin 8x$ **39.** $\operatorname{ctg} x\sqrt{\ln\sin x}$ **40.** $\cos^3 x \sin^4 x$ **41.** xe^x **42.** xe^{2x}

43. x^2e^{-x} **44.** $x^2\cos x$ **45.** $e^{-x}\sin x$ **46.** $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ **47.** $\cos\ln x$ **48.** $\ln^2 x$

Számítsa ki a következő határozott integrálokat.

49. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\,\mathrm{d}x$ **50.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x$ **51.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$

52. Számítsa ki az $f(x) = -2x^2+16x-24$ és $g(x) = x^2-8x+12$ függvények görbéi által közrezárt síkidom területét.

3. fejezet

Valószínűségszámítás

Egyes jelenségeknél az összes körülmény figyelembevétele lehetetlen vagy igen nehéz. Ennek több oka is lehet. Például az, hogy a jelenség hátterében álló körülmények közül néhány a tudomány mai állása szerint még nem ismert, vagy nem tudjuk mérni, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg egy esemény bekövetkezésének elegendő okát. Ezeket *véletlen eseményeknek* nevezzük. Például amikor dobókockával játszunk, nem vesszük figyelembe a dobásnál fellépő összes körülményt – hogy milyen helyzetből indult, milyen impulzust kapott, a légellenállást, az ütközést, a súrlódást stb. –, csak azt a tényt, hogy feldobtuk. Ezért számunkra a kockajáték kimenetele véletlenszerű.

Ha egy véletlen kimenetelű jelenség sokszor megismétlődhet, akkor *véletlen tömegjelenségről* beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Például a radioaktív bomlás esetén minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető, mégis sok milliárd atommag esetében már előre meg tudjuk mondani, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le.

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek matematikai modellezése.

3.1. Véletlen események

Az események matematikai modellezését halmazok segítségével oldjuk meg. Például amikor dobókockával játszunk, alapvetően hat különböző esemény következhet be. Vagy az egyes, vagy a kettes, vagy a hármas, vagy a négyes, vagy az ötös, vagy a hatos oldal lesz felül. Ezeket azonosítsuk a következő halmazokkal:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}.$$

Ezek lesznek az ún. *elemi események*. De más eseményekről is beszélhetünk. Például páros számot dobunk. Ennek feleltessük meg $\{2,4,6\}$ halmazt. Ezt az eseményt *összetett eseménynek* nevezzük, mert felbontható több elemi esemény uniójára:

$$\{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}.$$

Az is esemény, hogy nem hatost dobunk. Az ehhez tartozó halmaz a

$$\overline{\{6\}} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Ezt a hatos dobás *ellentett eseményének* nevezzük. Eseménynek tekinthető az is, hogy egytől hatig valamilyen egész szám fog kijönni. Mivel ez minden esetben bekövetkezik, ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük és Ω-val fogjuk jelölni. Tehát ekkor

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Végül azt is eseménynek fogjuk tekinteni, ami sohasem következhet be. Például, hogy hatosnál nagyobbat dobunk. Ezt *lehetetlen eseménynek* nevezzük, és az üres halmazzal fogjuk azonosítani.

Látható, hogy minden esemény a biztos esemény egy részhalmaza. Az események rendszerét $\mathcal{A}$-val jelöljük, mely tehát az Ω összes részhalmazaiból álló halmaz egy részhalmaza. Az események rendszerének, azaz $\mathcal{A}$-nak a tulajdonságai közül hármat emelünk ki:

- A biztos esemény eleme $\mathcal{A}$-nak.
- Egy esemény ellentettje is esemény.
- Események uniója is esemény.

Eseményaxiómák

Legyen Ω egy nem üres halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló halmaz egy olyan részhalmaza, melyre teljesülnek a következők:

1. axióma. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. axióma. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. axióma. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $\mathcal{A}$ elemeit *esemény*eknek nevezzük.

Mivel $\overline{\Omega} = \emptyset$, ezért az 1. és 2. axióma miatt az üreshalmaz is esemény. Az Ω-t *biztos eseménynek*, az $\emptyset$-t *lehetetlen eseménynek* nevezzük. A 3. axióma szerint események uniója is esemény, másrészt az axiómák és a de Morgan-féle azonosság segítségével bizonyítható, hogy események metszete is esemény.

Az $A \cup B$ esemény akkor következik be, ha legalább az egyik bekövetkezik.

Az $A \cap B$ esemény akkor következik be, ha mindkettő egyszerre bekövetkezik.

Az $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ esemény azt jelenti, hogy A bekövetkezik, de B nem.

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B események *egymást kizáróak*.

Egy $A \neq \emptyset$ eseményt *elemi eseménynek* nevezzük, ha az csak $A = A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$ módon írható fel két különböző esemény uniójaként.

Ha egy esemény nem lehetetlen és nem elemi, akkor azt *összetett eseménynek* nevezzük.

Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események páronként egymást kizáróak, és uniójuk a biztos esemény, akkor ezt *teljes eseményrendszernek* nevezzük.

PÉLDA

Egy dobókockát kétszer feldobunk. Ha a dobott számok összege 2, akkor feldobjuk mégegyszer. Ekkor a biztos eseményt a következő halmazzal reprezentálhatjuk:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),\dots,(1,1,6),\\ &(1,2),(1,3),\dots,(1,6),\\ &(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\\ &(3,1),(3,2),\dots,(3,6),\\ &\vdots\\ &(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

Egy pénzérmével addig dobunk, amíg írást nem kapunk. Ekkor a biztos esemény:

$$\Omega = \{\text{írás}, (\text{fej, írás}), (\text{fej, fej, írás}), \dots, (\text{fej, fej}, \dots, \text{fej, írás}), \dots\}.$$

Egy műhelyben három gép dolgozik. Egy adott pillanatban megvizsgáljuk, hogy melyik működik és melyik rossz. Ekkor a biztos esemény:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(\text{jó, jó, jó}), (\text{jó, jó, rossz}), (\text{jó, rossz, jó}), (\text{jó, rossz, rossz}),\\ &(\text{rossz, jó, jó}), (\text{rossz, jó, rossz}), (\text{rossz, rossz, jó}), (\text{rossz, rossz, rossz})\}.\end{aligned}$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Az utolsó példában leírt megfigyelésben legyen

$A_1 := \{(\text{rossz, jó, jó}), (\text{rossz, jó, rossz}), (\text{rossz, rossz, jó}), (\text{rossz, rossz, rossz})\}$,

$A_2 := \{(\text{jó, rossz, jó}), (\text{jó, rossz, rossz}), (\text{rossz,rossz, jó}), (\text{rossz, rossz, rossz})\}$,

$A_3 := \{(\text{jó, jó, rossz}), (\text{jó, rossz, rossz}), (\text{rossz, jó, rossz}), (\text{rossz, rossz, rossz})\}$,

amelyek sorrendben azt jelentik, hogy az első, a második, illetve a harmadik gép rossz. Fejezze ki az A_1, A_2, A_3 eseményekkel a következőket:

a) csak az első rossz,

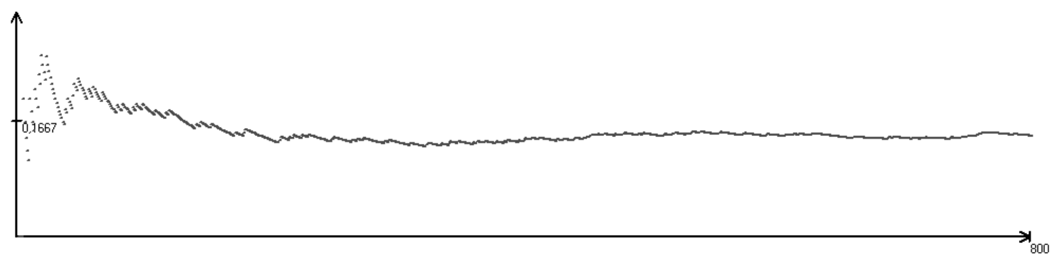
b) mindhárom rossz,
c) egyik sem rossz,
d) az első és második jó,
e) az első és második rossz, a harmadik jó,
f) csak egy gép rossz,
g) legfeljebb egy gép rossz,
h) legfeljebb két gép rossz,
i) legalább egy gép rossz.

2. Jelentse az A esemény azt, hogy éppen fúj a szél, illetve B azt, hogy esik az eső. Mondja el szavakkal, mit jelentenek a következő események: $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $A \setminus B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$.

3. Bizonyítsa be, hogy az $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

3.2. Valószínűség

A modellalkotás következő lépése valamilyen tapasztalati törvényszerűség megfigyelése az eseményekkel kapcsolatosan. Ilyet először *Jacob Bernoulli* (1654–1705) svájci matematikus publikált. Egy dobókockát dobott fel többször egymásután. A hatos dobások számának és az összdobások számának arányát, azaz a hatos dobás *relatív gyakoriságát* ábrázolta a dobások számának függvényében:



Bernoulli azt tapasztalta, hogy a hatos dobás relatív gyakorisága a dobások számának növelésével egyre kisebb mértékben ingadozik $\frac{1}{6}$ körül. Más véletlen kimenetelű kísérlet eseményeire is hasonló a tapasztalat, azaz *a kísérletek számának növelésével a figyelt esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre kisebb mértékben ingadozik egy konstans körül.*

Ezt a konstanst a figyelt esemény *valószínűség*ének fogjuk nevezni. A továbbiakban $P(A)$ jelölje az A esemény valószínűségét. Maga a P egy függvény, amely minden eseményhez hozzárendel egy számot. Könnyen látható, hogy minden esemény valószínűsége nemnegatív valós szám, a biztos esemény valószínűsége 1, illetve egyszerre be nem következő események uniójának valószínűsége az események valószínűségeinek összege.

Valószínűségaxiómák

Legyen $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre teljesülnek a következők:

4. axióma. $P(A) \geqslant 0$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén.
5. axióma. $P(\Omega) = 1$.
6. axióma. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként egymást kizáró események, akkor $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast *valószínűségi mezőnek* nevezzük, a P függvényt pedig *valószínűségnek*. Az előzőekben felsorolt hat axióma az úgynevezett *Kolmogorov-féle axiómarendszer*.

Adott $\mathcal{A}$ esetén több olyan valószínűség is lehet, melyre teljesülnek a 4., 5. és 6. axiómák. Hogy melyik az igazi, erre a *matematikai statisztika* keresi a választ.

A valószínűség legfontosabb tulajdonságai:

$P(\emptyset) = 0$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ha $B \subset A$, akkor $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Ha $A \subset B$, akkor $P(A) \leqslant P(B)$.

$P(A) \leqslant 1$.

Klasszikus valószínűségi mező

Klasszikus valószínűségi mezőről beszélünk, ha az elemi események száma véges és valószínűségeik megegyeznek.

Például a szabályos kockajáték klasszikus valószínűségi mezőt határoz meg, mert hat elemi esemény van, és a szimmetria miatt minden oldalára egyforma valószínűséggel eshet a kocka.

Ha egy klasszikus valószínűségi mezőben egy A esemény k darab elemi eseményből áll és összesen n darab elemi esemény van, akkor $\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$.

Kombinatorika

A klasszikus valószínűségi mezőkre vonatkozó példákban k és n értékét legtöbbször ún. kombinatorikai eszközökkel számolhatjuk ki.

Először bevezetünk néhány jelölést, amire szükségünk lesz:

Az $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (ejtsd: „n faktoriális”), ahol $n \in \mathbb{N}$. Kényelmi okokból még bevezetjük a $0! := 1$ jelölést is.

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (ejtsd: „n alatt a k”), ahol $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leqslant n$. Ez az ún. *binomiális együttható*.

Ismétlés nélküli permutációk száma

Hányféle ötjegyű számot lehet előállítani az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?
Megoldás: Az első számjegyet ötféleképpen, a következőt négy, aztán három, majd kettő, végül az utolsót már csak egyféleképpen lehet kiválasztani. Így a megoldás $5! = 120$.

Általánosan: n db elemet $\boxed{n!}$-féleképpen lehet sorbaállítani úgy, hogy minden elemet pontosan egyszer használunk fel.

Ismétléses permutációk száma

Hányféle hétjegyű számot lehet előállítani az 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5 számjegyekből, ha ezekből mindegyiket fel kell használni?
Megoldás: Ezt a hét db számjegyet 7!-féleképpen állíthatjuk sorba, de ezekben egy eset $2! \cdot 3! \cdot 2!$-szor ismétlődik. Így a megoldás: $\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$.

Általánosan: Ha n db elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ db azonos van $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n)$, akkor ezek mindegyikének felhasználásával $\boxed{\dfrac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r}}$ különböző sorbaállítást kaphatunk.

Ismétlés nélküli kombinációk száma

Ötöslottón hányféle számötöst sorsolhatnak ki?
Megoldás: Az első számot 90-féleképpen húzhatják, a következőt 89, majd 88 stb. az ötödiket 86-féleképpen húzhatják ki. Azonban így azokat az eseteket is beleszámoltuk, amikor ugyanazt a számötöst húzták, csak más sorrendben. Egy konkrét számötöst 5!-féleképpen húzhatnak ki, így a megoldás $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = \binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \leqslant k \leqslant n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt $\boxed{\binom{n}{k}}$ módon tehetjük meg.

Ismétléses kombinációk száma

10 db postaládába akarunk elhelyezni 15 db egyforma szórólapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
Megoldás: A gondolatmenet hosszú, itt csak a végeredményt közöljük: $\binom{10+15-1}{15} =$
$= \binom{24}{15} = 1\,307\,504$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend nem számít, akkor ezt $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$ módon tehetjük meg.

Ismétlés nélküli variációk száma

Egy 8 fős brigádból 5 embert kell kiválasztani 5 különböző munkára. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Feltesszük, hogy bármely munkára bárki kiválasztható.)
Megoldás: Az első munkára 8 ember közül választhatunk, a másodikra 7 stb. az ötödikre 4 ember közül választhatunk. Így a megoldás: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \binom{8}{5} \cdot 5! = 6720$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot $(0 \leqslant k \leqslant n)$ kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet maximum csak egyszer választhatjuk és a sorrend is számít, akkor ezt $\boxed{\binom{n}{k} \cdot k!}$ módon tehetjük meg.

Ismétléses variációk száma

Egy TOTÓ-tipposzlopot hányféleképpen tölthetünk ki?
Megoldás: 14 db meccsre kell tippelni, egyre 3-féleképpen (1, 2, x). Így a megoldás $3^{14} = 4\,782\,969$.

Általánosan: Ha n db különböző elemből k darabot kell kiválasztani úgy, hogy egy elemet többször is választhatjuk és a sorrend számít, akkor ezt $\boxed{n^k}$ módon tehetjük meg.

PÉLDA

Visszatérve a klasszikus valószínűségi mezőhöz, számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a TOTÓ-ban tízes találatot érünk el egy tipposzloppal.

Megoldás: Mint azt az előbb láttuk, Ω elemeinek a száma 3^{14}. Másrészt a tízes találat

$$\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3$$

esetben következhet be, ugyanis a 10 találatot az első 13 mérkőzésből kell elérni, ami $\binom{13}{10} \cdot 2^3$ esetben lehetséges, és még a pótmérkőzésre 3-féleképpen tippelhetünk. Így a megoldás

$$\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3}{3^{14}} \approx 0{,}001435.$$

Geometriai valószínűségi mező

Legyen Ω egy geometriai alakzat, melynek mértéke pozitív valós szám. Ha annak a valószínűsége, hogy egy Ω-ból kiválasztott pont egy $A \subset \Omega$ halmazba esik, arányos az A mértékével, akkor *geometriai valószínűségi mezőről* beszélünk. (A halmaz mértéke a geometriai alakzattól függően hosszúságot, területet vagy térfogatot jelent.)

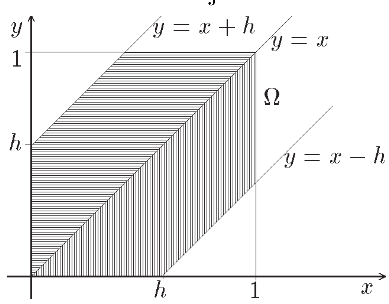
Az egyes elemi események itt az Ω ponthalmaz egy-egy pontjának véletlenszerű kiválasztását jelentik, amelyeknek a valószínűsége külön-külön nulla, hiszen a pont mértéke nulla. Ebből látható, hogy ha egy esemény valószínűsége nulla, abból nem következik, hogy a lehetetlen eseményről van szó.

Ha egy geometriai valószínűségi mezőben az Ω mértéke $m(\Omega)$ és az A esemény mértéke $m(A)$, akkor $\boxed{P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}}$.

PÉLDA

Egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszú szakasznál?

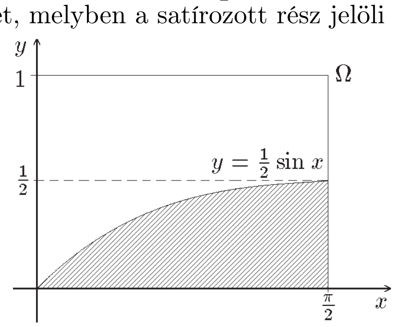
Megoldás: Tekintsük az egyik végpontját az egységnyi hosszúságú szakasznak. A választott P_1 illetve P_2 pontoknak ettől a végponttól való távolsága legyen x illetve y. Ekkor $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 1]$ teljesül. Legyen $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. A feladatban leírt kísérletet úgy is modellezhetjük, hogy erre az eseménytérre, mely most egy egységnyi oldalhosszúságú négyzet, „rádobunk" egy geometriai pontot. A pontnak meg fog felelni egy rendezett számpár, a koordinátái. Az első koordináta legyen x, a második y. A kérdés az $A := \{(x, y) \in \Omega : |y - x| < h\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt.



Felírva az A és az Ω területeinek a hányadosát, kapjuk a kérdéses valószínűséget: $P(A) = 2h - h^2$.

Buffon–féle tűprobléma: Egy vízszintes síklapon párhuzamos egyeneseket húzunk egymástól 2 egységnyi távolságra. Mi a valószínűsége, hogy egy egységnyi hosszúságú tűt ráejtve erre a lapra, az elmetszi valamelyik egyenest?

Megoldás: Legyen y a tű középpontjának a távolsága a hozzá legközelebb eső egyenestől, x pedig a tű és az egyenes által bezárt szög mértéke radiánban. Így $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $y \in [0, 1]$. Legyen $\Omega = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$. Ekkor az előző feladathoz hasonlóan járhatunk el. Mivel adott x szögnél pontosan $y \leqslant \frac{1}{2} \sin x$ teljesülése esetén metszi az egyenest a tű, ezért a kérdés az $A := \{(x, y) \in \Omega : y \leqslant \frac{1}{2} \sin x\}$ esemény valószínűsége. Az ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt.



Az Ω területe $\frac{\pi}{2}$, az A területe pedig $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, ezért $P(A) = \frac{1}{\pi}$.

G Y A K O R L Ó F E L A D A T O K

1. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege hét?

2. Mennyi a valószínűsége, hogy ötös lottón kettes találatot érünk el?

3. Egy dobozban 7 piros és 5 fekete golyó van. Ha visszatevés nélkül kivesszük mind a 12 golyót, mennyi annak a valószínűsége, hogy feketét húzunk utoljára?

4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan öt darab hatost dobunk?

5. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány feketét kell hozzátenni, hogy fekete golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

6. Ketten megbeszélik, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Megállapodnak abban, hogy egyik a másikra maximum 15 percet vár. Mi a valószínűsége annak, hogy a találkozó létrejön?

7. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra kiválasztunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél kisebb?

8. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon kiválasztunk két pontot. Ezek a szakaszt három részre osztják. Mekkora a valószínűsége, hogy ezen három szakaszból háromszög szerkeszthető?

9. Két számot kiválasztunk a $(0, 1)$ intervallumban. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek négyzetösszege egynél nagyobb lesz?

10. Válasszunk véletlenszerűen egy pontot a $(0, 1)$ szakaszon, és egyet a $(0, 2)$ szakaszon. A kiválasztott pontok legyenek P_1 és P_2. Mennyi a valószínűsége, hogy az OP_1, OP_2 és egy egységnyi hosszúságú szakaszból háromszög alkotható, ha az O pont az origót jelöli?

3.3. Feltételes valószínűség

Kétszer dobunk egymás után egy kockával. Azt tippeljük a dobások előtt, hogy elsőre 1-est és másodikra 2-est, vagy elsőre 2-est és másodikra 3-ast dobunk, azaz bekövetkezik az $A = \{(1, 2), (2, 3)\}$ esemény. Ekkor $P(A) = \frac{2}{36}$. Végezzük el az első dobást, és tegyük fel, hogy bekövetkezik a $B = \{(1, i) : i = 1, 2, \ldots, 6\}$ esemény, azaz 1-est dobunk. Kérdés, hogy ilyen feltétellel mi az A esemény valószínűsége? A B feltétellel az A csak úgy következhet be, ha másodikra 2-est dobunk, azaz bekövetkezik az $A \cap B$ esemény. Másrészt a biztos esemény szerepét most átvette a B. Klasszikus valószínűségi mezőről van szó, így a valószínűség

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} : \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6},$$

ahol az abszolút érték jel a halmaz elemeinek a számát jelenti. A kapott eredményt terjesszük ki tetszőleges valószínűségi mezőre.

Legyenek A és B események és $P(B) \neq 0$. Ekkor a

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

hányadost az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűségének* nevezzük. Tehát $P(A \mid B)$ azt adja meg, hogy mennyi az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége, feltéve, hogy B bekövetkezik.

A feltételes valószínűség tulajdonságai:

$P(A \mid B) = 0$, ha $A \cap B = \emptyset$

$P(A \mid B) = 1$, ha $B \subset A$

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

$P(A \setminus B \mid C) = P(A \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

PÉLDA

Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

Megoldás: Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7, B pedig azt, hogy páratlan. Ekkor $A \subset B$ miatt $A \cap B = A$, így

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

Mivel $P(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ és $P(B) = \frac{1}{2}$, ezért $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

Legyen $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$ és $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $P(A \cup B)$ és a $P(\overline{A} \mid \overline{B})$ valószínűségeket.

Megoldás: Mivel $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$, ezért $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Másrészt $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$, ezért $P(B) = \frac{1}{8} / \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Mindezekből $P(A \cup B) = P(A) + + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, továbbá

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{5}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Teljes valószínűség tétele

Legyen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer, $P(B_i) \neq 0$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, továbbá A egy tetszőleges esemény. Ekkor

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}.$$

Bayes tétele

Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, A egy tetszőleges esemény, továbbá $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$, $P(A)$ valószínűségek közül egyik sem nulla. Ekkor minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$\boxed{P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}}.$$

Ha valamely A eseményt mint okozatot tekintjük, amit a $B_1, \dots, B_n$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az okozat bekövetkezésére, azaz a $P(A \mid B_i)$ valószínűségeket tudva, a teljes valószínűség tétele értelmében az okozat valószínűsége meghatározható. Másfelől, ha az A okozat már bekövetkezett, akkor a Bayes-tétellel következtethetünk arra, hogy egy kiválasztott ok milyen valószínűséggel szerepelt az A létrejöttében.

PÉLDA

Két doboz mindegyikében 100-100 darab csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel kiválasztjuk valamelyiket, amelyből találomra kiveszünk egy csavart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a csavar jó?

Megoldás: Jelölje B_1 azt az eseményt, hogy az első dobozból húzunk, míg B_2 azt, hogy a másodikból, illetve A azt, hogy a kiválasztott csavar jó. Ekkor B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot, így a teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{94}{100} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}92.$$

Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25%-át adja, és 5%-os selejtaránnyal dolgozik. A második 35%-ot termel, 4%-os selejtaránnyal, végül a harmadik 40%-ot ad 2%-os selejttel. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mi a valószínűsége, hogy az első gép gyártotta?

Megoldás: Jelentse A azt, hogy selejtes terméket választottunk, B_i pedig azt, hogy az i-edik gép gyártotta ($i = 1, 2, 3$). Ekkor a Bayes-tétel értelmében a kérdéses valószínűség

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával hatost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

2. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jutott ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következő sem kapott?

3. Tegyük fel, hogy az A és B eseményekre $P(A) = 0{,}7$ és $P(B) = 0{,}8$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy ekkor $0{,}625 \leqslant P(A \mid B)$.

4. Tegyük fel, hogy $P(A \mid B) = 0{,}7$, $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}3$ és $P(B \mid A) = 0{,}6$. Mivel egyenlő $P(A)$?

5. 100 darab műszer között előfordulhat 0, 1, 2, 3 vagy 4 hibás. Ezek előfordulásának valószínűsége rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$. Feltételezve, hogy bármelyik műszert egyenlő valószínűséggel vehetjük meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy kifogástalan műszert veszünk?

6. Néhány doboz mindegyikében 600-600 darab golyó van. Az elsőben 2 golyó piros, és a többi dobozban mindig 5-tel több a piros golyók száma, mint az előzőben volt. Az utolsó dobozban csak 3 golyó nem piros. Valamelyik dobozból egy golyót kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy pirosat választunk?

7. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 0,75 valószínűséggel első osztályú. A kikerült terméket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek 0,02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek 0,05. Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely a vizsgálaton első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

3.4. Események függetlensége

Jelentse A azt az eseményt, hogy dobókockával nem dobunk 3-nál nagyobbat, vagyis $A = \{1, 2, 3\}$, másrészt B jelentse azt, hogy 3-ast vagy 4-est dobunk, tehát $B = \{3, 4\}$. Ekkor $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ és $P(A) = \frac{3}{6}$, vagyis A-nak a valószínűsége, függetlenül attól, hogy B bekövetkezett-e vagy sem, mindig $\frac{1}{2}$.

A továbbiakban, ha $P(A) = P(A \mid B)$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy A független B-től. Könnyű ellenőrizni, hogy B is független A-tól, hiszen $P(B) = P(B \mid A) = \frac{1}{3}$.

A függetlenségnek ez a tulajdonsága általánosan is igaz, vagyis $P(A)P(B) \neq 0$ esetén $P(A) = P(A \mid B)$ pontosan akkor teljesül, ha $P(B) = P(B \mid A)$. Azaz A pontosan akkor független B-től, ha B független A-tól. Ezért röviden csak azt mondjuk, hogy az A és B események egymástól függetlenek.

Ha $P(A)P(B) \neq 0$, akkor a függetlenség fogalma ekvivalens azzal, hogy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ezért a továbbiakban ezt fogadjuk el a függetlenség definíciójának:

Azt mondjuk, hogy az A és B események *függetlenek*, ha

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}.$$

PÉLDA

Egy dobozban 2 fehér és 4 fekete golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk négy golyót. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fekete. A B esemény jelentse azt, hogy az utolsónak kivett golyó fekete. Ekkor az A és B események nem függetlenek, mert $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(B) = \frac{4}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}$, azaz $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Antal és Béla céltáblára lőnek. Antal 0,8 valószínűséggel találja el a céltáblát, Béla pedig 0,5-del. A lövések egymástól függetlenek. Ha Antal és Béla egy-egy lövést adnak le, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyikőjük talál?

Megoldás: Az A esemény jelentse azt, hogy Antal talál, illetve B azt, hogy Béla talál. Ekkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}9$.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy urnában 4 egyforma papírlap található. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé. Az elsőn 000, a másodikon 011, a harmadikon 101 és a negyediken 110 olvasható. Húzzunk ki egy lapot. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik számjegye 1-es ($i = 1, 2, 3$). Mutassa meg, hogy az A_1, A_2, A_3 események közül bármely kettő független.

2. Egy kockát és két pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán 6-ost, az egyik pénzérmén írást s a másikon fejet dobunk?

3.5. Eloszlás

Egy játékban 10 forintot nyerünk, ha egy pénzérme a fej oldalára esik, ellenkező esetben pedig 5 forintot veszítünk. Ebben a kísérletben a biztos esemény $\Omega = \{\text{fej, írás}\}$. Az előbbi játékszabály leírható egy olyan függvénnyel, amely a fejhez 10-et rendel, míg az íráshoz -5-öt. A továbbiakban egy ilyen függvényt – amely tehát egy Ω-n értelmezett valósértékű függvény – valószínűségi változónak fogunk nevezni.

Egy valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha van olyan számsorozat, melynek az értékkészlete megegyezik a valószínűségi változó értékkészletével.

Ha ξ (ejtsd: kszí) diszkrét valószínűségi változó és R_ξ az értékkészlete, akkor ξ *eloszlásán* a

$$k \mapsto P(\xi = k), \quad k \in R_\xi$$

függvényt értjük.

Csak diszkrét valószínűségi változó esetén definiálunk eloszlást. Más típusú valószínűségi változókat az úgynevezett eloszlásfüggvénnyel, illetve sűrűségfüggvénnyel fogjuk jellemezni, melyekről később esik szó.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó és R_ξ az értékkészlete, akkor

$$\boxed{\sum_{k \in R_\xi} P(\xi = k) = 1}.$$

Másrészt, ha nemnegatív számok összege 1, akkor van olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek ezek a számok alkotják az eloszlás értékkészletét.

PÉLDA

Húzunk egy lapot egy 32 lapos magyar kártyából. Adjuk meg a lap értékének eloszlását. (Számozott lap értéke az adott szám, alsó kettőt, felső hármat, a király négyet, az ász 11-et ér.)

Megoldás: Egy lap lehetséges értékei $2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11$, ezért $P(\xi = k) = \frac{4}{32}$ minden $k \in \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11\}$ esetén.

Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármat kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen ξ a kihúzott fehérek száma. Adjuk meg az eloszlását.

Megoldás: $P(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}$, $P(\xi = 1) = \frac{9\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455}$, $P(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2}\cdot 6}{\binom{15}{3}} =$ $= \frac{216}{455}$, $P(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}$.

Legyen $0 < p < 1$ és $q = 1-p$. Alkothatnak-e a qp^{k-1}, $(k = 1, 2, \dots)$ számok eloszlást?

Megoldás: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} qp^{k-1} = \frac{q}{1-p} = 1$, így létezik olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek ezek a számok alkotják az eloszlását. (Például, ha q annak a valószínűségét jelenti, hogy egy esemény egy kísérletben bekövetkezik, és ξ azt jelenti, hogy a figyelt esemény hányadik kísérletben következett be először, akkor ξ eloszlása ilyen. Ezt az eloszlást – mivel ezek a számok geometriai sorozatot alkotnak – *geometriai eloszlás*nak nevezzük.)

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Két kockával dobunk. A dobott számok különbségének abszolútértéke valószínűségi változó. Határozzuk meg az eloszlását.

2. Legyen a ξ valószínűségi változó értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza. A $\{\xi = k\}$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$-sal. Határozzuk meg az eloszlást.

3. Adja meg az ötös lottó jokerszámában a nullák számának eloszlását. (A jokerszám hatjegyű, melynek a számjegyeit visszatevéses módszerrel húzzák ki.)

3.6. Eloszlásfüggvény

A ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := P(\xi < x) .$$

Az eloszlásfüggvény monoton növekvő, ∞-ben 1, $-\infty$-ben 0 a határértéke, továbbá minden pontban balról folytonos.

Ha egy tetszőleges $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő, ∞-ben 1, $-\infty$-ben 0 a határértéke, továbbá minden pontban balról folytonos, akkor létezik olyan valószínűségi változó, amelynek F az eloszlásfüggvénye.

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $\boxed{P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)}$.

Ha ξ eloszlásfüggvénye x_0-ban folytonos, akkor $P(\xi = x_0) = 0$.

PÉLDA

Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármat kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen ξ a kihúzott fehérek száma. Ekkor

$$\{\xi < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \{\xi = 0\}, & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 1\}, & \text{ha } 1 < x \leqslant 2, \\ \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 1\} \cup \{\xi = 2\}, & \text{ha } 2 < x \leqslant 3, \\ \Omega, & \text{ha } x > 3, \end{cases}$$

ezért

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \frac{20}{455}, & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{20+135}{455}, & \text{ha } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{20+135+216}{455}, & \text{ha } 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

Létezik-e olyan valószínűségi változó, amelynek az alábbi F az eloszlásfüggvénye?

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Megoldás: Az F értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, másrészt $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ miatt az F monoton növekvő és ∞-ben 1 a határértéke. Mivel $F(x) = 0$, ha $x < 1$, ezért F-nek $-\infty$-ben 0 a határértéke. Könnyen látható, hogy F minden pontban folytonos. Tehát ez eloszlásfüggvény.

Az első példában definiált diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének minden R_ξ-beli pontban szakadási helye van, azaz nem folytonos. Ez nem csak ennél az esetnél van így. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének pontosan azokban a pontokban van szakadási helye, amelyek benne vannak a valószínűségi változó értékkészletében.

1. Három kockával dobunk egyszerre. Számítsa ki a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét az $x = 5{,}2$ helyen.

2. Vizsgálja meg a következő függvényeket. Melyik lehet eloszlásfüggvény?

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & \text{ha } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Két kockával dobunk. A dobott számok különbségének abszolútértéke valószínűségi változó. Határozza meg az eloszlásfüggvényét.

4. Ketten megbeszélik, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Mi a várakozási idő eloszlásfüggvénye?

3.7. Sűrűségfüggvény

A fizikában egy test tömegsűrűségét úgy adják meg, hogy a test tömegét elosztják a térfogatával. Most is ilyen jellegű fogalmat határozunk meg, csak valószínűségi változóra.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy ξ valószínűségi változó az $[x, x+\varepsilon)$ intervallumban legyen

$$P(x \leqslant \xi < x+\varepsilon) = F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x).$$

Most ez lesz az adott intervallum „tömege”. Ezt kell elosztani az intervallum „térfogatával”, azaz a hosszával, mely ε. Így a sűrűség

$$\frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon}.$$

Ebből az x pontban a sűrűséget úgy kaphatjuk meg, hogy az ε konvergál 0-hoz. Az x-beli sűrűséget jelöljük $f_\xi(x)$-szel. Tehát

$$f_\xi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} = F'_\xi(x).$$

A ξ valószínűségi változót *folytonosnak* nevezzük, ha az eloszlásfüggvénye folytonos és véges sok ponttól eltekintve differenciálható. Ekkor a ξ *sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) := F'_\xi(x)$$

azon x pontokban, ahol F_ξ differenciálható. A nem differenciálható pontokban a sűrűségfüggvény tetszőleges nemnegatív értéket felvehet.

PÉLDA

Legyen

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ez az előző fejezet értelmében eloszlásfüggvény, azaz létezik olyan ξ valószínűségi változó, melyre $F_\xi = F$ teljesül. Ekkor a ξ folytonos valószínűségi változó, mert F_ξ csak két pontban nem differenciálható, továbbá

$$f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Diszkrét valószínűségi változó nem lehet folytonos, ugyanis az eloszlásfüggvénye nem minden pontban folytonos.

Létezik olyan valószínűségi változó, amely nem diszkrét és nem folytonos, de mi a továbbiakban ilyen esetekkel nem foglalkozunk.

Ha ξ folytonos, akkor $P(\xi = x) = 0$ és

$$\boxed{F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{y\to-\infty} \int_{y}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$ ún. *improprius integrál.*

Ha ξ folytonos valószínűségi változó, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor

$$\boxed{P(a \leqslant \xi < b) = \int_{a}^{b} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{és} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1}$$

ahol $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{y} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$ szintén improprius integrál.

Ha az $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ függvényre $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ teljesül, akkor létezik olyan folytonos valószínűségi változó, melynek f a sűrűségfüggvénye.

PÉLDA

Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Korábban láttuk, hogy F_ξ valóban eloszlásfüggvény. Így

$f_\xi(x) = F'(x) = (0)' = 0$, ha $x < 1$ és

$f_\xi(x) = F'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$, ha $x \geqslant 1$.

Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e ez sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg az eloszlásfüggvényt.

Megoldás: f nemnegatív, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tehát f sűrűségfüggvény. Így

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^x = \frac{x^2 + x}{2},$$

ha $0 \leqslant x < 1$, illetve

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0,$$

ha $x < 0$ és

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_1^x f(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t + \frac{1}{2}\right) dt + \int_1^x 0dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^1 + 0 = 1,$$

ha $x \geqslant 1$.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Legyen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez sűrűségfüggvény-e, és ha igen, mi a hozzátartozó eloszlásfüggvény? Ha ξ sűrűségfüggvénye f, határozza meg a $P(-1 \leqslant \xi < 5)$ értékét.

2. Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - \cos x, & \text{ha } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Határozza meg ξ sűrűségfüggvényét.

3.8. Várható érték

Egy játékban 6 forintot nyerünk, ha kockán 6-ost dobunk. Minden más esetben annyi forintot veszítünk, amennyit a kocka mutat. Érdemes-e játszani ezt a játékot, azaz hosszú távon átlagban egy játékban nyerünk vagy vesztünk? Például, ha ötször játszunk és a dobássorozat eredménye 2, 6, 1, 2, 3, akkor játékonként átlagban

$$\frac{-2+6-1-2-3}{5} = -\frac{2}{5}$$

forintot nyertünk, azaz $\frac{2}{5}$ forintot vesztettünk. A valószínűség tárgyalásakor leírt tapasztalat szerint a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik. Így, ha ezt a játékot n-szer játszottuk, ahol n nagy szám, akkor például 6-ost körülbelül $n \cdot \frac{1}{6}$-szor dobtunk. Ebből következően n dobás után játékonként átlagban körülbelül

$$\frac{-1 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot n \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot n \cdot \frac{1}{6}}{n} = -\frac{3}{2}$$

forint a nyereség, azaz 1,5 forint a veszteség. Vagyis hosszú távon ezt a játékot nem érdemes játszani.

Természetesen, ha „cinkeljük" a kockát, azaz nem egyforma valószínűséggel eshet a kocka minden oldalára, akkor változik a helyzet. Ha például $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dobunk 6-ost, a többi oldalára pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel esik a kocka, akkor az átlagos nyeremény hosszú távon

$$\frac{-1 \cdot n \cdot \frac{1}{10} - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot n \cdot \frac{1}{10} - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{10} - 5 \cdot n \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot n \cdot \frac{1}{2}}{n} = \frac{3}{2},$$

vagyis ekkor már érdemes játszani. Általánosítva, ha p_i valószínűséggel dobunk a kockán i-t, akkor az eredmény

$$(-1) \cdot p_1 + (-2) \cdot p_2 + (-3) \cdot p_3 + (-4) \cdot p_4 + (-5) \cdot p_5 + 6 \cdot p_6,$$

melyet a nyeremény várható értékének nevezünk. Ezt általánosítjuk a következőkben.

Ha a ξ diszkrét valószínűségi változónak az értékkészlete $\{x_1, x_2, \ldots\}$, akkor az

$$E(\xi) := \sum_i x_i P(\xi = x_i)$$

összeget a ξ *várható értékének* nevezzük.

Ha ξ folytonos, akkor $P(\xi = x) = 0$ minden valós x esetén, ezért az előző definíció ekkor nem alkalmazható közvetlenül. Analóg formulát azonban nyerhetünk, ha ξ-t kis intervallumokon az intervallum alsó végpontjával helyettesítjük. Tehát

$$\sum_i x_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1}) = \sum_i x_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

ahol $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ alulról és felülről nem korlátos sorozat. Vagyis ha ξ folytonos valószínűségi változó, akkor az

$$E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

számot a ξ *várható értékének* nevezzük.

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\boxed{E(a\xi + b\eta) = aE(\xi) + bE(\eta)} \quad \text{és} \quad \boxed{E(a\xi + b) = aE(\xi) + b}.$$

Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó értékkészlete $\{x_1, x_2, \ldots\}$, akkor

$$\boxed{E(\xi^2) = \sum_i x_i^2 P(\xi = x_i)}.$$

Ha a ξ folytonos valószínűségi változó, akkor

$$\boxed{E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x}.$$

PÉLDA

Dobókockajátékban a ξ valószínűségi változó értéke legyen az a szám, amit a kocka mutat. Határozzuk meg ξ, illetve ξ^2 várható értékét.

Megoldás: Mivel a ξ értékkészlete $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ezért

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{6} x_i P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

és

$$E(\xi^2) = \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) := \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ, illetve ξ^2 várható értékét.

Megoldás: Az f_ξ sűrűségfüggvény, mert egyrészt nemnegatív, másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1.$$

Így

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_0^1 2x^3dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Ketten megállapodnak, hogy este 8 és 9 óra között találkoznak. Mi a várakozási idő, illetve a várakozási idő négyzetének várható értéke?

2. Két kockát feldobunk. Mi a dobott számok összegének, illetve a dobott számok abszolút eltérésének várható értéke?

3. Egy gép egy indításra p valószínűséggel indul be. Várhatóan hányadik indításra fog beindulni a gép? (Pontosabban ha ξ azt jelenti, hogy a gép hányadikra indult be, akkor kérdés a ξ várható értéke.)

3.9. Szórásnégyzet

Egy szerencsejátékban akkor nyerünk, ha egy pénzérmével írást dobunk, ellenkező esetben veszítünk. Bár ekkor a tét nagyságától függetlenül a nyeremény várható értéke mindig 0, mégis például százezer forintos tétnél jobban meggondolnánk, hogy játsszuk-e ezt a játékot. Nyilván azért, mert ekkor igaz, sokat lehet nyerni, de veszíteni is. Hiszen minél nagyobb a tét, annál nagyobb a nyeremény eltérése, szóródása a várható értéktől.

A szórás mértékét a négyzetes eltérések várható értékével fogjuk jellemezni, ezért ezt nem szórásnak, hanem szórásnégyzetnek fogjuk nevezni.

A ξ valószínűségi változó *szórásnégyzete*

$$D^2(\xi) := E\left((\xi - E\xi)^2\right)$$

illetve *szórása*

$$D(\xi) := \sqrt{E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big)}\,.$$

A szórásnégyzet tulajdonságai:

$\boxed{D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)}$ ahol $E^2(\xi) := \big(E(\xi)\big)^2$.

$\boxed{D(a\xi + b) = |a|D(\xi)}$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$

PÉLDA

Adjuk meg az előző fejezet példáiban definiált valószínűségi változók szórásnégyzeteit, illetve szórásait.

Megoldás: Az első példában $E(\xi) = 3{,}5$ és $E(\xi^2) = \frac{91}{6}$, amelyből következik, hogy $D^2(\xi) = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 \approx 2{,}9167$ és $D(\xi) \approx 1{,}7078$.

A másodikban $E(\xi) = \frac{2}{3}$ és $E(\xi^2) = \frac{1}{2}$, ezért $D^2(\xi) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$ és $D(\xi) \approx 0{,}2357$.

GYAKORLÓ FELADATOK

Adja meg az előző fejezet feladataiban definiált valószínűségi változók szórásnégyzeteit, illetve szórásait.

3.10. Nevezetes eloszlások

Binomiális eloszlás

Legyen egy dobozban egy piros és két fekete golyó. Vegyünk ki véletlenszerűen egy golyót, majd tegyük vissza. Ezt ismételjük meg tízszer. Legyen ξ azon esetek száma, amikor pirosat vettünk ki. Ez egy úgynevezett *visszatevéses mintavétel.* ξ a piros golyó húzásának az ún. *gyakorisága.* Határozzuk meg ξ eloszlását.

A ξ értékkészlete $\{0, 1, \ldots, 10\}$. Annak a valószínűsége, hogy például az első k darab húzáskor pirosat választunk, a többinél pedig nem, a húzások függetlensége miatt $\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$. Másrészt $\binom{10}{k}$-féleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k-szor húztunk piros golyót. Így

$$P(\xi = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}.$$

Legyen $\{0, 1, \ldots, n\}$ egy ξ diszkrét valószínűségi változó értékkészlete, melynek eloszlása

$$\boxed{P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

ahol $0 < p < 1$. Ekkor ξ-t n-edrendű p paraméterű *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Az előző példában tehát ξ 10-edrendű $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.

Általánosan is igaz, hogy egy p valószínűségű esemény gyakorisága n db kísérlet végrehajtása után n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású.

Ha a ξ egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\boxed{E(\xi) = np} \quad \text{és} \quad \boxed{D^2(\xi) = np(1-p)}.$$

Vagyis az előző példában a piros golyó húzásszámának várható értéke $10 \cdot \frac{1}{3} \approx 3{,}33$, illetve szórása $\sqrt{10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 1{,}49$.

Poisson-eloszlás

Legyen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ egy ξ valószínűségi változó értékkészlete, melynek eloszlása

$$\boxed{P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

ahol $\lambda > 0$ konstans. Ekkor ξ-t *Poisson-eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Ha ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, akkor

$$\boxed{E(\xi) = D^2(\xi) = \lambda}.$$

Nagy n és kis p esetén, $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlás jól közelíti az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlást.

PÉLDA

Ha $n = 1000$ lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül $p = 0{,}004$ valószínűséggel talál, akkor mi annak a valószínűsége, hogy 3-szor találunk célba?

Megoldás: Mivel a találatok száma binomiális eloszlású, ezért

$$P(\xi = 3) = \binom{1000}{3} 0{,}004^3 \cdot 0{,}996^{997},$$

de most használhatjuk a Poisson-eloszlással való közelítést. $\lambda = np = 4$, ezért

$$P(\xi = 3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0{,}1954.$$

Egy félkilós kalácsban átlagban 80 mazsolaszem található. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 5 dekagrammos szeletben nincs mazsola?

Megoldás: Egy szeletben a mazsolaszemek száma (jelöljük ξ-vel) Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Egy szeletben az átlagos számuk 8, tehát $\lambda = 8$. Így $P(\xi = 0) = \frac{8^0}{0!} e^{-8} = e^{-8}$.

Egyenletes eloszlás

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, továbbá $a < b$ valós számok. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$\boxed{f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}}$$

akkor ξ-t *egyenletes eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük az (a, b) intervallumon.

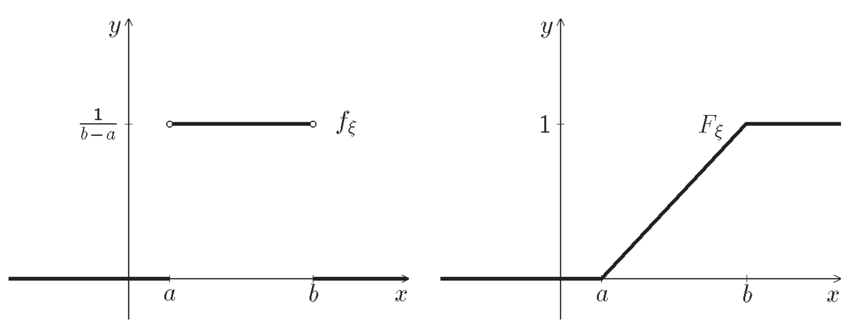
Az egyenletes eloszlás a geometriai valószínűségi mezőre jellemző. Legyen például $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olyan geometriai valószínűségi mező, amelyben $\Omega = (a, b)$. Ekkor a

$$\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \xi(\omega) := \omega$$

az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\boxed{F_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } x \geqslant b. \end{cases}}$$



Egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye.

Ha ξ az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\boxed{E(\xi) = \frac{a+b}{2}} \quad \text{és} \quad \boxed{D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}}.$$

PÉLDA

Mekkora valószínűséggel vesz fel egy $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értéktől a szórásnál nagyobb értékkel tér el?

Megoldás: Mivel $E(\xi) = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = 0$ és $D(\xi) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 1$, ezért

$$\begin{aligned} P\big(|\xi - E(\xi)| > D(\xi)\big) &= P(|\xi| > 1) = P\big(\{\xi > 1\} \cup \{\xi < -1\}\big) = \\ &= P(\xi > 1) + P(\xi < -1) = 1 - F_\xi(1) + F_\xi(-1) = \\ &= 1 - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}4226. \end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó és $\lambda > 0$ valós szám. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$\boxed{f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}}$$

akkor ξ-t λ paraméterű *exponenciális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.

Vizsgáljuk egy olyan alkatrész élettartamát, amely bármikor meghibásodhat, függetlenül attól, hogy milyen régen állítottuk üzembe. Pontosabban, ha az alkatrész x ideig működőképes maradt, akkor a következő y ideig ugyanakkora eséllyel fog működni, mintha most állították volna üzembe. Ezt a tulajdonságot *örökifjú tulajdonságnak* nevezzük. Képlettel tehát minden $x, y > 0$ esetén

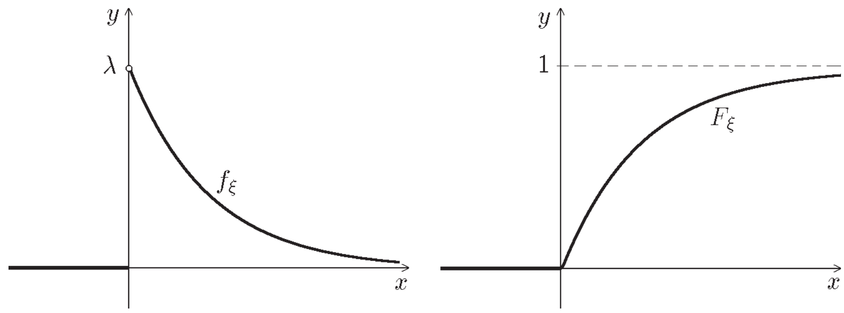
$$P(\xi \geqslant x + y \,|\, \xi \geqslant x) = P(\xi \geqslant y)$$

teljesül, ahol ξ az élettartamot jelenti. Bizonyítható, hogy az ilyen alkatrész élettartama exponenciális eloszlású.

Ha adott idő alatt egy esemény bekövetkezéseinek a száma Poisson-eloszlású, akkor két ilyen esemény bekövetkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású.

Ha ξ $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor az eloszlásfüggvénye

$$\boxed{F_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}}$$



Exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye.

Ha ξ $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\boxed{E(\xi) = \frac{1}{\lambda}} \quad \text{és} \quad \boxed{D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}}.$$

PÉLDA

Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0,1. Mennyi a valószínűsége, hogy 3 percen belül sorra kerülünk, feltételezve, hogy a várakozási idő exponenciális eloszlású?

Megoldás: Jelentse ξ a várakozási időt. Ekkor

$$\begin{aligned} P(\xi > 6) &= 0{,}1 \\ 1 - F_\xi(6) &= 0{,}1 \\ F_\xi(6) &= 0{,}9 \\ 1 - e^{-6\lambda} &= 0{,}9 \\ e^{-6\lambda} &= 0{,}1 \\ -6\lambda &= \ln 0{,}1 \\ \lambda &= -\frac{1}{6}\ln 0{,}1. \end{aligned}$$

Ebből $P(\xi < 3) = F_\xi(3) = 1 - e^{\frac{1}{2}\ln 0{,}1} = 1 - \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}6838.$

Normális eloszlás

Gauss a XIX. század elején a mérési hibák eloszlását tanulmányozva jutott el a következő eloszláshoz:

Legyen ξ olyan folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$\boxed{f_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Ekkor ξ-t *standard normális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük. Az előző sűrűségfüggvényt φ-vel (ejtsd: fí) szokás jelölni.

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük. Tehát

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

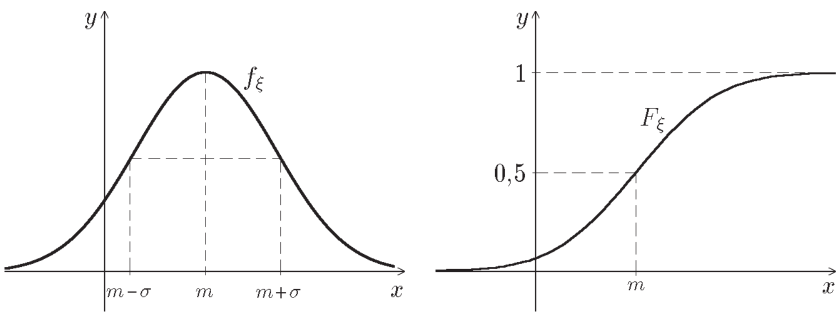
Φ nem elemi függvény, azaz nem lehet felírni az eddig megismert ún. elemi függvények és az alapműveletek véges sokszori alkalmazásával.

$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, továbbá Φ szigorúan monoton növekvő.

Ez lehetővé teszi, hogy Φ értékeit táblázatba rendezzük, melyben elég a nemnegatív x-ek helyettesítési értékeit megadni (lásd a 83. oldalon található táblázatot).

Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ (ejtsd: szigma). Ekkor a $\sigma\xi + m$ valószínűségi változót m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.

A standard normális eloszlás megegyezik az $m = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlással.



Normális eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye.

Legyen ξ m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)} \quad \boxed{E(\xi) = m} \quad \text{és} \quad \boxed{D^2(\xi) = \sigma^2}$$

PÉLDA

Egy gyár izzókat készít. Ezek élettartama normális eloszlású valószínűségi változó 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5% garanciaigényt kíván kielégíteni?

Megoldás: Jelentse ξ egy izzó élettartamát órában mérve. Ha t órára vállalnak garanciát, akkor

$$P(\xi < t) \leqslant 0{,}05$$
$$F_\xi(t) \leqslant 0{,}05$$

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{t-1170}{100}\right) &\leqslant 0{,}05 \\
1-\Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right) &\leqslant 0{,}05 \\
0{,}95 &\leqslant \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right).
\end{aligned}
$$

Mivel Φ szigorúan monoton növekvő, és a táblázat alapján $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95$, ezért

$$
\begin{aligned}
1{,}64 &\leqslant \frac{1170-t}{100} \\
t &\leqslant 1006.
\end{aligned}
$$

Tehát legfeljebb 1006 órára szóljon a garancia.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. 100 alkatrész között 9 selejtes van. Visszatevéses módszerrel kiválasztunk egy 50 elemű mintát. Mi a valószínűsége, hogy lesz selejtes alkatrész a mintában? Mennyi a selejtesek számának várható értéke és szórása?

2. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75. Mekkora a valószínűsége, hogy 6 napon keresztül csak 3 napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan? Mennyi lesz 6 nap alatt a zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

3. Egy gép által gyártott termékek között naponta átlagosan 12 darab lesz selejtes, szórása $\sqrt{11{,}88}$. Hány terméket készít a gép naponta?

4. Egy augusztusi éjszakán átlagban 10 percenként észlelhető csillaghullás. A megfigyelések szerint az észlelt csillaghullások száma időben Poisson-eloszlású. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?

5. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba van. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott lapon nem lesz sajtóhiba, ha feltételezzük, hogy a sajtóhibák száma egy oldalon Poisson-eloszlású?

6. A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $E(\xi) = D^2(\xi) = 4$. Írja fel ξ eloszlásfüggvényét.

7. Egy szövőgép 400 szállal dolgozik. Az egyes szálak élettartama, tehát az az idő, amíg a szál el nem szakad, exponenciális eloszlású, átlagban 150 óra. A szakadások egymástól függetlenek. Mennyi a valószínűsége, hogy a gép fonalszakadás miatt 3 órán belül megáll?

8. Egy cukorcsomagoló gép 10 dkg várható tömegű csomagokat készít 5 gramm szórással. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vásárolt csomagban 11 dkg-nál több cukrot kapunk, ha feltesszük, hogy a töltött tömeg normális eloszlású?

3.11. A nagy számok törvénye

Csebisev-egyenlőtlenség

Ha ξ valószínűségi változó, akkor

$$\boxed{P\big(|\xi - E(\xi)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}}$$

illetve

$$\boxed{P\big(|\xi - E(\xi)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}}$$

bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén.

PÉLDA

Egy gyárban szögeket készítenek, melyeket egy automata gép csomagol. Egy csomagban a szögek számának várható értéke 1000, szórása 10. A szögek számának eloszlását nem ismerjük. Legfeljebb mekkora a valószínűsége annak, hogy egy csomagban a szögek száma a várható értéktől 20-szal vagy annál többel tér el?

Megoldás: Jelölje ξ a szögek számát. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$P\big(|\xi - 1000| \geqslant 20\big) \leqslant \frac{10^2}{20^2} = 0{,}25.$$

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye

Legyen n db kísérlet végrehajtása után ϱ_n egy adott A esemény gyakorisága, azaz a bekövetkezéseinek a száma. Ekkor a $\frac{\varrho_n}{n}$ hányadost az A *relatív gyakoriságának* nevezzük.

Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget az A relatív gyakoriságára. Ekkor a következő törvényt kapjuk:

Legyen $p := P(A)$ és $q := 1 - p$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$$

illetve

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}}.$$

Ez a törvény azt állítja, hogy egy esemény relatív gyakorisága az esemény valószínűségének adott környezetén kívül annál kisebb valószínűséggel fordulhat elő, minél több kísérletet végeztünk. Tehát pontosan a valószínűség tárgyalásakor leírt tapasztalatot fejezi ki.

PÉLDA

Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nél kisebb hibával megközelítse? Mi van akkor, ha a kocka cinkelt, azaz a 6-os dobásnak a valószínűségét nem ismerjük?

Megoldás: Szabályos kocka esetén a 6-os dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$. Így a nagy számok törvénye alapján

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n}-\frac{1}{6}\right|<0{,}01\right)\geqslant 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n\cdot 0{,}01^2}\geqslant 0{,}9.$$

Ebből $n\geqslant 13\,889$, vagyis legalább 13 889-szer kell dobni. Ha a kocka cinkelt, akkor

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n}-p\right|<0,01\right)\geqslant 1-\frac{1}{4n\cdot 0{,}01^2}\geqslant 0{,}9,$$

melyből $n\geqslant 25\,000$ adódik.

GYAKORLÓ FELADATOK

1. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95%-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt százezer darab terméket kell készíteni. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

2. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni legalább 0,9 valószínűséggel a találatok száma?

3. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a kapott arány a valódi aránytól 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,01-dal térjen el?

3.12. Moivre–Laplace-tétel

Korábban láttuk, hogy a binomiális eloszlás bizonyos feltételekkel jól közelíthető Poisson-eloszlással. A Moivre – Laplace-tétel azt állítja, hogy n-edrendű binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye nagy n-re jól közelíthető normális eloszlással.

Legyen ξ egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó és $q := 1-p$. Ekkor minden $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<x\right)=\Phi(x)$$

teljesül. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy nagy n esetén

$$P(\xi<x)\approx\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

PÉLDA

Ha $n = 1000$ lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül $p = 0{,}11$ valószínűséggel talál, akkor mi annak a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebbszer találunk célba?

Megoldás: Legyen ξ a találat gyakorisága, ami binomiális eloszlású. Ebből következően

$$P(\xi < 100) = \sum_{k=0}^{99} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}11^k \cdot 0{,}89^{1000-k},$$

amit nehéz kiszámolni. De alkalmazhatjuk a Moivre – Laplace-tételt, mely szerint

$$P(\xi < 100) \approx \Phi\left(\frac{100-110}{\sqrt{110 \cdot 0{,}89}}\right) \approx \Phi(-1{,}01) = 1 - \Phi(-1{,}01) \approx 0{,}1562.$$

Egy gyárból kikerülő termékek 1%-a selejtes. Ha 500 darab terméket vásárolunk, mi a valószínűsége, hogy ezek között a selejtesek száma 7 és 14 között lesz?

Megoldás:

$$P(7 \leqslant \xi \leqslant 14) \approx \Phi\left(\frac{14 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 500 \cdot 0{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) \approx 0{,}184.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy szabályos dobókockával 100-szor dobva, mi a valószínűsége, hogy a hatos dobások száma 15 és 20 közé esik?

2. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású, átlagban másfél év. Mi a valószínűsége, hogy 2000 ilyen alkatrész között 1000-nél kevesebb lesz azok száma, melyek élettartama egy évnél kevesebb?

4. fejezet

Lineáris algebra

4.1. Mátrixok

Ha sok számadattal dolgozunk, akkor az áttekinthetőség miatt célszerű ezeket táblázatba rendezni.

Mátrixnak nevezünk $m \cdot n$ darab a_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ módon jelölt valós számok alábbi táblázatba rendezését:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Azt mondjuk, hogy ez a mátrix $m \times n$ *típusú*, mert m sorból és n oszlopból áll. Az a_{ij}-vel jelölt szám az i-edik sorban és a j-edik oszlopban található. A fenti mátrixot részletes kiírása helyett a következő módokon is szokták jelölni: $(a_{ij})_{m\times n}$ vagy $\mathbf{A}_{m\times n}$ illetve ha a típus máshonnan kiderül, esetleg nem fontos, akkor $\mathbf{A}$.

Az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixot *n-edrendű négyzetes mátrixnak* nevezzük. Ebben az ún. *főátlót* az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ számok alkotják.

Például a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix rendje 3 és a főátlójának az elemei 1, 5, 9.

A *háromszögmátrix* olyan négyzetes mátrix, melynek a főátlója felett vagy alatt csupa 0 áll. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Az *átlós mátrix* olyan négyzetes mátrix, melynek a főátlója felett és alatt csupa 0 áll. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Az n*-edrendű egységmátrix* olyan n-edrendű átlós mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll. Jele: E_n. Például a harmadrendű egységmátrix

$$\mathbf{E}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha egy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix sorait rendre felcseréljük az oszlopaival, akkor a mátrix *transzponáltját* kapjuk. Jele: $\mathbf{A}^\top$. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Nyilván egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja $n \times m$ típusú. Egyszerű tulajdonság még, hogy

$$\boxed{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top}$$

Az $n \times 1$ típusú mátrixot *oszlopvektornak* nevezzük. Például

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Az $1 \times n$ típusú mátrixot *sorvektornak* nevezzük. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ha egy $m \times n$ típusú mátrix minden eleme 0, akkor azt $m \times n$ típusú *nullmátrixnak* nevezzük. Jele: $\mathbf{O}_{m\times n}$. Például a 2×3 típusú nullmátrix

$$\mathbf{O}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Műveletek mátrixokkal

Összeadás, kivonás, számmal való szorzás

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \\ (a_{ij})_{m\times n} - (b_{ij})_{m\times n} := (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} \\ k \cdot (a_{ij})_{m\times n} := (k \cdot a_{ij})_{m\times n}, \text{ ahol } k \in \mathbb{R} \end{array}}$$

PÉLDA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$-\mathbf{A}_{m\times n} := (-1) \cdot \mathbf{A}_{m\times n}$. Ezt a mátrixot az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix *ellentettjének* nevezzük. Nyilván $-\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n}$.

Mátrixok szorzása

Két mátrix akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával, azaz $\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{B}_{n\times p}$ alakú szorzatokat értelmezünk. Ekkor az eredmény $m \times p$ típusú mátrix lesz, melynek az i-edik sorában és j-edik oszlopában levő elemet a következő képlettel kell kiszámolni:

$$\boxed{a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}}$$

azaz az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának az elemeit rendre megszorozzuk a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopának az elemeivel, majd ezeket összeadjuk (*sor-oszlop kompozíció*).

Példaként végezzük el a következő szorzást:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

A számolást célszerű az alábbiak szerint végezni:

		1	**2**	**3**
		4	**5**	**6**
1	**2**	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = \mathbf{9}$	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = \mathbf{12}$	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = \mathbf{15}$
3	**4**	$3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = \mathbf{19}$	$3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = \mathbf{26}$	$3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = \mathbf{33}$

Tehát

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}.$$

Megmaradnak a számoknál jól ismert asszociatív és disztributív tulajdonságok:

$$\boxed{\begin{array}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \end{array}}$$

Másrészt a kommutatív tulajdonság itt nem teljesül általában, azaz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Érdekes tulajdonság, hogy a szorzás és transzponálás sorrendjének felcserélésekor a tényezők sorrendje is felcserélődik, azaz

$$\boxed{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top}.$$

Jól ismert, hogy $a \cdot 1 = a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén. A négyzetes mátrixok világában az 1 szerepét az egységmátrix veszi át, ugyanis bizonyítható, hogy

$$\boxed{\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n}}.$$

Mátrixok inverze

Számok reciproka az 1 segítségével definiált. Ugyanis az $a \neq 0$ szám reciprokán azt az a^{-1}-gyel jelölt számot értjük, melyre teljesül, hogy $a \cdot a^{-1} = 1$. (Ebből lehet definiálni az osztást is. Legyen $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$, ahol $b \neq 0$. Nyilván ebből következik, hogy $b^{-1} = \frac{1}{b}$.)

Mivel a négyzetes mátrixok körében van egység, ezért itt is lehet definiálni reciprokot, de ezt inverznek fogjuk nevezni.

Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix *inverzén* egy olyan n-edrendű $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelölt négyzetes mátrixot értünk, melyre teljesül, hogy

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n}.$$

PÉLDA

Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

Megoldás: Legyen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$, azaz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ebből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 2b &= 1 \\ a + 3b &= 0 \\ 2d &= 0 \\ c + 3d &= 1 \end{aligned}$$

Ennek megoldása $a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 1,\ d = 0$. Tehát

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. $3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 9 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^\top = ?$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = ?$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

A számoknál csak nullától különböző esetben van reciprok. A négyzetes mátrixoknál viszont nem igaz, hogy csak a nullmátrixnak nincs inverze (lásd az utolsó példát). Ahhoz, hogy az inverz létezéséhez megismerjük a feltételt, meg kell ismerkednünk a determináns fogalmával.

4.3. Determináns

Minden $\mathbf{A}_{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz hozzá fogunk rendelni egy számot, amit a mátrix *determinánsának* nevezünk és $\det \mathbf{A}_{n\times n}$ módon jelölünk.

Az elsőrendű mátrix determinánsa:

$$\boxed{\det \mathbf{A}_{1\times 1} = \det(a_{11}) := a_{11}}$$

Tetszőleges n-edrendű ($n \geqslant 2$) mátrix determinánsa:

$$\boxed{\det \mathbf{A}_{n\times n} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}}$$

ahol az $\mathbf{A}_{ij}$ egy olyan $(n-1)$-edrendű mátrix, amit úgy kapunk, hogy az $\mathbf{A}_{n\times n}$ i-edik sorát és j-edik oszlopát töröljük. Az $\mathbf{A}_{ij}$ determinánsát az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó *aldeterminánsának* nevezzük.

Például

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{esetén} \quad \mathbf{A}_{12} := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

A determinánsoknál szokás még a következő jelölés is:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A determináns fogalma ún. rekurzív módon lett megadva. Ez esetünkben azt jelenti, hogy egy n-edrendű mátrix determinánsát $(n-1)$-edrendű mátrixok determinánsainak segítségével definiáltuk. Vagyis egy másodrendű mátrix determinánsa meghatározható elsőrendű mátrixok determinánsaival, ami már definiált, így a másodrendű eset is definiált. Ebből definiáltá vált a harmadrendű eset is, és így tovább. Példaként meghatározzuk a másod- illetve harmadrenű esetet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

PÉLDA

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) +$$
$$+ 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

Kifejtési tétel

A determinánst definíció alapján úgy kell kiszámolni, hogy az első sor minden elemét megszorozzuk a hozzátartozó aldeterminánssal és még -1-gyel is, ha a sor- és oszlopindexek összege páratlan, majd a kapott számokat össze kell adni. Ezt a determináns első sor szerinti kifejtésnek szokták nevezni.

A kifejtési tétel azt állítja, hogy a determináns értéke nem csak az első sor szerinti kifejtéssel jön ki. Bármelyik sorral vagy oszloppal történő kifejtés során ugyanazt kapjuk. Tehát az i-edik sor szerinti kifejtéssel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad \text{minden} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{esetén,}$$

illetve a j-edik oszlop szerinti kifejtéssel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad \text{minden} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{esetén.}$$

PÉLDA

Számolja ki a következő determinánst definíció szerint, a 2. sor szerint kifejtve, illetve a 3. oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

Megoldás: Definíció szerint

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

2. sor szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

3. oszlop szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

Az előző példában a 2. sor szerint kifejtve kellett a legkevesebbet számolni, mert két tag is 0 volt, hiszen a 2. sorban két 0 szerepel. A számolásnál éppen ezért célszerű olyan sort vagy oszlopot választani, amiben minél több 0 szerepel.

Determináns elemi tulajdonságai

Az n-edrendű mátrix determinánsának kiszámolásakor $n!$ tagú összeget kell kiszámolnunk, melyben a tagok egyenként n tényezős szorzatok. Ez például $n = 5$ esetén 120 tagot jelent, tagonként 5 tényezővel. Ez rengeteg számolást jelent.

Ezt a számolást lehet egyszerűsíteni, ha figyelembe vesszük a determinánsok elemi tulajdonságait:

1. Ha egy négyzetes mátrix valamelyik sorában vagy oszlopában csak 0 szerepel, akkor a determinánsa is 0.

2. Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, akkor $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top$.

3. Háromszögmátrix determinánsa a főátló elemeinek szorzata.

4. Ha egy négyzetes mátrix valamelyik sorának vagy oszlopának minden elemét szorozzuk egy c konstanssal, akkor a kapott mátrix determinánsa az eredeti mátrix determinánsának c-szerese.

5. Ha egy négyzetes mátrix két sorát vagy két oszlopát felcseréljük, akkor a kapott mátrix determinánsa az eredeti mátrix determinánsának -1-szerese.

6. Ha egy négyzetes mátrix két sora vagy két oszlopa megegyezik, akkor a mátrix determinánsa 0.

7. Ha egy négyzetes mátrix valamelyik sorához hozzáadjuk egy másik sorának egy konstansszorosát, vagy valamelyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának egy konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

PÉLDA

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Itt rendre a következő átalakításokat végeztük:

1. A 3. sorhoz hozzáadtuk az 1. sor -4-szeresét.
2. Az 1. sorhoz hozzáadtuk a 3. sort.
3. A 2. sorhoz hozzáadtuk az 1. sor -1-szeresét.
4. Az 1. oszlophoz hozzáadtuk a 3. oszlopot.
5. Az 1. oszlophoz hozzáadtuk a 2. oszlop -2-szeresét.

Az utolsó determináns azért 0, mert az első oszlopában csak 0 van.

G Y A K O R L Ó   F E L A D A T O K

1. $\begin{vmatrix} 1997 & 18 \\ 560 & -1 \end{vmatrix} = ?$

2. $\begin{vmatrix} -12 & -27 & -34 \\ -1 & -10 & -8 \\ 15 & 26 & 27 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = ?$

4. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -6 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = ?$

4.4. Inverz mátrix kiszámítása determinánsok segítségével

Most térjünk vissza arra a kérdésre, hogy egy négyzetes mátrixnak mikor létezik az inverze. Bizonyítható a következő tétel:

Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik az inverze, ha a determinánsa nem 0, és ekkor

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left((-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}\right)^{\top}_{n\times n}.}$$

PÉLDA

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ esetén $\det \mathbf{A} = -2$, $\det \mathbf{A}_{11} = 3$, $\det \mathbf{A}_{12} = 2$, $\det \mathbf{A}_{21} = 1$ és $\det \mathbf{A}_{22} = 0$. Így

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

4.5. Lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ahol a_{ij} és b_i ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) adott valós számokat, míg $x_1, \dots, x_n$ ismeretlen valós számokat jelölnek. Az a_{ij} számokat *együtthatóknak* nevezzük. Feltesszük, hogy az $(a_{ij})_{m\times n}$ ún. *együttható mátrix* minden oszlopában van nullától különböző szám.

Azt mondjuk, hogy az előző egyenletrendszernek $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ rendezett szám n-es megoldása, ha a következő egyenlőségek mindegyike teljesül:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \ a_{12}\alpha_2 + \cdots + \ a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + \ a_{22}\alpha_2 + \cdots + \ a_{2n}\alpha_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{aligned}$$

PÉLDA

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ rendezett számpár megoldása, mert

$$\begin{aligned} 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{3}{2} &= 2 \\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{3}{2} &= 1 \end{aligned}$$

egyenlőségek teljesülnek.

Gauss-elimináció

Lineáris egyenletrendszer egyik megoldási módja az ún. *Gauss-elimináció*. Tekintsük a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert, ahol az $(a_{ij})_{m\times n}$ együttható mátrix minden oszlopában van nullától különböző szám. Feltesszük még, hogy $a_{11} \neq 0$, ami az egyenletek felcserélésével mindig elérhető.

Osszuk el az 1. egyenletet a_{11}-gyel, majd vonjuk ki az 1. egyenlet a_{21}-szeresét a 2., a_{31}-szeresét a 3., és így tovább, az a_{m1}-szeresét az m. egyenletből. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + \ c_{12}x_2 + \cdots + \ c_{1n}x_n &= b'_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + \ c_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\ \vdots \\ c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Ismételjük meg az eljárást a

$$\begin{aligned} c_{22}x_2 + \cdots + \ c_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\ \vdots \\ c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Az eljárást addig folytassuk, amíg elfogynak az egyenletek, vagy az egyenletrendszer további egyenleteinek bal oldalán minden együttható 0. Az utolsó lépés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \cdots + d_{1r}x_r + \cdots + d_{1n}x_n &= b_1^* \\ x_2 + d_{23}x_3 + \cdots + d_{2r}x_r + \cdots + d_{2n}x_n &= b_2^* \\ &\ \vdots \\ x_r + \cdots + d_{rn}x_n &= b_r^* \\ 0 &= b_{r+1}^* \\ 0 &= b_{r+2}^* \\ &\ \vdots \\ 0 &= b_m^* \end{aligned}$$

Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$b_{r+1}^* = b_{r+2}^* = \cdots = b_m^* = 0.$$

Megoldható esetben a megoldások az előbbi egyenletrendszer segítségével adhatók meg:

$$\begin{aligned} x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1r}x_r &= b_1^* - (d_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + d_{1n}x_n) \\ x_2 + \cdots + d_{2r}x_r &= b_2^* - (d_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + d_{2n}x_n) \\ &\ \vdots \\ x_r &= b_r^* - (d_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + d_{rn}x_n) \end{aligned}$$

Ebben az utolsó egyenletből x_r, az előtte lévőből x_{r-1}, és így tovább, az elsőből x_1 kifejezhető. Ha $r = n$, akkor egy megoldás van. Ha $r < n$, akkor az $x_{r+1}, \ldots, x_n$ értékei tetszőlegesek lehetnek, így végtelen sok megoldást kapunk.

PÉLDA

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 62 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás: Osszuk el az 1. egyenletet 2-vel. Ezután vonjuk ki az 1. egyenlet 5-szörösét a 2., illteve 3-szorosát a 3. egyenletből:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ -9x_2 - 18x_3 &= -126 \\ -7x_2 - 11x_3 &= -83 \end{aligned}$$

A 2. egyenletet osszuk el -9-cel, majd 7-szeresét adjuk a 3. egyenlethez. Végül a 3. egyenletet elosztjuk 3-mal:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ x_2 + 2x_3 &= 14 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Tehát $x_3 = 5$, melyből $x_2 = 14 - 2 \cdot 5 = 4$ és $x_1 = 31 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 3$. Így a megoldás a $(3, 4, 5)$ rendezett számhármas.

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás: Alkalmazva a Gauss-eliminációt, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Mivel az utolsó egyenlőség nem igaz, ezért nincs megoldás.

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás: Alkalmazva a Gauss-eliminációt, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből $x_2 = x_3 + x_4 - 1$, továbbá $x_1 = 4x_2 - 2x_3 - 1 = 4(x_3 + x_4 - 1) - 2x_3 - 1 = = 2x_3 + 4x_4 - 5$, ahol x_3 és x_4 tetszőleges. Tehát az összes megoldás felírható

$$(2x_3 + 4x_4 - 5, x_3 + x_4 - 1, x_3, x_4)$$

alakban. Például $x_3 = x_4 = 0$ választással $(-5, -1, 0, 0)$ egy megoldás.

Cramer-szabály

Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert. Tehát most ugyanannyi egyenlet van, mint amennyi ismeretlen. Feltesszük, hogy az $(a_{ij})_{m\times n}$ együttható mátrix minden oszlopában van nullától különböző szám.

Jelöljük D-vel az együttható mátrix determinánsát, D_j-vel pedig annak a mátrixnak a determinánsát, amit úgy kapunk, hogy az együttható mátrix j-edik oszlopát kicseréljük a

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

oszlopra. Ilyen jelölésekkel a Cramer-szabály a következőt állítja:

Ha $D \neq 0$, akkor az előző lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

PÉLDA

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás: Ekkor

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -14$$

Tehát $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$, $x_2 = \frac{0}{-7} = 0$, $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

GYAKORLÓ FELADATOK

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

1.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 14 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 11 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Standard normális eloszlás táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9982
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,99865
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830		
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838		
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846		
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854		
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8078	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		